VWO
B
DEEL 3

GETAL& RUIMTE

UITWERKINGEN

3

NOORDHOFF UITGEVERS

GETAL& RUIMTE

Uitwerkingen vwo B deel 3

ELFDE EDITIE, 2015

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers Groningen

Inhoud

Voor sommige (computer)opgaven is geen uitwerking opgenomen.
Deze zijn aangegeven met een *.

9 Exponentiële en logaritmische functies

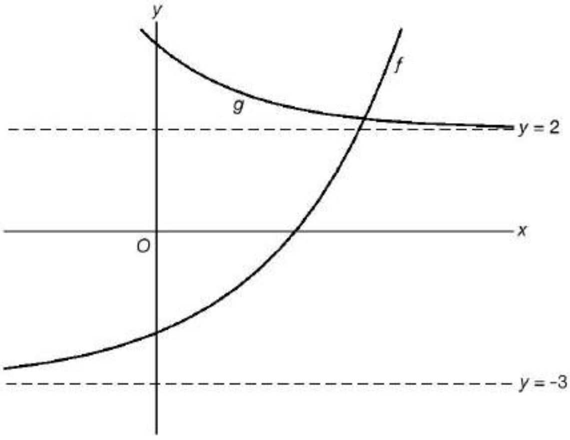
Voorkennis Exponenten

Bladzijde 9

1 **a** $y = \left(1\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow{\text{translatie } (0,\ 3)} f(x) = \left(1\frac{1}{2}\right)^x - 3$

$y = \left(\frac{3}{5}\right)^x \xrightarrow{\text{translatie } (1,\ 2)} g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} + 2$

b



$B_f = \langle -3, \rightarrow\rangle$ en $B_g = \langle 2, \rightarrow\rangle$.

c De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 2{,}71$.

$f(x) \geq 0$ geeft $x \geq 2{,}71$

d $g(0) = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} + 2 = \frac{5}{3} + 2 = 3\frac{2}{3}$

Voor $x \geq 0$ is $2 < g(x) \leq 3\frac{2}{3}$.

e Intersect geeft $x \approx 4{,}07$.

$f(x) \leq g(x)$ geeft $x \leq 4{,}07$

f $B_f = \langle -3, \rightarrow\rangle$, dus $f(x) = p$ heeft geen oplossingen voor $p \leq -3$.

g $AB = g(2) - f(2) = 2{,}6 - -0{,}75 = 3{,}35$

h Voer in $y_3 = 5$.

Intersect met y_1 en y_2 geeft $x = 5{,}128...$

Intersect met y_1 en y_3 geeft $x = -1{,}150...$

$CD = 5{,}128... - -1{,}150... \approx 6{,}28$

2 **a** $y = 4^x$

$\downarrow$ translatie (1, 3)

$f(x) = 4^{x-1} + 3$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

b $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\downarrow$ verm. x-as, 6

$y = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\downarrow$ translatie (0, −1)

$g(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -1$.

c $y = 6^x$

$\downarrow$ verm. x-as, $\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2} \cdot 6^x$

$\downarrow$ translatie (−3, −2)

$y = \frac{1}{2} \cdot 6^{x+3} - 2$

$\downarrow$ verm. y-as, −1

$y = \frac{1}{2} \cdot 6^{-x+3} - 2$

Dus $g(x) = \frac{1}{2} \cdot 6^{3-x} - 2$.

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$.

3 **a** $2 + 3 \cdot 2^{2x-1} = 98$
$3 \cdot 2^{2x-1} = 96$
$2^{2x-1} = 32$
$2^{2x-1} = 2^5$
$2x - 1 = 5$
$2x = 6$
$x = 3$

b $3^{4x-1} = \frac{1}{27}\sqrt{3}$
$3^{4x-1} = 3^{-3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
$3^{4x-1} = 3^{-2\frac{1}{2}}$
$4x - 1 = -2\frac{1}{2}$
$4x = -1\frac{1}{2}$
$x = -\frac{3}{8}$

c $4 \cdot 2^{x-3} = 8^x$
$2^2 \cdot 2^{x-3} = (2^3)^x$
$2^{x-1} = 2^{3x}$
$x - 1 = 3x$
$-2x = 1$
$x = -\frac{1}{2}$

d $\frac{1}{3} \cdot 9^x = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$
$3^{-1} \cdot (3^2)^x = 3^2 \cdot (3^{-1})^x$
$3^{-1} \cdot 3^{2x} = 3^2 \cdot 3^{-x}$
$3^{2x-1} = 3^{2-x}$
$2x - 1 = 2 - x$
$3x = 3$
$x = 1$

e $2^{x+1} + 2^{x-1} = 80$
$2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^{-1} = 80$
$2 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 80$
$2\frac{1}{2} \cdot 2^x = 80$
$2^x = 32$
$2^x = 2^5$
$x = 5$

f $2^{x+1} - 2^{x-1} = 96$
$2^x \cdot 2^1 - 2^x \cdot 2^{-1} = 96$
$2 \cdot 2^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x = 96$
$1\frac{1}{2} \cdot 2^x = 96$
$2^x = 64$
$2^x = 2^6$
$x = 6$

g $4^{x^2+2} = 8^{x^2-1}$
$(2^2)^{x^2+2} = (2^3)^{x^2-1}$
$2^{2x^2+4} = 2^{3x^2-3}$
$2x^2 + 4 = 3x^2 - 3$
$-x^2 = -7$
$x^2 = 7$
$x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$

h $25 \cdot 5^{x-1} = 5 \cdot 0{,}2^x$
$5^2 \cdot 5^{x-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$
$5^{x+1} = 5 \cdot (5^{-1})^x$
$5^{x+1} = 5^1 \cdot 5^{-x}$
$5^{x+1} = 5^{1-x}$
$x + 1 = 1 - x$
$2x = 0$
$x = 0$

i $32 \cdot 2^{x-1} = \frac{1}{4} \cdot 8^x$
$2^5 \cdot 2^{x-1} = 2^{-2} \cdot (2^3)^x$
$2^{x+4} = 2^{-2} \cdot 2^{3x}$
$2^{x+4} = 2^{3x-2}$
$x + 4 = 3x - 2$
$-2x = -6$
$x = 3$

Bladzijde 10

4 **a** $g_{\text{dag}} = 1{,}3$
$g_{\text{week}} = 1{,}3^7 \approx 6{,}27$
Het groeipercentage per week is 527%.

b $g_{\text{dag}} = 1{,}3$
$g_{\text{uur}} = 1{,}3^{\frac{1}{24}} \approx 1{,}011$
Het groeipercentage per uur is 1,1%.

5 **a** $g_{\text{dag}} = 0{,}95$
$g_{\text{week}} = 0{,}95^7 \approx 0{,}698$
De afname is 30,2% per week.

b $g_{\text{jaar}} = 1{,}0475$
$g_{10\text{ jaar}} = 1{,}0475^{10} \approx 1{,}591$
De toename per 10 jaar is 59,1%.

c $g_{\text{week}} = 2{,}4$
$g_{\text{dag}} = 2{,}4^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}133$
De toename per dag is 13,3%.

6 $N = b \cdot g^t$ met $g_{3\text{ dagen}} = \frac{600}{500} = 1{,}2$, dus $g_{\text{dag}} = 1{,}2^{\frac{1}{3}} = 1{,}0626...$

$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}062...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 500 \end{array}\right\} b \cdot 1{,}062...^2 = 500$$
$$b = \frac{500}{1{,}062...^2} \approx 443$$

Dus $N = 443 \cdot 1{,}063^t$.

9

7 $N = b \cdot g^t$ met $g_{7\,\text{dagen}} = \dfrac{1000}{1500} = \frac{2}{3}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{7}} = 0{,}943...$

$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 0{,}943...^t \\ t = 8 \text{ en } N = 1500 \end{array}\right\} b \cdot 0{,}943...^8 = 1500$$
$$b = \frac{1500}{0{,}943...^8} \approx 2384$$

Dus $N = 2384 \cdot 0{,}944^t$.

9.1 Logaritmen

Bladzijde 11

1 **a** $2^3 = 8$

b $2^{-2} = \frac{1}{4}$

c $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

d $3^2 = 9$

e $3^{-3} = \frac{1}{27}$

f $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$

2 **a** ${}^5\log(125) = {}^5\log(5^3) = 3$

b ${}^{10}\log(0{,}1) = {}^{10}\log(10^{-1}) = -1$

c ${}^2\log(4) = {}^2\log(2^2) = 2$

d ${}^7\log(49) = {}^7\log(7^2) = 2$

e ${}^2\log(\sqrt{2}) = {}^2\log(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$

f ${}^2\log(0{,}5) = {}^2\log(2^{-1}) = -1$

g ${}^4\log(0{,}25) = {}^4\log(4^{-1}) = -1$

h ${}^4\log(4) = {}^4\log(4^1) = 1$

i ${}^4\log(1) = {}^4\log(4^0) = 0$

Bladzijde 12

3 **a** ${}^2\log\left(64\sqrt{2}\right) = {}^2\log\left(2^6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) = {}^2\log\left(2^{6\frac{1}{2}}\right) = 6\frac{1}{2}$

b ${}^3\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = {}^3\log\left(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = {}^3\log\left(3^{-1\frac{1}{2}}\right) = -1\frac{1}{2}$

c ${}^3\log(3^{21{,}5}) = 21{,}5$

d ${}^5\log\left(\frac{1}{125}\right) = {}^5\log(5^{-3}) = -3$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{27}\right) = {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right) = 3$

f ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2$

g ${}^2\log\left(\frac{1}{32} \cdot \sqrt[3]{2}\right) = {}^2\log\left(2^{-5} \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) = {}^2\log\left(2^{-4\frac{2}{3}}\right) = -4\frac{2}{3}$

h ${}^5\log(1) = {}^5\log(5^0) = 0$

i ${}^3\log\left(81 \cdot \sqrt[5]{27}\right) = {}^3\log\left(3^4 \cdot \sqrt[5]{3^3}\right) = {}^3\log\left(3^4 \cdot 3^{\frac{3}{5}}\right) = {}^3\log\left(3^{4\frac{3}{5}}\right) = 4\frac{3}{5}$

4 **a** ${}^2\log(x) = 3$
$x = 2^3$
$x = 8$

b ${}^3\log(x) = -2$
$x = 3^{-2}$
$x = \frac{1}{9}$

c ${}^5\log(x) = \frac{1}{2}$
$x = 5^{\frac{1}{2}}$
$x = \sqrt{5}$

5 **a** ${}^3\log(x + 2) = 2$
$x + 2 = 3^2$
$x + 2 = 9$
$x = 7$

b $1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 4$
${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 3$
$x = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$x = \frac{1}{8}$

c ${}^3\log(2x + 1) = 4$
$2x + 1 = 3^4$
$2x + 1 = 81$
$2x = 80$
$x = 40$

d $5 + {}^4\log(x) = 3$
${}^4\log(x) = -2$
$x = 4^{-2}$
$x = \frac{1}{16}$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 1) = 3$
$x - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$x - 1 = \frac{1}{8}$
$x = 1\frac{1}{8}$

f ${}^2\log(x^2 - 4) = 5$
$x^2 - 4 = 2^5$
$x^2 - 4 = 32$
$x^2 = 36$
$x = 6 \vee x = -6$

6 **a** $4 \cdot {}^3\log(x) = 2$
${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$
$x = 3^{\frac{1}{2}}$
$x = \sqrt{3}$

b ${}^3\log(4x - 1) = -2$
$4x - 1 = 3^{-2}$
$4x - 1 = \frac{1}{9}$
$4x = 1\frac{1}{9}$
$x = \frac{5}{18}$

c $3 + {}^2\log(x) = -1$
${}^2\log(x) = -4$
$x = 2^{-4}$
$x = \frac{1}{16}$

d ${}^5\log(3x + 2) = 1$
$3x + 2 = 5^1$
$3x + 2 = 5$
$3x = 3$
$x = 1$

e ${}^3\log(0{,}4x - 5) = 2$
$0{,}4x - 5 = 3^2$
$0{,}4x - 5 = 9$
$0{,}4x = 14$
$x = 35$

f $4 + 2 \cdot {}^2\log(x) = 7$
$2 \cdot {}^2\log(x) = 3$
${}^2\log(x) = 1\frac{1}{2}$
$x = 2^{1\frac{1}{2}}$
$x = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
$x = 2\sqrt{2}$

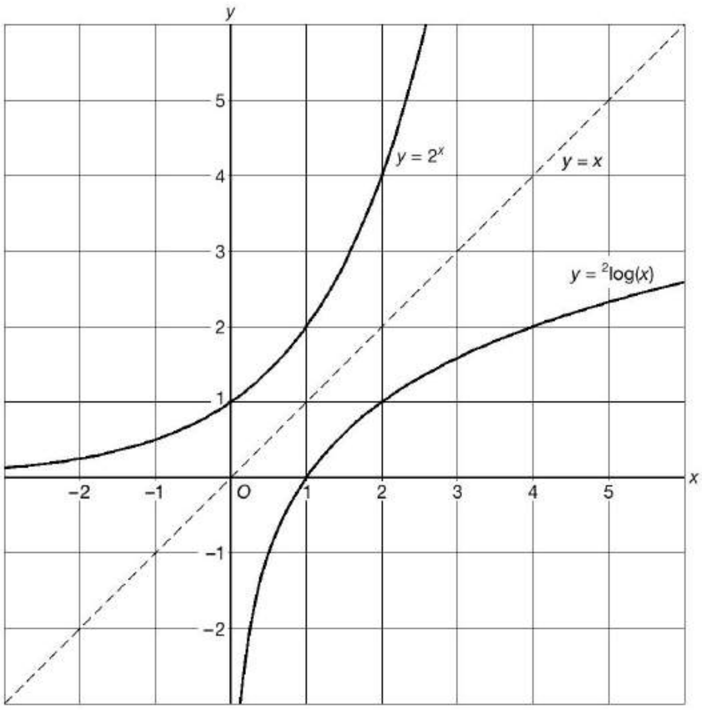
Bladzijde 13

7 **a**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = {}^2\log(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

b



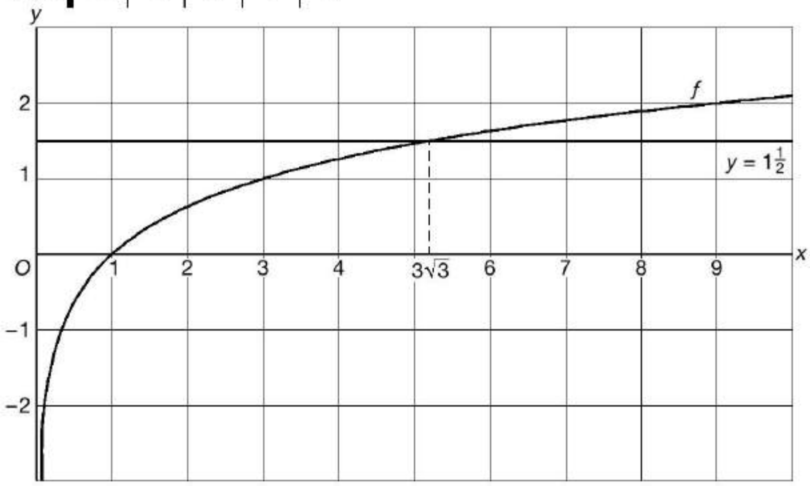
c De grafiek van $h(x) = {}^2\log(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 2^x$ bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Bladzijde 14

8 **a**

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

b



c $f(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft ${}^3\log(x) = 1\frac{1}{2}$

$x = 3^{1\frac{1}{2}}$

$x = 3\sqrt{3}$

$f(x) \leq 1\frac{1}{2}$ geeft $0 < x \leq 3\sqrt{3}$

d $f(\sqrt{3}) = {}^3\log(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$

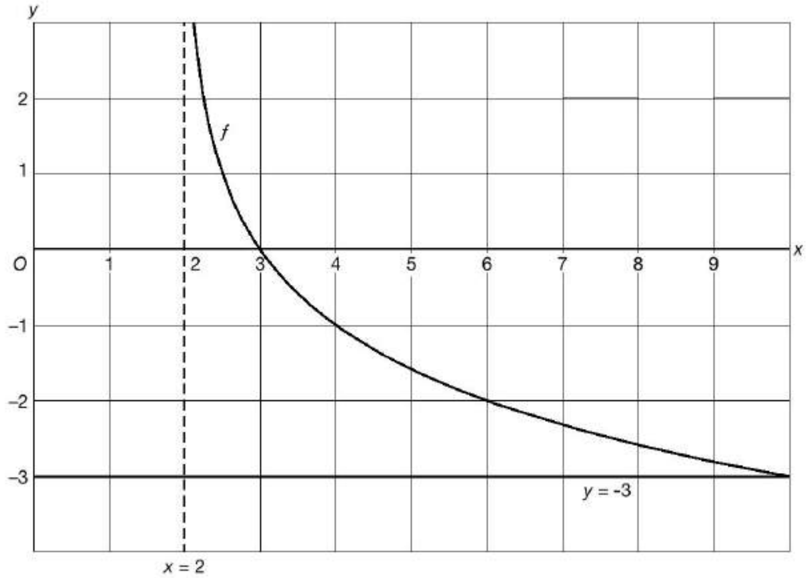
$f(27) = {}^3\log(27) = 3$

Voor $\sqrt{3} \leq x \leq 27$ is $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 3$.

9 **a**

x	6	4	3	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

b



c $f(2\frac{1}{8}) = {}^{\frac{1}{2}}\log(2\frac{1}{8} - 2) = {}^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{8}) = 3$

Voor $x \geq 2\frac{1}{8}$ is $f(x) \leq 3$.

d $f(x) = -3$ geeft ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 2) = -3$

$$x - 2 = (\tfrac{1}{2})^{-3}$$
$$x - 2 = (2^{-1})^{-3}$$
$$x - 2 = 2^3$$
$$x - 2 = 8$$
$$x = 10$$

$f(x) \geq -3$ geeft $2 < x \leq 10$

10 **a** $2^{{}^2\log(8)} = 2^3 = 8$

$3^{{}^3\log(9)} = 3^2 = 9$

$2^{{}^2\log(\frac{1}{2})} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

b $\log(100) = 2$ en $\log(1000) = 3$

Bij deze toets hoort het grondtal 10 omdat ${}^{10}\log(100) = 2$ en ${}^{10}\log(1000) = 3$.

Bladzijde 15

11 **a** ${}^3\log(5) \approx 1{,}46$

b ${}^{\frac{1}{7}}\log(18) \approx -1{,}49$

c ${}^2\log(20) - {}^2\log(6) \approx 1{,}74$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(10) + \log(\frac{1}{3}) \approx -2{,}57$

e $3 \cdot {}^2\log(7) \approx 8{,}42$

f $\dfrac{5}{{}^4\log(12)} \approx 2{,}79$

Bladzijde 16

12 **a** $f(2) = {}^2\log(2) = 1$, dus bestaat.

$g(2) = {}^2\log(0)$ bestaat niet.

$h(2) = {}^2\log(7) \approx 2{,}81$, dus bestaat.

$k(2) = {}^2\log(-1)$ bestaat niet.

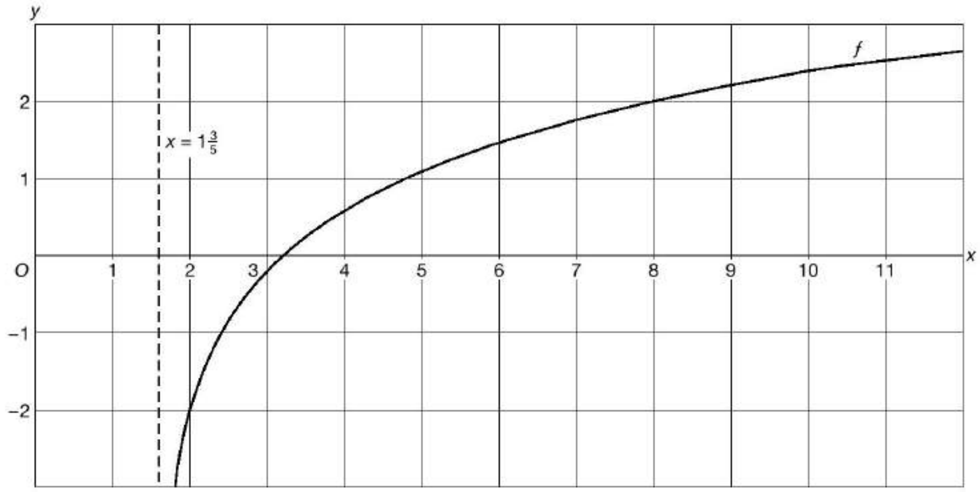
b Omdat het domein van $f(x) = {}^2\log(x)$ het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$ is, kun je alleen logaritmen nemen van positieve getallen.

Dus $g(2) = {}^2\log(0)$ en $k(2) = {}^2\log(-1)$ bestaan niet.

Bladzijde 17

13 **a** $5x - 8 > 0$ geeft $5x > 8$, dus $x > 1\frac{3}{5}$ en $D_f = \langle 1\frac{3}{5}, \rightarrow \rangle$.
De verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{3}{5}$.
Voer in $y_1 = -3 + {}^2\log(5x - 8)$.

x	2	3	4	6	8	12
$f(x)$	-2	-0,2	0,6	1,5	2	2,7

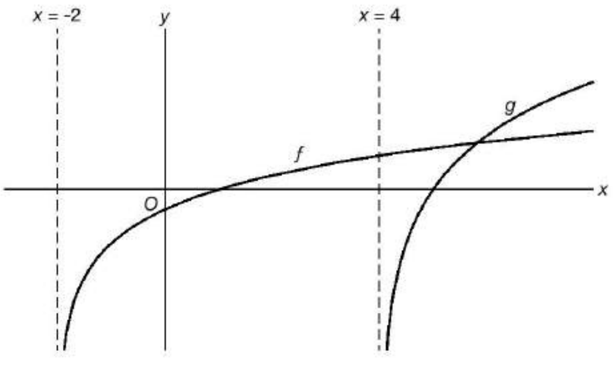


b $f(x) = 0$ geeft $-3 + {}^2\log(5x - 8) = 0$
$${}^2\log(5x - 8) = 3$$
$$5x - 8 = 8$$
$$5x = 16$$
$$x = 3\frac{1}{5}$$
$f(x) \leq 0$ geeft $1\frac{3}{5} < x \leq 3\frac{1}{5}$

c $f(8) = 2$
Voor $x \leq 8$ is $f(x) \leq 2$.

14 **a** $y = {}^3\log(x)$
$\downarrow$ translatie $(-2, -1)$
$f(x) = -1 + {}^3\log(x + 2)$
$y = {}^2\log(x)$
$\downarrow$ translatie $(4, 0)$
$g(x) = {}^2\log(x - 4)$

b $x + 2 > 0$ geeft $x > -2$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -2$ en $D_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$.
$x - 4 > 0$ geeft $x > 4$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 4$ en $D_g = \langle 4, \rightarrow \rangle$.



c Voer in $y_1 = -1 + {}^3\log(x + 2)$ en $y_2 = {}^2\log(x - 4)$.
Intersect geeft $x \approx 5{,}83$ en $y \approx 0{,}87$, dus het snijpunt is $(5{,}83; 0{,}87)$.

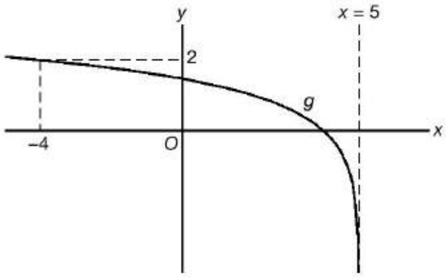
d $f(x) \geq g(x)$ geeft $4 < x \leq 5{,}83$

9

15 **a** $f(x) = 5$ geeft ${}^{\frac{1}{2}}\log(x+3) = 5$

$$x + 3 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$
$$x + 3 = \tfrac{1}{32}$$
$$x = -2\tfrac{31}{32}$$

b $-x + 5 > 0$ geeft $-x > -5$ ofwel $x < 5$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 5$ en $D_g = \langle \leftarrow, 5 \rangle$.

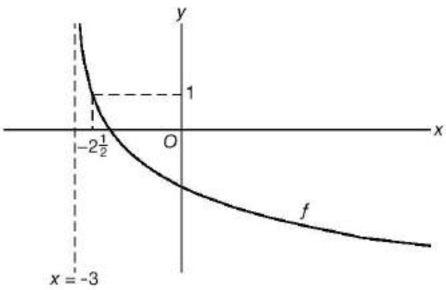


$g(-4) = 2$
Voor $x \geq -4$ is $g(x) \leq 2$.

c $f(x) = 1$ geeft ${}^{\frac{1}{2}}\log(x+3) = 1$

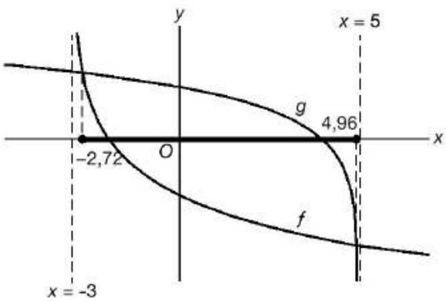
$$x + 3 = \tfrac{1}{2}$$
$$x = -2\tfrac{1}{2}$$

$x + 3 > 0$ geeft $x > -3$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$ en $D_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$.



$f(x) \geq 1$ geeft $-3 < x \leq -2\frac{1}{2}$

d Voer in $y_1 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x+3) = 5$ en $y_2 = {}^{3}\log(-x+5)$.
Intersect geeft $x \approx -2{,}72$ en $x \approx 4{,}96$.



$f(x) \leq g(x)$ geeft $-2{,}72 \leq x \leq 4{,}96$

e Voer in $y_3 = 2{,}5$.
Intersect met y_1 en y_3 geeft $x = -2{,}823...$
Intersect met y_2 en y_3 geeft $x = -10{,}588...$
Dus $AB = -2{,}823... - -10{,}588... \approx 7{,}77$.

16 $3^x = 50$ wil zeggen dat x de exponent is van het grondtal 3 die als uitkomst van de macht 50 geeft.
Dus geldt volgens de definitie van logaritme dat $x = {}^{3}\log(50)$.

Bladzijde 18

17 **a** $2^{x-1} = 15$
$x - 1 = {}^{2}\log(15)$
$x = 1 + {}^{2}\log(15)$

b $1 + 2^x = 15$
$2^x = 14$
$x = {}^{2}\log(14)$

c $4 + 3^{x+1} = 25$
$3^{x+1} = 21$
$x + 1 = {}^{3}\log(21)$
$x = -1 + {}^{3}\log(21)$

d $14 - 2^{x+3} = 2$
$-2^{x+3} = -12$
$2^{x+3} = 12$
$x + 3 = {}^{2}\log(12)$
$x = -3 + {}^{2}\log(12)$

e $7 + 4^{2x} = 12$
$4^{2x} = 5$
$2x = {}^{4}\log(5)$
$x = \frac{1}{2} \cdot {}^{4}\log(5)$

f $3 \cdot 5^{2x+1} = 60$
$5^{2x+1} = 20$
$2x + 1 = {}^{5}\log(20)$
$2x = -1 + {}^{5}\log(20)$
$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^{5}\log(20)$

18 $\left.\begin{array}{l}7 + p \cdot 3^{x-1} = 57\\ x = {}^{3}\log(10)\end{array}\right\}$ $7 + p \cdot 3^{{}^{3}\log(10) - 1} = 57$

$p \cdot 3^{{}^{3}\log(10)} \cdot 3^{-1} = 50$

$p \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} = 50$

$p = 15$

19 $y = 3^{x-1}$ geeft $x - 1 = {}^{3}\log(y)$ en hieruit volgt $x = 1 + {}^{3}\log(y)$.

Bladzijde 19

20 **a** $y = 2^{x-4}$

$2^{x-4} = y$

$x - 4 = {}^{2}\log(y)$

$x = 4 + {}^{2}\log(y)$

b $y = 8 \cdot 3^{x-2}$

$8 \cdot 3^{x-2} = y$

$3^{x-2} = \frac{1}{8}y$

$x - 2 = {}^{3}\log\left(\frac{1}{8}y\right)$

$x = 2 + {}^{3}\log\left(\frac{1}{8}y\right)$

c $y = 4^{5x-1}$

$4^{5x-1} = y$

$5x - 1 = {}^{4}\log(y)$

$5x = 1 + {}^{4}\log(y)$

$x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot {}^{4}\log(y)$

d $y = 10 \cdot 5^{2x-3}$

$10 \cdot 5^{2x-3} = y$

$5^{2x-3} = \frac{1}{10}y$

$2x - 3 = {}^{5}\log\left(\frac{1}{10}y\right)$

$2x = 3 + {}^{5}\log\left(\frac{1}{10}y\right)$

$x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^{5}\log\left(\frac{1}{10}y\right)$

e $y = 5 \cdot 10^{2x-3}$

$5 \cdot 10^{2x-3} = y$

$10^{2x-3} = \frac{1}{5}y$

$2x - 3 = \log\left(\frac{1}{5}y\right)$

$2x = 3 + \log\left(\frac{1}{5}y\right)$

$x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{1}{5}y\right)$

f $y = 100 + 2^{0,25x-1}$

$100 + 2^{0,25x-1} = y$

$2^{0,25x-1} = y - 100$

$0,25x - 1 = {}^{2}\log(y - 100)$

$0,25x = 1 + {}^{2}\log(y - 100)$

$x = 4 + 4 \cdot {}^{2}\log(y - 100)$

g $y = 500 - 10^{0,1x+1,5}$

$500 - 10^{0,1x+1,5} = y$

$-10^{0,1x+1,5} = -500 + y$

$10^{0,1x+1,5} = 500 - y$

$0,1x + 1,5 = \log(500 - y)$

$0,1x = -1,5 + \log(500 - y)$

$x = -15 + 10 \cdot \log(500 - y)$

h $y = 20 + 5 \cdot 10^{0,2x-0,6}$

$20 + 5 \cdot 10^{0,2x-0,6} = y$

$5 \cdot 10^{0,2x-0,6} = y - 20$

$10^{0,2x-0,6} = \frac{1}{5}y - 4$

$0,2x - 0,6 = \log\left(\frac{1}{5}y - 4\right)$

$0,2x = 0,6 + \log\left(\frac{1}{5}y - 4\right)$

$x = 3 + 5 \cdot \log\left(\frac{1}{5}y - 4\right)$

21 **a** $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$

$50 \cdot 2^{4t-1} = N$

$50 \cdot 2^{2(2t-\frac{1}{2})} = N$

$50 \cdot 4^{2t-\frac{1}{2}} = N$

$4^{2t-\frac{1}{2}} = \frac{1}{50}N$

$2t - \frac{1}{2} = {}^{4}\log\left(\frac{1}{50}N\right)$

$2t = \frac{1}{2} + {}^{4}\log\left(\frac{1}{50}N\right)$

$t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot {}^{4}\log\left(\frac{1}{50}N\right)$

b $K = 60 + 40 \cdot 10^{2F-0,8}$

$60 + 40 \cdot 10^{2F-0,8} = K$

$40 \cdot 10^{2F-0,8} = K - 60$

$10^{2F-0,8} = 0,025K - 1,5$

$2F - 0,8 = \log(0,025K - 1,5)$

$2F = 0,8 + \log(0,025K - 1,5)$

$F = 0,4 + 0,5 \cdot \log(0,025K - 1,5)$

c $A = 500 - 50 \cdot 1,75^{B-2,5}$

$50 \cdot 1,75^{B-2,5} = 500 - A$

$1,75^{B-2,5} = 10 - 0,02A$

$B - 2,5 = {}^{1,75}\log(10 - 0,02A)$

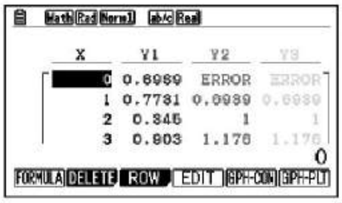
$B = 2,5 + {}^{1,75}\log(10 - 0,02A)$

9

9.2 Rekenregels en vergelijkingen

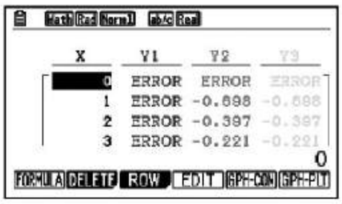
Bladzijde 21

22 **a**



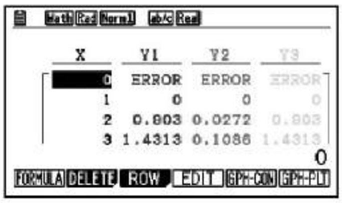
De formules van y_2 en y_3 komen op hetzelfde neer.

b



De formules van y_2 en y_3 komen op hetzelfde neer.

c



De formules van y_1 en y_3 komen op hetzelfde neer.

Bladzijde 22

23 **a** ${}^2\log(6) + {}^2\log(10) = {}^2\log(6 \cdot 10) = {}^2\log(60)$

b ${}^3\log(30) - {}^3\log(6) = {}^3\log\left(\frac{30}{6}\right) = {}^3\log(5)$

c $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log\left(\frac{1}{2}\right) = {}^5\log(3^2) + {}^5\log\left(\frac{1}{2}\right) = {}^5\log\left(9 \cdot \frac{1}{2}\right) = {}^5\log\left(4\frac{1}{2}\right)$

d ${}^{\frac{1}{2}}\log(15) - 4 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(3) = {}^{\frac{1}{2}}\log(15) - {}^{\frac{1}{2}}\log(3^4) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{15}{81}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{5}{27}\right)$

e $-2 \cdot {}^4\log(6) + {}^4\log(12) = {}^4\log(6^{-2}) + {}^4\log(12) = {}^4\log\left(\frac{1}{36} \cdot 12\right) = {}^4\log\left(\frac{1}{3}\right)$

f $\log(50) - 2 \cdot \log(5) = \log(50) - \log(5^2) = \log\left(\frac{50}{25}\right) = \log(2)$

24 **a** $4 + {}^2\log(3) = {}^2\log(2^4) + {}^2\log(3) = {}^2\log(16 \cdot 3) = {}^2\log(48)$

b $3 - {}^{\frac{1}{2}}\log(10) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) - {}^{\frac{1}{2}}\log(10) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\dfrac{\frac{1}{8}}{10}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{80}\right)$

c $2 - \log(5) = \log(10^2) - \log(5) = \log\left(\frac{100}{5}\right) = \log(20)$

d ${}^2\log(12) - {}^3\log(9) = {}^2\log(12) - 2 = {}^2\log(12) - {}^2\log(2^2) = {}^2\log\left(\frac{12}{4}\right) = {}^2\log(3)$

e $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) + {}^{\frac{1}{2}}\log(8) = {}^3\log\left(16^{\frac{1}{2}}\right) - 3 = {}^3\log(4) - {}^3\log(3^3) = {}^3\log\left(\frac{4}{27}\right)$

f $\log(500) - {}^5\log(125) = \log(500) - 3 = \log(500) - \log(10^3) = \log\left(\frac{500}{1000}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$

25 **a** ${}^3\log(6) + {}^3\log\left(1\frac{1}{2}\right) = {}^3\log\left(6 \cdot 1\frac{1}{2}\right) = {}^3\log(9) = 2$

b ${}^5\log(2) - {}^5\log(50) = {}^5\log\left(\frac{2}{50}\right) = {}^5\log\left(\frac{1}{25}\right) = {}^5\log\left(5^{-2}\right) = -2$

c ${}^2\log(27) + 3 \cdot {}^2\log\left(\frac{1}{6}\right) = {}^2\log(27) + {}^2\log\left(\left(\frac{1}{6}\right)^3\right) = {}^2\log\left(27 \cdot \frac{1}{216}\right) = {}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = {}^2\log(2^{-3}) = -3$

d $2 \cdot {}^4\log(6) - 2 \cdot {}^4\log(3) = {}^4\log(6^2) - {}^4\log(3^2) = {}^4\log\left(\frac{36}{9}\right) = {}^4\log(4) = 1$

26 **a** $g^{{}^g\log(a) - {}^g\log(b)} = \dfrac{g^{{}^g\log(a)}}{g^{{}^g\log(b)}} = \dfrac{a}{b} = g^{{}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)}$, dus ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

b $g^{n \cdot {}^g\log(a)} = \left(g^{{}^g\log(a)}\right)^n = a^n = g^{{}^g\log(a^n)}$, dus $n \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^n)$.

27 **a** $3 + {}^2\log(3) = {}^2\log(2^3) + {}^2\log(3) = {}^2\log(8 \cdot 3) = {}^2\log(24)$

b ${}^2\log(x + 1) = 3 + {}^2\log(3)$

${}^2\log(x + 1) = {}^2\log(24)$

$x + 1 = 24$

$x = 23$

Bladzijde 23

28 **a** ${}^5\log(x) = 3 \cdot {}^5\log(2) - 2 \cdot {}^5\log(3)$
${}^5\log(x) = {}^5\log(2^3) - {}^5\log(3^2)$
${}^5\log(x) = {}^5\log\left(\frac{8}{9}\right)$
$x = \frac{8}{9}$
vold.

b ${}^2\log(x) = 4 - {}^2\log(3)$
${}^2\log(x) = {}^2\log(2^4) - {}^2\log(3)$
${}^2\log(x) = {}^2\log\left(\frac{16}{3}\right)$
$x = 5\frac{1}{3}$
vold.

c ${}^2\log(x+3) = 3 + {}^2\log(x)$
${}^2\log(x+3) = {}^2\log(2^3) + {}^2\log(x)$
${}^2\log(x+3) = {}^2\log(8x)$
$x + 3 = 8x$
$-7x = -3$
$x = \frac{3}{7}$
vold.

d ${}^3\log(2x) = 1 + {}^3\log(x+1)$
${}^3\log(2x) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x+1)$
${}^3\log(2x) = {}^3\log(3x+3)$
$2x = 3x + 3$
$-x = 3$
$x = -3$
vold. niet

29 **a** $5 \cdot \log(x) = 5 - \log(3125)$
$5 \cdot \log(x) = 5 - \log(5^5)$
$5 \cdot \log(x) = 5 - 5 \cdot \log(5)$
$\log(x) = 1 - \log(5)$
$\log(x) = \log(10) - \log(5)$
$\log(x) = \log\left(\frac{10}{5}\right)$
$x = 2$
vold.

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x-1) = 2 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x+2)$
${}^{\frac{1}{2}}\log(2x-1) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + {}^{\frac{1}{2}}\log(x+2)$
${}^{\frac{1}{2}}\log(2x-1) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4}(x+2)\right)$
${}^{\frac{1}{2}}\log(2x-1) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$
$2x - 1 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
$1\frac{3}{4}x = 1\frac{1}{2}$
$x = \frac{6}{7}$
vold.

c ${}^3\log(x+2) = 1 - {}^3\log(x)$
${}^3\log(x+2) = {}^3\log(3) - {}^3\log(x)$
${}^3\log(x+2) = {}^3\log\left(\frac{3}{x}\right)$
$x + 2 = \frac{3}{x}$
$x^2 + 2x = 3$
$x^2 + 2x - 3 = 0$
$(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1 \vee x = -3$
vold. vold. niet

d $2 \cdot {}^3\log(x) + 1 = {}^3\log(5x-2)$
${}^3\log(x^2) + {}^3\log(3) = {}^3\log(5x-2)$
${}^3\log(3x^2) = {}^3\log(5x-2)$
$3x^2 = 5x - 2$
$3x^2 - 5x + 2 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$
$x = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \vee x = \frac{5+1}{6} = 1$
vold. vold.

30 **a** ${}^5\log(x) = 2 + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(3)$
${}^5\log(x) = {}^5\log(5^2) + {}^5\log\left(3^{\frac{1}{2}}\right)$
${}^5\log(x) = {}^5\log(25) + {}^5\log\left(\sqrt{3}\right)$
${}^5\log(x) = {}^5\log\left(25\sqrt{3}\right)$
$x = 25\sqrt{3}$
vold.

b ${}^3\log(x+4) + 1 = 2 \cdot {}^3\log(x-2)$
${}^3\log(x+4) + {}^3\log(3) = {}^3\log((x-2)^2)$
${}^3\log(3(x+4)) = {}^3\log(x^2 - 4x + 4)$
$3x + 12 = x^2 - 4x + 4$
$x^2 - 7x - 8 = 0$
$(x+1)(x-8) = 0$
$x = -1 \vee x = 8$
vold. niet vold.

c ${}^2\log(2x) - {}^2\log(x+3) = {}^2\log(x) - 2$
${}^2\log\left(\frac{2x}{x+3}\right) = {}^2\log(x) - {}^2\log(2^2)$
${}^2\log\left(\frac{2x}{x+3}\right) = {}^2\log\left(\frac{x}{4}\right)$
$\frac{2x}{x+3} = \frac{x}{4}$
$x^2 + 3x = 8x$
$x^2 - 5x = 0$
$x(x-5) = 0$
$x = 0 \vee x = 5$
vold. niet vold.

d ${}^3\log(x) = 2 - {}^3\log(x-1)$
${}^3\log(x) = {}^3\log(3^2) - {}^3\log(x-1)$
${}^3\log(x) = {}^3\log\left(\frac{9}{x-1}\right)$
$x = \frac{9}{x-1}$
$x^2 - x = 9$
$x^2 - x - 9 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 37$
$x = \frac{1-\sqrt{37}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{37}}{2}$
$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37} \vee x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37}$
vold. niet vold.

9

31 $^{2}\log(5) = \dfrac{\log(5)}{\log(2)} = \dfrac{\frac{\log(5)}{\log(3)}}{\frac{\log(2)}{\log(3)}} = \dfrac{^{3}\log(5)}{^{3}\log(2)}$

Bladzijde 25

32 **a** $^{3}\log(3x-5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(x-1) = 0$
$^{3}\log(3x-5) - {}^{3}\log(x-1) = 0$
$^{3}\log(3x-5) = {}^{3}\log(x-1)$
$3x - 5 = x - 1$
$2x = 4$
$x = 2$
vold.

b $^{5}\log(3x) + 2 \cdot {}^{\frac{1}{5}}\log(x) = 0$
$^{5}\log(3x) + {}^{\frac{1}{5}}\log(x^2) = 0$
$^{5}\log(3x) - {}^{5}\log(x^2) = 0$
$^{5}\log(3x) = {}^{5}\log(x^2)$
$3x = x^2$
$x^2 - 3x = 0$
$x(x-3) = 0$
$x = 0 \vee x = 3$
vold. niet vold.

c $2x \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(3x+5) = {}^{\frac{1}{3}}\log(3x+5)$
${}^{\frac{1}{3}}\log(3x+5) = 0 \vee 2x = 1$
$3x + 5 = 1 \vee x = \frac{1}{2}$
$3x = -4 \vee x = \frac{1}{2}$
$x = -1\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2}$
vold. vold.

d $^{2}\log(x) = {}^{4}\log(x+20)$
$^{2}\log(x) = \dfrac{^{2}\log(x+20)}{^{2}\log(4)}$
$^{2}\log(x) = \dfrac{^{2}\log(x+20)}{2}$
$2 \cdot {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(x+20)$
$^{2}\log(x^2) = {}^{2}\log(x+20)$
$x^2 = x + 20$
$x^2 - x - 20 = 0$
$(x+4)(x-5) = 0$
$x = -4 \vee x = 5$
vold. niet vold.

33 **a** $-2 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 2 + {}^{2}\log(3-x)$
$2 \cdot {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(2^2) + {}^{2}\log(3-x)$
$^{2}\log(x^2) = {}^{2}\log(4(3-x))$
$x^2 = 12 - 4x$
$x^2 + 4x - 12 = 0$
$(x-2)(x+6) = 0$
$x = 2 \vee x = -6$
vold. vold. niet

b $^{9}\log(2x) = {}^{3}\log(x-4)$
$\dfrac{^{3}\log(2x)}{^{3}\log(9)} = {}^{3}\log(x-4)$
$\dfrac{^{3}\log(2x)}{2} = {}^{3}\log(x-4)$
$^{3}\log(2x) = 2 \cdot {}^{3}\log(x-4)$
$^{3}\log(2x) = {}^{3}\log((x-4)^2)$
$2x = (x-4)^2$
$2x = x^2 - 8x + 16$
$x^2 - 10x + 16 = 0$
$(x-2)(x-8) = 0$
$x = 2 \vee x = 8$
vold. niet vold.

c $4x \cdot {}^{4}\log(2x-1) + 3 \cdot {}^{4}\log(2x-1) = 0$
$(4x+3) \cdot {}^{4}\log(2x-1) = 0$
$4x + 3 = 0 \vee {}^{4}\log(2x-1) = 0$
$4x = -3 \vee 2x - 1 = 1$
$x = -\frac{3}{4} \vee 2x = 2$
$x = -\frac{3}{4} \vee x = 1$
vold. niet vold.

d $x^2 \cdot {}^{5}\log(2x+1) + 9 \cdot {}^{\frac{1}{5}}\log(2x+1) = 0$
$x^2 \cdot {}^{5}\log(2x+1) - 9 \cdot {}^{5}\log(2x+1) = 0$
$(x^2 - 9) \cdot {}^{5}\log(2x+1) = 0$
$x^2 - 9 = 0 \vee {}^{5}\log(2x+1) = 0$
$x^2 = 9 \vee 2x + 1 = 1$
$x = 3 \vee x = -3 \vee 2x = 0$
$x = 3 \vee x = -3 \vee x = 0$
vold. vold. niet vold.

34 **a** $({}^{2}\log(x))^2 - 2 \cdot {}^{2}\log(x) - 8 = 0$
Stel $^{2}\log(x) = u$.
$u^2 - 2u - 8 = 0$
$(u+2)(u-4) = 0$
$u = -2 \vee u = 4$

b $^{2}\log(x) = -2 \vee {}^{2}\log(x) = 4$
$x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \vee x = 2^4 = 16$
vold. vold.

35 **a** $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x = 8$
Stel $2^x = u$.
$u^2 + 2u = 8$
$u^2 + 2u - 8 = 0$
$(u-2)(u+4) = 0$
$u = 2 \vee u = -4$

b $2^x = 2 \vee 2^x = -4$
$x = 1$ geen oplossing

Bladzijde 26

36 **a** $^2\log^2(x) = 2 \cdot {}^2\log(x) + 3$
Stel $^2\log(x) = u$.
$u^2 = 2u + 3$
$u^2 - 2u - 3 = 0$
$(u + 1)(u - 3) = 0$
$u = -1 \vee u = 3$
$^2\log(x) = -1 \vee {}^2\log(x) = 3$
$x = \frac{1}{2} \vee x = 3$
vold. vold.

b $^{\frac{1}{2}}\log^2(x + 2) + 3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 2) = 0$
Stel $^{\frac{1}{2}}\log(x + 2) = u$.
$u^2 + 3u = 0$
$u(u + 3) = 0$
$u = 0 \vee u = -3$
$^{\frac{1}{2}}\log(x + 2) = 0 \vee {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 2) = -3$
$x + 2 = 1 \vee x + 2 = 8$
$x = -1 \vee x = 6$
vold. vold.

c $2 \cdot {}^3\log^2(x) + 2 = 5 \cdot {}^3\log(x)$
Stel $^3\log(x) = u$.
$2u^2 + 2 = 5u$
$2u^2 - 5u + 2 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$
$u = \dfrac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2} \vee u = \dfrac{5 + 3}{4} = 2$
$^3\log(x) = \frac{1}{2} \vee {}^3\log(x) = 2$
$x = \sqrt{3} \vee x = 9$
vold. vold.

d $^5\log^2(x) + 3 \cdot {}^{\frac{1}{5}}\log(x) + 2 = 0$
$^5\log^2(x) - 3 \cdot {}^5\log(x) + 2 = 0$
Stel $^5\log(x) = u$.
$u^2 - 3u + 2 = 0$
$(u - 1)(u - 2) = 0$
$u = 1 \vee u = 2$
$^5\log(x) = 1 \vee {}^5\log(x) = 2$
$x = 5 \vee x = 25$
vold. vold.

37 **a** $3^x - 2 = 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$
$3^x - 2 = 8 \cdot \dfrac{1}{3^x}$
Stel $3^x = u$.
$u - 2 = 8 \cdot \dfrac{1}{u}$
$u^2 - 2u = 8$
$u^2 - 2u - 8 = 0$
$(u + 2)(u - 4) = 0$
$u = -2 \vee u = 4$
$3^x = -2 \vee 3^x = 4$
geen opl. $x = {}^3\log(4)$

b $2^x = 6 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$2^x = 6 - 5 \cdot \dfrac{1}{2^x}$
Stel $2^x = u$.
$u = 6 - 5 \cdot \dfrac{1}{u}$
$u^2 = 6u - 5$
$u^2 - 6u + 5 = 0$
$(u - 1)(u - 5) = 0$
$u = 1 \vee u = 5$
$2^x = 1 \vee 2^x = 5$
$x = 0 \vee x = {}^2\log(5)$

c $9^x = 4 + 3^{x+1}$
$(3^2)^x = 4 + 3^x \cdot 3$
$(3^x)^2 = 4 + 3 \cdot 3^x$
Stel $3^x = u$.
$u^2 = 4 + 3u$
$u^2 - 3u - 4 = 0$
$(u + 1)(u - 4) = 0$
$u = -1 \vee u = 4$
$3^x = -1 \vee 3^x = 4$
geen opl. $\vee\ x = {}^3\log(4)$

d $2^x = 24 - 2^{2x-1}$
$2^x = 24 - 2^{2x} \cdot 2^{-1}$
$2^x = 24 - (2^x)^2 \cdot \frac{1}{2}$
Stel $2^x = u$.
$u = 24 - \frac{1}{2}u^2$
$\frac{1}{2}u^2 + u - 24 = 0$
$u^2 + 2u - 48 = 0$
$(u - 6)(u + 8) = 0$
$u = 6 \vee u = -8$
$2^x = 6 \quad \vee \quad 2^x = -8$
$x = {}^2\log(6)$ geen opl.

38 **a** $3^{2x-1} = 10$
$2x - 1 = {}^3\log(10)$
$2x = 1 + {}^3\log(10)$
$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(10) \approx 1{,}55$

b $5 \cdot 4^{x-2} = 16$
$4^{x-2} = 3\frac{1}{5}$
$x - 2 = {}^4\log\left(3\frac{1}{5}\right)$
$x = 2 + {}^4\log\left(3\frac{1}{5}\right) \approx 2{,}84$

9

c $9^x = 2 \cdot 3^x + 6$
$(3^2)^x = 2 \cdot 3^x + 6$
$(3^x)^2 = 2 \cdot 3^x + 6$
Stel $3^x = u$.
$u^2 = 2u + 6$
$u^2 - 2u - 6 = 0$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = 28$
$u = \frac{2 - \sqrt{28}}{2} \vee u = \frac{2 + \sqrt{28}}{2}$
$u = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{28} \vee u = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{28}$
$3^x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{28} \vee 3^x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{28}$
geen opl. $\vee x = {}^3\log\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{28}\right) \approx 1{,}18$

d $2^x + 2^{-x} = 3$
$2^x + \frac{1}{2^x} = 3$
Stel $2^x = u$.
$u + \frac{1}{u} = 3$
$u^2 + 1 = 3u$
$u^2 - 3u + 1 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$
$u = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
$u = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee u = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$2^x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee 2^x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$x = {}^2\log\left(1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \vee x = {}^2\log\left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$
$x \approx -1{,}39 \vee x \approx 1{,}39$

39 **a** $3^{x+2} + 3^x = 600$
$3^2 \cdot 3^x + 3^x = 600$
$9 \cdot 3^x + 3^x = 600$
$10 \cdot 3^x = 600$
$3^x = 60$
$x = {}^3\log(60)$

b $3^x + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 18$
$3^x + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 18$
$3^x + 5 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3^x} = 18$
Stel $3^x = u$.
$u + \frac{45}{u} = 18$
$u^2 + 45 = 18u$
$u^2 - 18u + 45 = 0$
$(u - 3)(u - 15) = 0$
$u = 3 \vee u = 15$
$3^x = 3 \vee 3^x = 15$
$x = 1 \vee x = {}^3\log(15)$

c $5^{x-1} + 5^{2x-1} = 4$
$5^{-1} \cdot 5^x + 5^{-1} \cdot 5^{2x} = 4$
$\frac{1}{5} \cdot 5^x + \frac{1}{5} \cdot (5^x)^2 = 4$
$5^x + (5^x)^2 = 20$
Stel $5^x = u$.
$u + u^2 = 20$
$u^2 + u - 20 = 0$
$(u - 4)(u + 5) = 0$
$u = 4 \vee u = -5$
$5^x = 4 \quad \vee \; 5^x = -5$
$x = {}^5\log(4)$ geen opl.

d $3^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 9$
$3^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$
$3^x + 2 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3^x} = 9$
Stel $3^x = u$.
$u + \frac{18}{u} = 9$
$u^2 + 18 = 9u$
$u^2 - 9u + 18 = 0$
$(u - 3)(u - 6) = 0$
$u = 3 \vee u = 6$
$3^x = 3 \vee 3^x = 6$
$x = 1 \vee x = {}^3\log(6)$

9.3 Exponentiële en logaritmische formules

Bladzijde 28

40 **a** $21{,}7 \cdot 1{,}026^t = 43{,}4$
$1{,}026^t = 2$
$t = {}^{1{,}026}\log(2) = 27{,}00\ldots$
Dus na 27 jaar is het aantal verdubbeld.

b $19{,}6 \cdot 1{,}026^t = 39{,}2$
$1{,}026^t = 2$
$t = {}^{1{,}026}\log(2) = 27{,}00\ldots$
Dus na 27 jaar is het aantal verdubbeld.

Bladzijde 29

41 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}131$
$1{,}131^T = 2$
$T = {}^{1{,}131}\log(2) = 5{,}630...$
De verdubbelingstijd is 5 jaar en $(0{,}630 \cdot 12 = 7{,}567.. \approx)$ 8 maanden.

b $g_{\text{week}} = 0{,}915$
$0{,}915^T = \frac{1}{2}$
$T = {}^{0{,}915}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 7{,}802...$
De halveringstijd is 7 weken en $(0{,}802... \cdot 7 = 5{,}620... \approx)$ 6 dagen.

42 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}011$
$1{,}011^T = 2$
$T = {}^{1{,}011}\log(2) = 63{,}359...$
De verdubbelingstijd is 63 jaar.
b $g_{10\text{ jaar}} = 1{,}083$
$1{,}083^T = 2$
$T = {}^{1{,}083}\log(2) = 8{,}693...$
De verdubbelingstijd is $8{,}693... \cdot 10$ jaar ≈ 87 jaar.

43 **a** $g_{\text{dag}} = 0{,}917$
$0{,}917^T = \frac{1}{2}$
$T = {}^{0{,}917}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 7{,}999...$
De halveringstijd is 8 dagen.
b $0{,}917^T = 0,$
$T = {}^{0{,}917}\log(0{,}1) = 26{,}574...$
Na 27 dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over.

44 **a** $g_{\text{dag}} = 2^{\frac{1}{10}} = 1{,}0717...$
Het groeipercentage per dag is 7,2.
b $g_{25\text{ jaar}} = 2$
$g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{25}} = 1{,}0281...$
Het groeipercentage per jaar is 2,8.
c $g_{28\text{ jaar}} = \frac{1}{2}$
$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{28}} = 0{,}9755...$
De hoeveelheid radioactieve stof neemt met 2,4% per jaar af.

45 **a** $g_{\text{dag}} = 0{,}81$
$g_{\text{week}} = 0{,}81^7 = 0{,}2287...$
De afname per week is 77,1%.
b $g_{\text{week}} = 0{,}38$
$g_{\text{dag}} = 0{,}38^{\frac{1}{7}} = 0{,}8709...$
De afname per dag is 12,9%.
c De groeifactor per dag is 0,845.
Dus $\text{BZV} = 300 \cdot 0{,}845^t$.
d $0{,}845^T = \frac{1}{2}$
$T = {}^{0{,}845}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 4{,}1156...$
De halveringstijd is 4 dagen en $(0{,}1156... \cdot 24 = 2{,}77... \approx)$ 3 uur.
$300 \cdot 0{,}845^t = 10$
e $0{,}845^t = \dfrac{10}{300} = \frac{1}{30}$
$t = {}^{0{,}845}\log\left(\frac{1}{30}\right) = 20{,}1948...$
Dus na ruim 20 dagen is het BZV afgenomen tot 10 mg/Liter.
f $T = 10$ geeft $h = 7{,}6 \cdot 0{,}96^{10} = 5{,}0527...$
Bij 10 °C is de groeifactor per dag 0,8709... (zie vraag b).
$0{,}8709...^{5{,}0527...} = 0{,}4973... \approx 0{,}5$, dus de formule klopt voor $T = 10$.
$T = 20$ geeft $h = 7{,}6 \cdot 0{,}96^{20} = 3{,}3592...$
Bij 20 °C is de groeifactor per dag 0,81 (zie vraag a).
$0{,}81^{3{,}3592...} = 0{,}4926... \approx 0{,}5$, dus de formule klopt voor $T = 20$.

9

Bladzijde 30

46 **a**

ster	lichtkracht	logaritme van de lichtkracht
Wolf 359	0,00002	−4,7
Ster van Barnard	0,0004	−3,4
Lalande	0,0016	−2,8
Epsilon Eridani	0,28	−0,6
Zon	1	0
Sirius A	23	1,4
Spica	830	2,9
Polaris	4900	3,7
Betelgeuze	22 900	4,4
Rigel A	75 850	4,9

$\frac{75\,850}{23} = 3297{,}82...$

Dus de lichtkracht van Rigel A is ongeveer 3300 keer zo groot als die van Sirius A.

$\frac{75\,850}{0{,}00002} = 3{,}7925 \cdot 10^9$

Dus de lichtkracht van Rigel A is ongeveer 3,8 miljard keer zo groot als die van Wolf 359.

b $\frac{75\,850}{0{,}00001} = 7{,}585 \cdot 10^9$

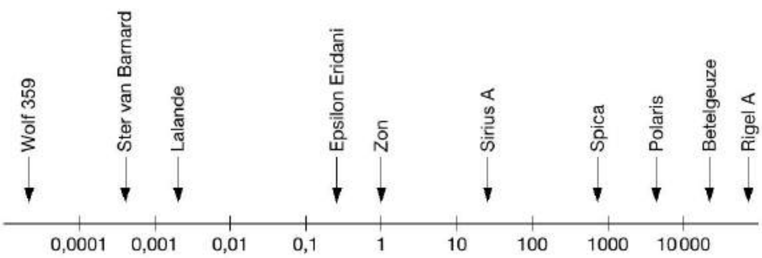
Dus de getallenlijn moet dan ongeveer 7,6 miljard mm = 7600 km lang worden.

c $\frac{75\,850}{1000} = 75{,}85$

Dus de getallenlijn moet dan ongeveer 76 mm = 7,6 cm lang worden.
Het bezwaar hiertegen is dat sterren met een lichtkracht van minder dan 1000 allemaal binnen 1 mm geplaatst worden en dus niet meer van elkaar zijn te onderscheiden.

Bladzijde 31

47 **a**



b $\log(L) = -4{,}3$ geeft $L = 10^{-4{,}3} \approx 0{,}00005$

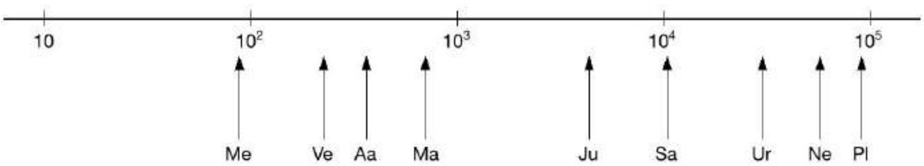
Dus de lichtkracht van Proxima Centauri is ongeveer 0,00005.

$\log(L) = 3{,}8$ geeft $L = 10^{3{,}8} \approx 6310$

Dus de lichtkracht van Bellatrix is ongeveer 6310.

48

planeet	omlooptijd	logaritme van de omlooptijd
Mercurius	88 dagen	1,9
Venus	225 dagen	2,4
Aarde	365 dagen	2,6
Mars	687 dagen	2,8
Jupiter	11,86 jaar	3,6
Saturnus	29,46 jaar	4,0
Uranus	84,08 jaar	4,5
Neptunus	164,8 jaar	4,8
Pluto	248,4 jaar	5,0



Bladzijde 32

49 **a**

letter	y-waarde
A	1,3
B	7,5
C	23
D	55
E	150
F	2400

b Wel bij 550, 210, 9,5 en 2,4.
Niet bij 310, 49, 1,25 en 0.

c

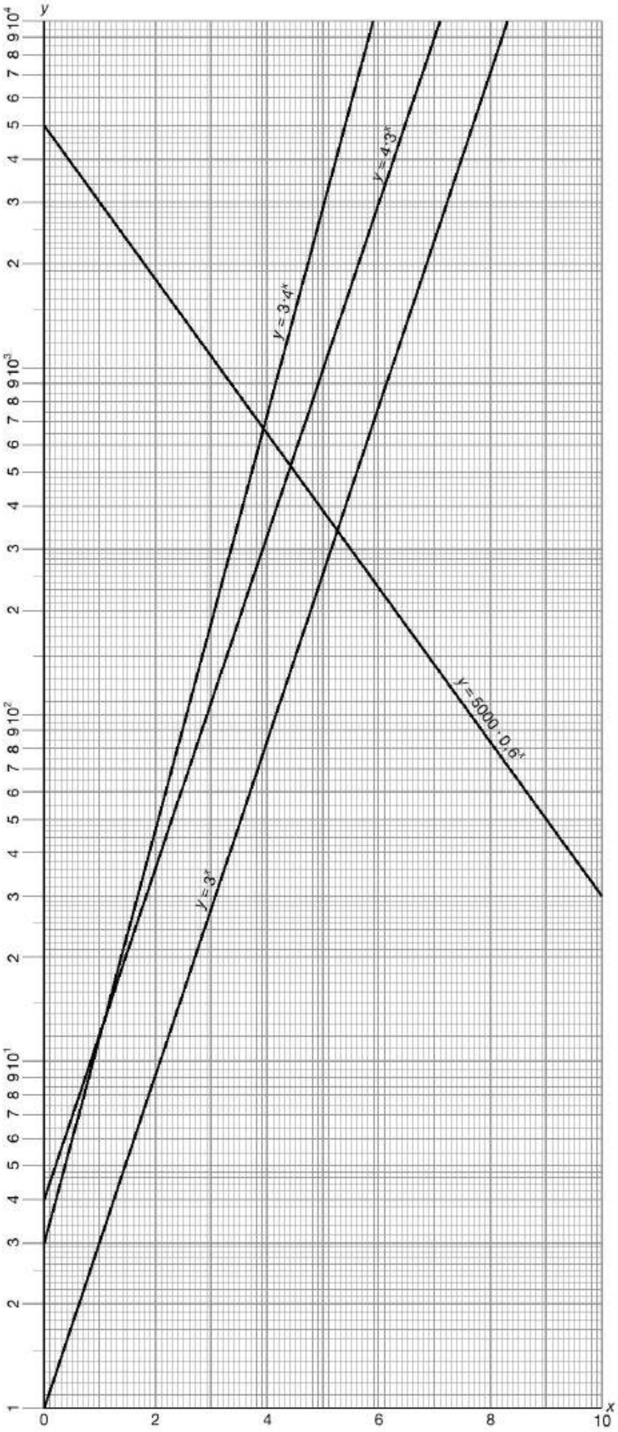
letter	y-waarde
A	1300
B	7500
C	23 000
D	55 000
E	150 000
F	2 400 000

Bladzijde 33

50 **a**

x	0	2	4	6	8
$y = 3^x$	1	9	81	729	6561

b



De punten liggen op een rechte lijn.

c

x	0	2	4	6	8
$y = 4 \cdot 3^x$	4	36	324	2916	26 244
$y = 3 \cdot 4^x$	3	48	768	12 288	196 608
$y = 5000 \cdot 0{,}6^x$	5000	1800	648	233	84

Zie de grafieken bij b.

d $y = 4 \cdot 3^x$ geeft $\log(y) = \log(4 \cdot 3^x)$

$$\log(y) = \log(4) + \log(3^x)$$
$$\log(y) = \log(4) + x \cdot \log(3)$$
$$\log(y) = \log(3) \cdot x + \log(4)$$

e $\log(y) = \log(3) \cdot x + \log(4)$ is een lineaire functie van x, dus de grafiek van $\log(y)$ als functie van x is een rechte lijn. Omdat op logaritmisch papier $\log(y)$ is uitgezet tegen x, is de grafiek van $y = 4 \cdot 3^x$ op logaritmisch papier een rechte lijn.

Bladzijde 34

51 **a** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

Lijn door (1, 30) en (7, 400), dus $g_{6\text{ dagen}} = \frac{400}{30}$.

$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{400}{30}\right)^{\frac{1}{6}} = 1{,}539...$$

$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}539...^t \\ \text{voor } t = 1 \text{ is } N = 30 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b \cdot 1{,}539...^1 = 30 \\ b = \frac{30}{1{,}539...} \\ b \approx 19 \end{array}$$

Dus $N = 19 \cdot 1{,}540^t$.

b Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

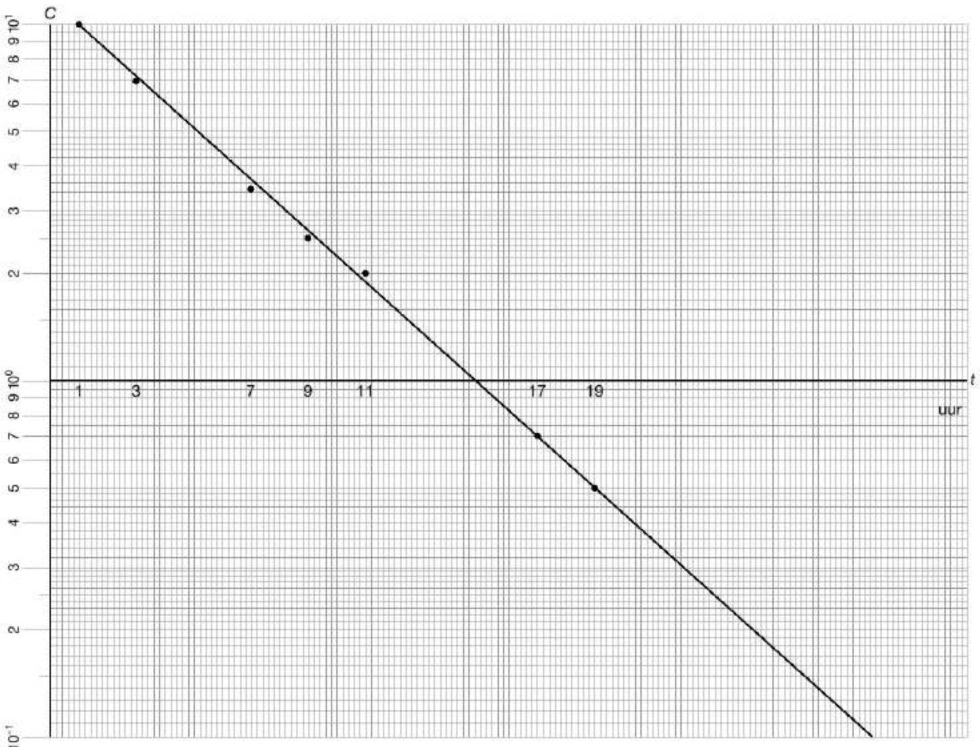
Lijn door (2, 100) en (8, 9), dus $g_{6\text{ dagen}} = \frac{9}{100} = 0{,}09$.

$$g_{\text{dag}} = 0{,}09^{\frac{1}{6}} = 0{,}6694...$$

$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 0{,}6694...^t \\ \text{voor } t = 2 \text{ is } N = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b \cdot 0{,}6694...^2 = 100 \\ b = \frac{100}{0{,}6694...^2} \\ b \approx 223 \end{array}$$

Dus $N = 223 \cdot 0{,}669^t$.

52 **a**



b Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $C = b \cdot g^t$.

Lijn door (1, 10) en (19; 0,5), dus $g_{18 \text{ uur}} = \dfrac{0{,}5}{10} = 0{,}05$.

$$g_{\text{uur}} = 0{,}05^{\frac{1}{18}} = 0{,}8466...$$

$$\left.\begin{array}{l} C = b \cdot 0{,}8466...^t \\ \text{voor } t = 1 \text{ is } C = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b \cdot 0{,}8466...^1 = 10 \\ b = \dfrac{10}{0{,}8466...} \\ b \approx 11{,}8 \end{array}$$

Dus $C = 11{,}8 \cdot 0{,}847^t$.

c
$$\left.\begin{array}{l} \text{Bij } x \text{ liter bloed is de concentratie op } t = 0 \text{ gelijk aan } \dfrac{60}{x} \text{ mg/L.} \\ \text{Op } t = 0 \text{ is } C = 11{,}810... \text{ mg/L.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{60}{x} = 11{,}810... \\ x = \dfrac{60}{11{,}810...} \approx 5 \end{array}$$

Dus de patiënt heeft ongeveer 5 liter bloed.

Bladzijde 35

53 **a** $y = 2^x$

$\downarrow$ translatie $(-3, 0)$

$f(x) = 2^{x+3}$

b $f(x) = 2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$

Dus de grafiek van f ontstaat ook uit de grafiek van $y = 2^x$ door de vermenigvuldiging met 8 ten opzichte van de x-as.

54 **a** $y = {}^2\log(x)$

$\downarrow$ verm. x-as, $\frac{1}{8}$

$f(x) = {}^2\log(8x)$

b $f(x) = {}^2\log(8x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x) = 3 + {}^2\log(x)$

Dus de grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(0, 3)$.

Bladzijde 36

55 **a** $y = 2^x$

$\downarrow$ translatie $(5, 0)$

$y = 2^{x-5}$

Er geldt $2^{x-5} = 2^x \cdot 2^{-5} = \frac{1}{32} \cdot 2^x$.

Dus de vermenigvuldiging met $\frac{1}{32}$ ten opzichte van de x-as levert dezelfde beeldfiguur op.

b $y = 4^x$

$\downarrow$ verm. x-as, 2

$y = 2 \cdot 4^x$

Er geldt $2 \cdot 4^x = \sqrt{4} \cdot 4^x = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^x = 4^{x + \frac{1}{2}}$.

Dus de translatie $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ levert dezelfde beeldfiguur op.

c $y = {}^2\log(x)$

$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{32}$

$y = {}^2\log(32x)$

Er geldt ${}^2\log(32x) = {}^2\log(32) + {}^2\log(x) = 5 + {}^2\log(x) = {}^2\log(x) + 5$.

Dus de translatie $(0, 5)$ levert dezelfde beeldfiguur op.

d $y = {}^4\log(x)$

$\downarrow$ translatie $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$y = {}^4\log(x) + \frac{1}{2}$

Er geldt ${}^4\log(x) + \frac{1}{2} = {}^4\log(x) + {}^4\log\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = {}^4\log(x) + {}^4\log(2) = {}^4\log(2x)$.

Dus de vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as levert dezelfde beeldfiguur op.

56 **a** $f(x) = {}^2\log(x)$

$\downarrow$ translatie $(3, 0)$

$g(x) = {}^2\log(x - 3)$

b $g(x) = {}^2\log(x - 3)$

$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{4}$

$h(x) = {}^2\log(4x - 3)$

Er geldt $h(x) = {}^2\log(4x - 3) = {}^2\log\left(4\left(x - \frac{3}{4}\right)\right) = {}^2\log(4) + {}^2\log\left(x - \frac{3}{4}\right) = 2 + {}^2\log\left(x - \frac{3}{4}\right)$.

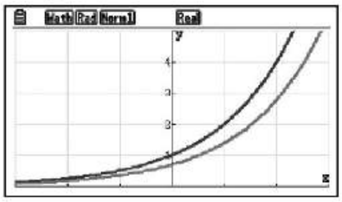
Dus $p = -\frac{3}{4}$ en $q = 2$.

9

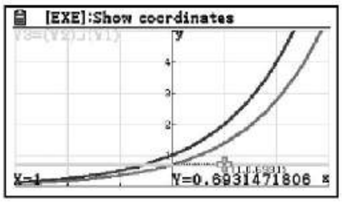
9.4 Het grondtal e

Bladzijde 38

57 **a**

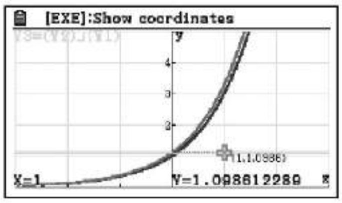


b



$c \approx 0{,}6931$

c



Dus ook hier is $\dfrac{y_2}{y_1}$ constant en wel ongeveer 1,0986.

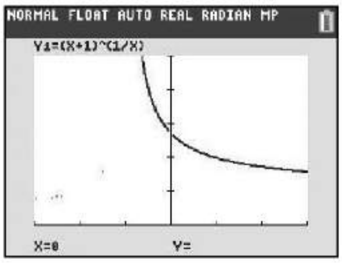
58 **a** $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^x \cdot 2^h - 2^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^x \cdot (2^h - 1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} \cdot 2^x$

b $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} \cdot 2^0 = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h}$

c $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} \cdot 2^x = f'(0) \cdot 2^x$

Bladzijde 39

59 **a**



b Voor $x = 0$ bestaat de exponent $\dfrac{1}{x}$ niet.

c

x	y_1
0,01	2,7048
0,001	2,7169
0,0001	2,7181
0,00001	2,7183

d Voor het getal $a \approx 2{,}718$ geldt $f(x) = a^x$ geeft $f'(x) = a^x$.

Bladzijde 40

60 **a** $2e^2 - e^2 = e^2$
b $4\sqrt{e} - \sqrt{e} = 3\sqrt{e}$
c $5e^2 \cdot 3e^3 = 15e^5$
d $\frac{12e^6}{4e^2} = 3e^4$
e $e^{5x} \cdot e^x = e^{6x}$
f $e^x \cdot e^2 = e^{x+2}$
g $5e^x - 3e^x = 2e^x$
h $e^x(e^2 + 1) = e^{x+2} + e^x$
i $e^x(e^x + 1) = e^{2x} + e^x$
j $(e^x + 1)^2 = (e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot 1 + 1 = e^{2x} + 2e^x + 1$
k $(e^{3x} + 3)^2 = (e^{3x})^2 + 2 \cdot e^{3x} \cdot 3 + 9 = e^{6x} + 6e^{3x} + 9$
l $\frac{6e^{2x} - e^x}{e^x} = 6e^x - 1$

Bladzijde 41

61 **a** $\left(2 + 3e^{\frac{1}{2}x}\right)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3e^{\frac{1}{2}x} + \left(3e^{\frac{1}{2}x}\right)^2 = 4 + 12e^{\frac{1}{2}x} + 9e^x$
b $(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$
c $\frac{e^{2x} - 4}{e^x - 2} = \frac{(e^x + 2)(e^x - 2)}{e^x - 2} = e^x + 2$

62 **a** $(2x + 4)e^x = 0$
$2x + 4 = 0$
$2x = -4$
$x = -2$
b $x^2 e^x = 3x e^x$
$x^2 = 3x$
$x = 0 \vee x = 3$
c $x^2 e^x = e^x$
$x^2 = 1$
$x = 1 \vee x = -1$
d $e^{3x} - e^x = 0$
$e^{3x} = e^x$
$3x = x$
$2x = 0$
$x = 0$
e $e^{4x} - 1 = 0$
$e^{4x} = 1$
$e^{4x} = e^0$
$4x = 0$
$x = 0$
f $e^x \cdot e^x = e^6$
$e^{2x} = e^6$
$2x = 6$
$x = 3$

63 **a** $e^x + e^x = 2e^6$
$2e^x = 2e^6$
$e^x = e^6$
$x = 6$
b $\frac{e^{5x}}{e^x} = e$
$e^{4x} = e^1$
$4x = 1$
$x = \frac{1}{4}$
c $2xe^x + e^x = 0$
$e^x(2x + 1) = 0$
$2x + 1 = 0$
$2x = -1$
$x = -\frac{1}{2}$
d $e^{x+2} - \sqrt{e} = 0$
$e^{x+2} = \sqrt{e}$
$e^{x+2} = e^{\frac{1}{2}}$
$x + 2 = \frac{1}{2}$
$x = -1\frac{1}{2}$
e $e^{2x} + e^x = 2$
$(e^x)^2 + e^x = 2$
Stel $e^x = u$.
$u^2 + u = 2$
$u^2 + u - 2 = 0$
$(u - 1)(u + 2) = 0$
$u = 1 \vee u = -2$
$e^x = 1 \vee e^x = -2$
$x = 0$ geen opl.
f $e^{6x} + 1 = 2e^{3x}$
$(e^{3x})^2 + 1 = 2e^{3x}$
Stel $e^{3x} = u$.
$u^2 + 1 = 2u$
$u^2 - 2u + 1 = 0$
$(u - 1)^2 = 0$
$u = 1$
$e^{3x} = 1$
$3x = 0$
$x = 0$

64 **a** $f(x) = x\,e^x$ geeft $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x$
b $g(x) = \frac{e^x}{x + 1}$ geeft $g'(x) = \frac{(x + 1) \cdot e^x - e^x \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{xe^x}{(x + 1)^2}$
c $h(x) = e^{2x+3}$ geeft $h'(x) = e^{2x+3} \cdot 2 = 2e^{2x+3}$

Bladzijde 44

65 **a** $f(x) = e^x + 2$ geeft $f'(x) = e^x$

b $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x} = 2e^x + x^{-1}$ geeft $f'(x) = 2e^x - x^{-2} = 2e^x - \frac{1}{x^2}$

c $f(x) = xe^x + 4$ geeft $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x$

d $f(x) = \frac{x}{e^x}$ geeft $f'(x) = \frac{e^x \cdot 1 - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{(1 - x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{1 - x}{e^x}$

e $f(x) = \frac{2e^x}{x - 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x - 1) \cdot 2e^x - 2e^x \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2xe^x - 2e^x - 2e^x}{(x - 1)^2} = \frac{(2x - 4)e^x}{(x - 1)^2}$

f $f(x) = (2x - 4)e^x$ geeft $f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x - 4) \cdot e^x = (2x - 2)e^x$

66 **a** $f(x) = e^{x^2 + x}$ geeft $f'(x) = (2x + 1)e^{x^2 + x}$

b $g(x) = x^2 + 2e^{3x}$ geeft $g'(x) = 2x + 2 \cdot 3e^{3x} = 2x + 6e^{3x}$

c $h(x) = xe^{x^2}$ geeft $h'(x) = 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = (2x^2 + 1)e^{x^2}$

d $j(x) = \frac{2e^{-x-1}}{x^2}$ geeft $j'(x) = \frac{x^2 \cdot 2 \cdot -e^{-x-1} - 2e^{-x-1} \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x^2e^{-x-1} - 4xe^{-x-1}}{x^4} = \frac{-2x(x + 2)e^{-x-1}}{x^4} = \frac{-2(x + 2)e^{-x-1}}{x^3}$

e $k(x) = 3xe^{2x-1}$ geeft $k'(x) = 3 \cdot e^{2x-1} + 3x \cdot 2e^{2x-1} = (6x + 3)e^{2x-1}$

f $l(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$ geeft $l'(x) = \frac{(e^{2x} + 1) \cdot 2e^{2x} - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{2e^{4x} + 2e^{2x} - 2e^{4x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

67 **a** $e + 3 \approx 5{,}718$

b $-\frac{1}{e^2} \approx -0{,}135$

c $e^3 \approx 20{,}086$

d $\frac{3e}{(e + 2)^2} \approx 0{,}366$

e $1\frac{1}{3}e^2 \approx 9{,}852$

f $\frac{e^2}{e - 3} \approx -26{,}229$

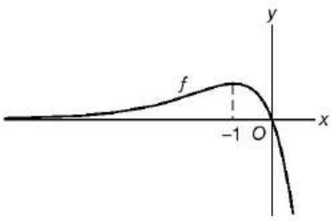
68 **a** $f(x) = -xe^x$ geeft $f'(x) = -1 \cdot e^x + -x \cdot e^x = (-x - 1)e^x$

$f'(x) = 0$ geeft $(-x - 1)e^x = 0$

$-x - 1 = 0$

$-x = 1$

$x = -1$



max. is $f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

b $f'(x) = (-x - 1)e^x$ geeft $f''(x) = -1 \cdot e^x + (-x - 1) \cdot e^x = (-x - 2)e^x$

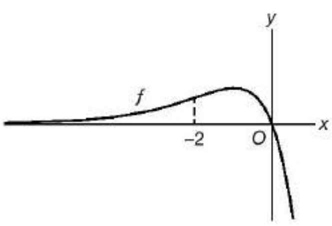
$f''(x) = 0$ geeft $(-x - 2)e^x = 0$

$-x - 2 = 0$

$-x = 2$

$x = -2$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = (2 - 1)e^{-2} = \frac{1}{e^2}$



$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{e^2}x + b \\ f(-2) = 2\,e^{-2} = \dfrac{2}{e^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{1}{e^2}\cdot -2 + b = \dfrac{2}{e^2} \\ \dfrac{-2}{e^2} + b = \dfrac{2}{e^2} \\ b = \dfrac{4}{e^2} \end{array}$$

Dus k: $y = \dfrac{1}{e^2}x + \dfrac{4}{e^2}$.

69 **a** $f(x) = 0$ geeft $(x^2 - 3)\,e^x = 0$

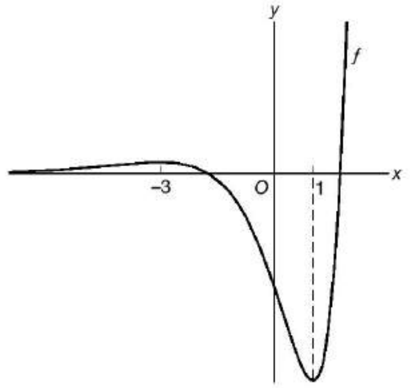
$$\begin{aligned} &x^2 - 3 = 0 \\ &x^2 = 3 \\ &x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

De nulpunten zijn $\sqrt{3}$ en $-\sqrt{3}$.

b $f(x) = (x^2 - 3)\,e^x$ geeft $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 3) \cdot e^x = (x^2 + 2x - 3)\,e^x$

$f'(x) = 0$ geeft $(x^2 + 2x - 3)\,e^x = 0$

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &(x - 1)(x + 3) = 0 \\ &x = 1 \vee x = -3 \end{aligned}$$



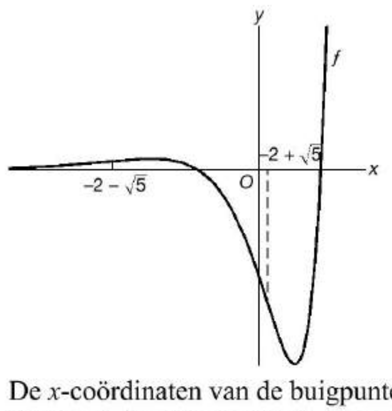
max. is $f(-3) = (9 - 3)\,e^{-3} = \dfrac{6}{e^3}$

min. is $f(1) = (1 - 3)\,e^1 = -2e$

c $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)\,e^x$ geeft $f''(x) = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x - 3) \cdot e^x = (x^2 + 4x - 1)\,e^x$

$f''(x) = 0$ geeft $(x^2 + 4x - 1)\,e^x = 0$

$$\begin{aligned} &x^2 + 4x - 1 = 0 \\ &D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 20 \\ &x = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2} \vee x = \frac{-4 + \sqrt{20}}{2} \\ &x = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} \\ &x = -2 - \sqrt{5} \vee x = -2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$



De x-coördinaten van de buigpunten zijn $-2 - \sqrt{5}$ en $2 + \sqrt{5}$.

d Voor $x < -3$ geldt $f'(x) > 0$, dus de grafiek van f is stijgend voor $x < -3$.

Omdat $f(x) > 0$ voor $x < -3$ moet er een asymptoot zijn voor $x \to -\infty$.

$f(-100) \approx 3{,}72 \cdot 10^{-40}$, dus het ligt voor de hand dat de lijn $y = 0$ de asymptoot is.

e De vergelijking $f(x) = p$ heeft precies twee oplossingen voor $-2e < p \leq 0 \vee p = \dfrac{6}{e^3}$.

70 **a** $f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(-1) = \mathrm{e}^{-2}$

$$\left.\begin{array}{l} y = \mathrm{e}^{-2}x + b \\ f(-1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}, \text{ dus } A\left(-1, \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathrm{e}^{-2} \cdot -1 + b = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} \\ -\mathrm{e}^{-2} + b = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} \\ b = 1\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} \end{array}$$

Dus k: $y = \mathrm{e}^{-2}x + 1\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}$.

$g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+3}} = \mathrm{e}^{-x-3}$ geeft $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x-3}$

Stel l: $y = ax + b$ met $a = g'(-1) = -\mathrm{e}^{1-3} = -\mathrm{e}^{-2}$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\mathrm{e}^{-2}x + b \\ g(-1) = \mathrm{e}^{1-3} = \mathrm{e}^{-2}, \text{ dus } B(-1, \mathrm{e}^{-2}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\mathrm{e}^{-2} \cdot -1 + b = \mathrm{e}^{-2} \\ \mathrm{e}^{-2} + b = \mathrm{e}^{-2} \\ b = 0 \end{array}$$

Dus l: $y = -\mathrm{e}^{-2}x$.

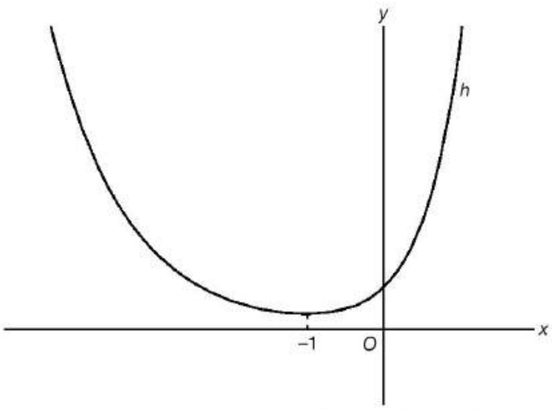
k en l snijden geeft $\mathrm{e}^{-2}x + 1\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} = -\mathrm{e}^{-2}x$

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{e}^{-2}x &= -1\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} \\ 2x &= -1\tfrac{1}{2} \\ x &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

b $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+3}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x-3}$ geeft $h'(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x-3}$

$h'(x) = 0$ geeft $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x-3} = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} &= \mathrm{e}^{-x-3} \\ 2x &= -x - 3 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$



min. is $h(-1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^2} + \dfrac{2}{2\mathrm{e}^2} = \dfrac{3}{2\mathrm{e}^2}$

Het bereik is dus $\mathrm{B}_h = \left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}^2}, \rightarrow\right\rangle$.

9.5 De natuurlijke logaritme

Bladzijde 46

71 **a** $2^x = \left(\mathrm{e}^{{}^{\mathrm{e}}\log(2)}\right)^x = \mathrm{e}^{{}^{\mathrm{e}}\log(2) \cdot x}$

b $\left[2^x\right]' = \left[\mathrm{e}^{{}^{\mathrm{e}}\log(2) \cdot x}\right]' = {}^{\mathrm{e}}\log(2) \cdot \mathrm{e}^{{}^{\mathrm{e}}\log(2) \cdot x} = {}^{\mathrm{e}}\log(2) \cdot 2^x$

Bladzijde 47

72 **a** $\ln(\mathrm{e}) = 1$

b $\ln(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}) = \ln\left(\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}\right) = 1\frac{1}{2}$

c $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-1}) = -1$

d $\ln(1) = 0$

e $3\ln\left(\mathrm{e} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{e}}\right) = 3\ln\left(\mathrm{e}^{1\frac{1}{3}}\right) = 3 \cdot 1\frac{1}{3} = 4$

f $\ln^2(\mathrm{e}^3) = 3^2 = 9$

g $\ln^3(\mathrm{e}^2) = 2^3 = 8$

h $\mathrm{e}^{\ln(7)} + \mathrm{e}^{2\ln(7)} = 7 + \mathrm{e}^{\ln(7^2)} = 7 + 7^2 = 56$

i $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(5)} = \mathrm{e}^{\ln\left(5^{\frac{1}{2}}\right)} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

j $\mathrm{e}^{\ln(10)} \cdot \mathrm{e}^{\ln(3)} = 10 \cdot 3 = 30$

73 **a** $e^{3x} = 12$
$3x = \ln(12)$
$x = \frac{1}{3}\ln(12)$
b $5e^{2x} = 60$
$e^{2x} = 12$
$2x = \ln(12)$
$x = \frac{1}{2}\ln(12)$
c $6 + e^{0,5x} = 10$
$e^{0,5x} = 4$
$0,5x = \ln(4)$
$x = 2\ln(4)$
d $\frac{3}{e^{2x}} = 10$
$10 \cdot e^{2x} = 3$
$e^{2x} = \frac{3}{10}$
$2x = \ln\left(\frac{3}{10}\right)$
$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{10}\right)$

74 **a** $2\ln(3) + \ln(4) = \ln(3^2) + \ln(4) = \ln(9 \cdot 4) = \ln(36)$
b $\ln(20) - 3\ln(2) = \ln(20) - \ln(2^3) = \ln(20) - \ln(8) = \ln\left(\frac{20}{8}\right) = \ln\left(2\frac{1}{2}\right)$
c $4 + \ln(3) = \ln(e^4) + \ln(3) = \ln(3e^4)$
d $1 + \ln(10) = \ln(e) + \ln(10) = \ln(10e)$
e $\frac{1}{2} + 2\ln(6) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) + \ln(6^2) = \ln\left(\sqrt{e}\right) + \ln(36) = \ln\left(36\sqrt{e}\right)$
f $e + \ln(2) = \ln(e^e) + \ln(2) = \ln(2e^e)$

75 **a** $\ln(x) = -1$
$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$
b $4\ln(x) = 2$
$\ln(x) = \frac{1}{2}$
$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$
c $\ln(3x) = 3$
$3x = e^3$
$x = \frac{1}{3}e^3$
d $\ln(-x + 2) = -2$
$-x + 2 = e^{-2}$
$-x = \frac{1}{e^2} - 2$
$x = -\frac{1}{e^2} + 2$
e $\ln^2(x) = \frac{1}{4}$
$\ln(x) = \frac{1}{2} \vee \ln(x) = -\frac{1}{2}$
$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \vee x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
f $\ln(x) = 1 + \ln(5)$
$\ln(x) = \ln(e) + \ln(5)$
$\ln(x) = \ln(5e)$
$x = 5e$

76 **a** $4e^{1-3x} = 20$
$e^{1-3x} = 5$
$1 - 3x = \ln(5)$
$-3x = -1 + \ln(5)$
$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln(5) \approx -0,203$
b $e^{x^2} = 100$
$x^2 = \ln(100)$
$x = \sqrt{\ln(100)} \vee x = -\sqrt{\ln(100)}$
$x \approx 2,146 \vee x \approx -2,146$

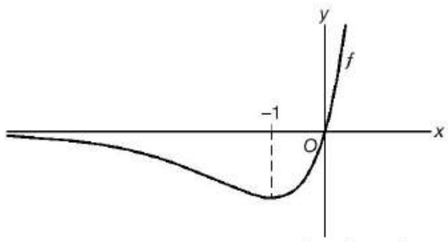
Bladzijde 48

77 **a** $3x\ln(x) = 2\ln(x)$
$\ln(x) = 0 \vee 3x = 2$
$x = 1 \vee x = \frac{2}{3}$
vold. vold.
b $\ln^2(x) - \ln(x) = 0$
$\ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$
$\ln(x) = 0 \vee \ln(x) = 1$
$x = 1 \vee x = e$
vold. vold.
c $x^2\ln(x + 1) = 4\ln(x + 1)$
$\ln(x + 1) = 0 \vee x^2 = 4$
$x + 1 = 1 \vee x = 2 \vee x = -2$
$x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$
vold. vold. vold. niet
d $\ln^2(x) - 2\ln(x) - 3 = 0$
Stel $\ln(x) = u$.
$u^2 - 2u - 3 = 0$
$(u + 1)(u - 3) = 0$
$u = -1 \vee u = 3$
$\ln(x) = -1 \vee \ln(x) = 3$
$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \vee x = e^3$
vold. vold.
e $\ln(x + 3) - \ln(x - 1) = \ln(2)$
$\ln\left(\frac{x + 3}{x - 1}\right) = \ln(2)$
$\frac{x + 3}{x - 1} = 2$
$2x - 2 = x + 3$
$x = 5$
vold.

f $2\ln(x) = \ln(2) + \ln(x + 4)$
$\ln(x^2) = \ln(2(x + 4))$
$x^2 = 2x + 8$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x + 2)(x - 4) = 0$
$x = -2 \ \vee \ x = 4$
vold. niet vold.

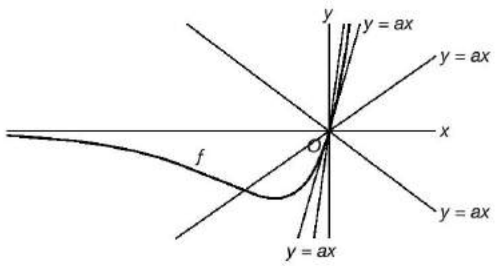
78 **a** $f(x) = 3^{4x-2}$ geeft $f'(x) = 3^{4x-2} \cdot \ln(3) \cdot 4 = 4 \cdot 3^{4x-2} \cdot \ln(3)$
b $g(x) = (2x - 1) \cdot 2^x$ geeft $g'(x) = 2 \cdot 2^x + (2x - 1) \cdot 2^x \cdot \ln(2) = (2 + (2x - 1)\ln(2))2^x$
c $h(x) = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$ geeft $h'(x) = \dfrac{(2^x - 1) \cdot 2^x \cdot \ln(2) - (2^x + 1) \cdot 2^x \cdot \ln(2)}{(2^x - 1)^2} = \dfrac{(2^x - 1 - 2^x - 1) \cdot 2^x \cdot \ln(2)}{(2^x - 1)^2} = \dfrac{-2 \cdot 2^x \cdot \ln(2)}{(2^x - 1)^2}$

79 **a** $f(x) = 2^{2x} - 2^x$ geeft $f'(x) = 2^{2x} \cdot \ln(2) \cdot 2 - 2^x \cdot \ln(2) = (2^{2x} \cdot 2 - 2^x)\ln(2) = (2^{2x+1} - 2^x)\ln(2)$
$f'(x) = 0$ geeft $(2^{2x+1} - 2^x)\ln(2) = 0$
$2^{2x+1} - 2^x = 0$
$2^{2x+1} = 2^x$
$2x + 1 = x$
$x = -1$



min. is $f(-1) = 2^{-2} - 2^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
Dus $B_f = \left[-\frac{1}{4}, \rightarrow\right\rangle$.

b $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2^{2x} - 2^x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left((2^x)^2 - 2^x\right) = 0^2 - 0 = 0$
Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.



$f(x) = ax$ heeft twee oplossingen als $0 < a < f'(0) \vee a > f'(0)$.
$f'(0) = (2^1 - 2^0)\ln(2) = (2 - 1)\ln(2) = \ln(2)$
Dus $f(x) = ax$ heeft twee oplossingen als $0 < a < \ln(2) \vee a > \ln(2)$.

Bladzijde 49

80 **a** $e^{\ln(x)} = x$ geeft $[e^{\ln(x)}]' = x'$
$e^{\ln(x)} \cdot [\ln(x)]' = 1$
b $e^{\ln(x)} \cdot [\ln(x)]' = 1$
$x \cdot [\ln(x)]' = 1$
$[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$
c $g(x) = {}^2\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} = \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln(2)}$

Bladzijde 50

81 a $[\ln(6x)]' = \frac{1}{6x} \cdot 6 = \frac{1}{x}$

b $f(x) = \ln(2x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \ln\left(x\sqrt{2}\right)$ geeft $g'(x) = \frac{1}{x}$

$h(x) = {}^2\log(3x)$ geeft $h'(x) = \frac{1}{x\ln(2)}$

c $[\ln(x^6)]' = \frac{1}{x^6} \cdot 6x^5 = \frac{6x^5}{x^6} = \frac{6}{x}$

d $f(x) = \ln(x^2)$ geeft $f'(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) = \ln(x^{-3})$ geeft $g'(x) = \frac{-3}{x}$

$h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1})$ geeft $h'(x) = \frac{-1}{x}$

82 a $f(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x}$ geeft $f'(x) = \frac{x \cdot -\frac{1}{x} - (1 - \ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \frac{-1 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x) - 2}{x^2}$

b $f(x) = x\ln(x)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

c $f(x) = {}^2\log(4x - 1)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{(4x-1)\ln(2)} \cdot 4 = \frac{4}{(4x-1)\ln(2)}$

d $f(x) = \frac{\ln(3x)}{x}$ geeft $f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln(3x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(3x)}{x^2}$

e $f(x) = x\ln(x^3)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \ln(x^3) + x \cdot \frac{3}{x} = \ln(x^3) + 3$

f $f(x) = \ln(x^2 + x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$

83 a $f(x) = \ln(2^x) = x\ln(2)$ geeft $f'(x) = \ln(2)$

b $f(x) = {}^2\log(x^2 + 1)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\ln(2)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(2)}$

c $f(x) = x\ln^2(x)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \ln^2(x) + 2\ln(x)$

d $f(x) = x^2 \cdot {}^3\log(4x)$ geeft $f'(x) = 2x \cdot {}^3\log(4x) + x^2 \cdot \frac{1}{x\ln(3)} = 2x \cdot {}^3\log(4x) + \frac{x}{\ln(3)}$

e $f(x) = \log^2(4x)$ geeft $f'(x) = 2 \cdot \log(4x) \cdot \frac{1}{x\ln(10)} = \frac{2\log(4x)}{x\ln(10)}$

f $f(x) = \ln^2(4x^2 + 1)$ geeft $f'(x) = 2\ln(4x^2 + 1) \cdot \frac{1}{4x^2 + 1} \cdot 8x = \frac{16x\ln(4x^2 + 1)}{4x^2 + 1}$

84 a $x^n = \left(e^{\ln(x)}\right)^n = e^{n\ln(x)}$

b $[e^{n\ln(x)}]' = e^{n\ln(x)} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = e^{n\ln(x)} \cdot \frac{n}{x}$

c $[x^n]' = [e^{n\ln(x)}]' = e^{n\ln(x)} \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = n \cdot \frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$

Er is geen gebruik gemaakt van enige beperking van n, dus de regel geldt ook voor elke niet-gehele n uit $\mathbb{R}$.

85 **a** $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{\ln(x) \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1}{\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{-1-1}{(-1)^2} = -2.$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\frac{1}{e}}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{\frac{1}{e}}{-1} = -\frac{1}{e}, \text{ dus } A\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot \frac{1}{e} + b = -\frac{1}{e} \\ b = \frac{1}{e} \end{array}$$

Dus k: $y = -2x + \frac{1}{e}$.

b $f'(x) = -6$ geeft $\frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = -6$

$\ln(x) - 1 = -6\ln^2(x)$
Stel $\ln(x) = u$.
$u - 1 = -6u^2$
$6u^2 + u - 1 = 0$
$D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot -1 = 25$
$u = \frac{-1-5}{12} = -\frac{1}{2} \vee u = \frac{-1+5}{12} = \frac{1}{3}$
$\ln(x) = -\frac{1}{2} \vee \ln(x) = \frac{1}{3}$
$x = e^{-\frac{1}{2}} \vee x = e^{\frac{1}{3}}$
vold. vold.

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2e^{-\frac{1}{2}}$, dus raakpunt $\left(e^{-\frac{1}{2}}, -2e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

$f\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3e^{\frac{1}{3}}$, dus raakpunt $\left(e^{\frac{1}{3}}, 3e^{\frac{1}{3}}\right) = \left(\sqrt[3]{e}, 3 \cdot \sqrt[3]{e}\right)$.

9

86 $f(x) = \frac{10\ln(x)}{x}$ geeft $f'(x) = \frac{x \cdot 10 \cdot \frac{1}{x} - 10\ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{10 - 10\ln(x)}{x^2}$

$f'(x) = \frac{10 - 10\ln(x)}{x^2}$ geeft

$f''(x) = \frac{x^2 \cdot -10 \cdot \frac{1}{x} - (10 - 10\ln(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-10x - 20x + 20x\ln(x)}{x^4} = \frac{-30 + 20\ln(x)}{x^3}$

$f''(x) = 0$ geeft $-30 + 20\ln(x) = 0$
$20\ln(x) = 30$
$\ln(x) = 1\frac{1}{2}$
$x = e^{1\frac{1}{2}}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'\left(e^{1\frac{1}{2}}\right) = \frac{10 - 10\ln\left(e^{1\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{1\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{10 - 10 \cdot 1\frac{1}{2}}{e^3} = -\frac{5}{e^3}.$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{5}{e^3}x + b \\ f\left(e^{1\frac{1}{2}}\right) = \frac{10\ln\left(e^{1\frac{1}{2}}\right)}{e^{1\frac{1}{2}}} = \frac{10 \cdot 1\frac{1}{2}}{e^{1\frac{1}{2}}} = \frac{15}{e^{1\frac{1}{2}}} \end{array}\right\} -\frac{5}{e^3} \cdot e^{1\frac{1}{2}} + b = \frac{15}{e^{1\frac{1}{2}}}$$

$-\frac{5}{e^{1\frac{1}{2}}} + b = \frac{15}{e^{1\frac{1}{2}}}$

$b = \frac{20}{e^{1\frac{1}{2}}} = \frac{20}{e\sqrt{e}}$

Dus k: $y = -\frac{5}{e^3}x + \frac{20}{e\sqrt{e}}$.

Diagnostische toets

Bladzijde 52

1 **a** $^3\log\left(3\sqrt{3}\right) = {}^3\log\left(3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = {}^3\log\left(3^{1\frac{1}{2}}\right) = 1\frac{1}{2}$

b $^2\log\left(\frac{1}{4}\sqrt{8}\right) = {}^2\log\left(\frac{1}{2^2} \cdot \sqrt{2^3}\right) = {}^2\log\left(2^{-2} \cdot 2^{1\frac{1}{2}}\right) = {}^2\log\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$

c $^2\log\left(\frac{1}{16}\sqrt[3]{2}\right) = {}^2\log\left(2^{-4} \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) = {}^2\log\left(2^{-3\frac{2}{3}}\right) = -3\frac{2}{3}$

2 **a**
$$\begin{aligned} &^4\log(2x-3) = 2 \\ &2x - 3 = 4^2 \\ &2x - 3 = 16 \\ &2x = 19 \\ &x = 9\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} &^{\frac{1}{2}}\log(x-3) = -4 \\ &x - 3 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-4} \\ &x - 3 = (2^{-1})^{-4} \\ &x - 3 = 2^4 \\ &x - 3 = 16 \\ &x = 19 \end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned} &5 + 3 \cdot {}^2\log(x) = 20 \\ &3 \cdot {}^2\log(x) = 15 \\ &^2\log(x) = 5 \\ &x = 2^5 \\ &x = 32 \end{aligned}$$

3 **a**
$$\begin{aligned} &7^{x-3} = 20 \\ &x - 3 = {}^7\log(20) \\ &x = 3 + {}^7\log(20) \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} &6 \cdot 2^x + 5 = 23 \\ &6 \cdot 2^x = 18 \\ &2^x = 3 \\ &x = {}^2\log(3) \end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned} &10 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2x-1} = 600 \\ &\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2x-1} = 60 \\ &2x - 1 = {}^{\frac{1}{2}}\log(60) \\ &2x = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(60) \\ &x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(60) \end{aligned}$$

4 **a**
$$\begin{aligned} &K = 60 + 10 \cdot 2^{2a+1} \\ &60 + 10 \cdot 2^{2a+1} = K \\ &10 \cdot 2^{2a+1} = K - 60 \\ &2^{2a+1} = \tfrac{1}{10}K - 6 \\ &2a + 1 = {}^2\log\left(\tfrac{1}{10}K - 6\right) \\ &2a = -1 + {}^2\log\left(\tfrac{1}{10}K - 6\right) \\ &a = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot {}^2\log\left(\tfrac{1}{10}K - 6\right) \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} &W = 40 - 2 \cdot 10^{q - \frac{1}{5}} \\ &2 \cdot 10^{q - \frac{1}{5}} = 40 - W \\ &10^{q - \frac{1}{5}} = 20 - \tfrac{1}{2}W \\ &q - \tfrac{1}{5} = \log\left(20 - \tfrac{1}{2}W\right) \\ &q = \tfrac{1}{5} + \log\left(20 - \tfrac{1}{2}W\right) \end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned} &A = 5 + 2\tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{p+2} \\ &5 + 2\tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{p+2} = A \\ &2\tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{p+2} = A - 5 \\ &\left(\tfrac{1}{2}\right)^{p+2} = \tfrac{2}{5}A - 2 \\ &p + 2 = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\tfrac{2}{5}A - 2\right) \\ &p = -2 + {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\tfrac{2}{5}A - 2\right) \end{aligned}$$

5 **a** $^3\log(5) + 2 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(5) + {}^3\log(2^2) = {}^3\log(5 \cdot 2^2) = {}^3\log(20)$

b $3 - {}^2\log(5) = {}^2\log(2^3) - {}^2\log(5) = {}^2\log\left(\frac{8}{5}\right) = {}^2\log\left(1\frac{3}{5}\right)$

c $^2\log(8000) + 3 \cdot {}^2\log\left(\frac{1}{5}\right) = {}^2\log\left(8000\right) + {}^2\log\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right) = {}^2\log\left(8000\right) + {}^2\log\left(\frac{1}{125}\right) = {}^2\log\left(8000 \cdot \frac{1}{125}\right) = {}^2\log(64) = 6$

6 **a**
$$\begin{aligned} &2 \cdot {}^2\log(x-1) = 1 + {}^2\log(18) \\ &^2\log(x-1)^2 = {}^2\log(2) + {}^2\log(18) \\ &^2\log(x-1)^2 = {}^2\log(2 \cdot 18) \\ &(x-1)^2 = 36 \\ &x - 1 = 6 \vee x - 1 = -6 \\ &x = 7 \vee x = -5 \end{aligned}$$
vold. vold. niet

b
$$\begin{aligned} &^3\log(2x-1) + {}^{\frac{1}{3}}\log(x+2) = 0 \\ &^3\log(2x-1) - {}^3\log(x+2) = 0 \\ &^3\log(2x-1) = {}^3\log(x+2) \\ &2x - 1 = x + 2 \\ &x = 3 \end{aligned}$$
vold.

c
$$\begin{aligned} &^2\log(2x-1) = {}^4\log(x) \\ &^2\log(2x-1) = \frac{^2\log(x)}{^2\log(4)} \\ &^2\log(2x-1) = \frac{^2\log(x)}{2} \\ &2 \cdot {}^2\log(2x-1) = {}^2\log(x) \\ &^2\log(2x-1)^2 = {}^2\log(x) \\ &4x^2 - 4x + 1 = x \\ &4x^2 - 5x + 1 = 0 \\ &D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9 \\ &x = \frac{5-3}{8} = \tfrac{1}{4} \vee x = \frac{5+3}{8} = 1 \end{aligned}$$
vold. niet vold.

d
$$\begin{aligned} &\log^2(x) = \log(x) + 2 \end{aligned}$$
Stel $\log(x) = u$.
$$\begin{aligned} &u^2 = u + 2 \\ &u^2 - u - 2 = 0 \\ &(u+1)(u-2) = 0 \\ &u = -1 \vee u = 2 \\ &\log(x) = -1 \vee \log(x) = 2 \\ &x = \tfrac{1}{10} \vee x = 100 \end{aligned}$$
vold. vold.

e
$$\begin{aligned} &^2\log(x) = 3 - {}^2\log(x+2) \\ &^2\log(x) + {}^2\log(x+2) = {}^2\log(2^3) \\ &^2\log(x(x+2)) = {}^2\log(8) \\ &x^2 + 2x = 8 \\ &x^2 + 2x - 8 = 0 \\ &(x-2)(x+4) = 0 \\ &x = 2 \vee x = -4 \end{aligned}$$
vold. vold. niet

f
$$^2\log^2(x) + 12 = 7 \cdot {}^2\log(x)$$
Stel $^2\log(x) = u$.
$$\begin{aligned} &u^2 + 12 = 7u \\ &u^2 - 7u + 12 = 0 \\ &(u-3)(u-4) = 0 \\ &u = 3 \vee u = 4 \\ &^2\log(x) = 3 \vee {}^2\log(x) = 4 \\ &x = 8 \vee x = 16 \end{aligned}$$
vold. vold.

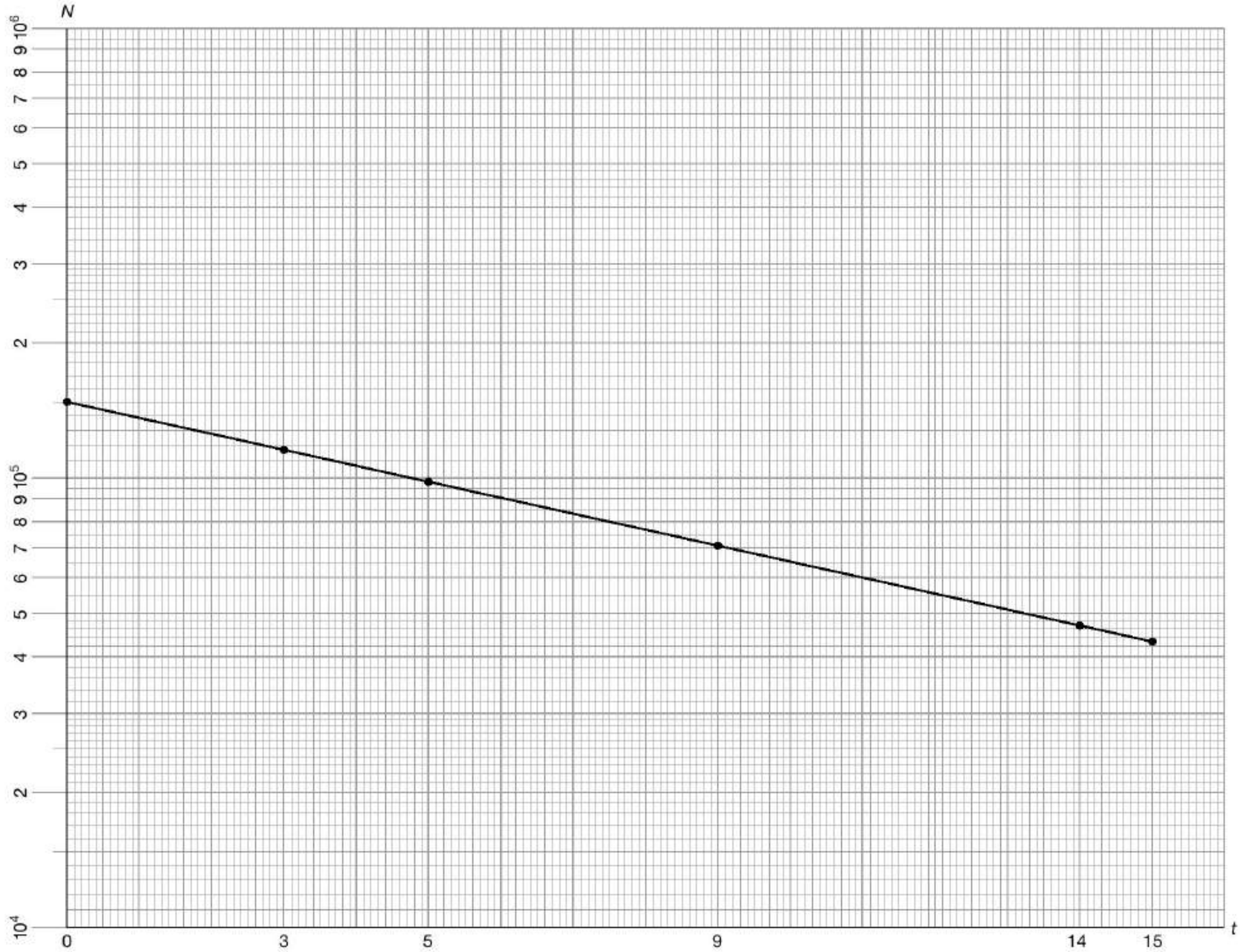
g $3^x + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 5$
$3^x + 6 \cdot \dfrac{1}{3^x} = 5$
Stel $3^x = u$.
$u + 6 \cdot \dfrac{1}{u} = 5$
$u^2 + 6 = 5u$
$u^2 - 5u + 6 = 0$
$(u-2)(u-3) = 0$
$u = 2 \vee u = 3$
$3^x = 2 \vee 3^x = 3$
$x = {}^3\log(2) \vee x = 1$

h $9^x = 3^x + 12$
$(3^2)^x = 3^x + 12$
$(3^x)^2 = 3^x + 12$
Stel $3^x = u$.
$u^2 = u + 12$
$u^2 - u - 12 = 0$
$(u+3)(u-4) = 0$
$u = -3 \vee u = 4$
$3^x = -3 \vee 3^x = 4$
geen opl. $x = {}^3\log(4)$

7 **a** $g_{\text{maand}} = 1{,}002$
$1{,}002^T = 2$
$T = {}^{1{,}002}\log(2) = 346{,}92...$
De verdubbelingstijd is $\dfrac{346{,}92...}{12} \approx 29$ jaar.

b $g_{\text{week}} = 0{,}8$
$0{,}8^T = \frac{1}{2}$
$T = {}^{0{,}8}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}106...$
De halveringstijd is $3{,}106... \cdot 7 \approx 22$ dagen.

8 **a**



b Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.
Lijn door (0, 15 000) en (15, 4300) dus
$g_{15\text{jaar}} = \dfrac{4300}{15\,000} = 0{,}286...$ en $g_{\text{jaar}} = 0{,}286...^{\frac{1}{15}} = 0{,}920...$
$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 0{,}920...^t \\ t = 0 \text{ en } N = 15\,000 \end{array}\right\} b = 15\,000$
Dus $N = 15\,000 \cdot 0{,}920^t$.

Bladzijde 53

9 a $\dfrac{3e^3 - e^3}{e^2} = \dfrac{2e^3}{e^2} = 2e$

b $\dfrac{e^{3x} - e^x}{e^x} = e^{2x} - 1$

c $(e^{3x} - 5)^2 = (e^{3x})^2 - 2 \cdot e^{3x} \cdot 5 + 25 = e^{6x} - 10e^{3x} + 25$

10 a $3xe^x - e^x = 0$
$(3x - 1)e^x = 0$
$3x = 1$
$x = \frac{1}{3}$

b $e^{2x-1} - \sqrt[3]{e^2} = 0$
$e^{2x-1} = e^{\frac{2}{3}}$
$2x - 1 = \frac{2}{3}$
$2x = 1\frac{2}{3}$
$x = \frac{5}{6}$

c $e^{2x} + 2e^x = 3$
$(e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0$
Stel $e^x = u$.
$u^2 + 2u - 3 = 0$
$(u - 1)(u + 3) = 0$
$u = 1 \vee u = -3$
$e^x = 1 \vee e^x = -3$
$x = 0$ geen opl.

11 a $f(x) = 2e^x - 3x^2$ geeft $f'(x) = 2e^x - 6x$

b $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$ geeft $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot 2x - (x^2+1) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{(2x - x^2 - 1)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$

c $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ geeft $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 + 1) \cdot e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x$

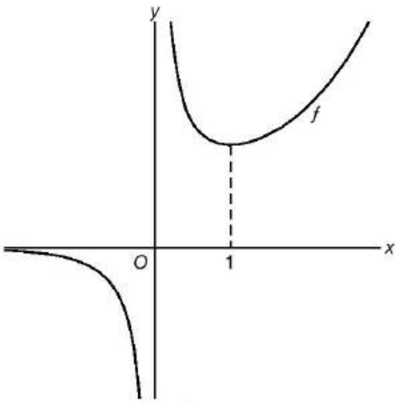
d $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2+1) \cdot e^x - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2 - 2x + 1)e^x}{(x^2+1)^2}$

e $f(x) = x^2 \cdot e^{2x-1}$ geeft $f'(x) = 2x \cdot e^{2x-1} + x^2 \cdot e^{2x-1} \cdot 2 = (2x^2 + 2x)e^{2x-1}$

f $f(x) = e^{x^2+9}$ geeft $f'(x) = e^{x^2+9} \cdot 2x = 2xe^{x^2+9}$

12 a $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ geeft $f'(x) = \dfrac{x \cdot e^x - e^x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

$f'(0)$ geeft $(x - 1)e^x = 0$
$x - 1 = 0$
$x = 1$



min. is $f(1) = \dfrac{e^1}{1} = e$

b Stel l: $y = ax + b$.

$a = f'(2) = \dfrac{(2-1)e^2}{2^2} = \frac{1}{4}e^2$

$y = \frac{1}{4}e^2x + b$
$f(2) = \dfrac{e^2}{2} = \frac{1}{2}e^2$, dus $A\left(2, \frac{1}{2}e^2\right)$

$\frac{1}{4}e^2 \cdot 2 + b = \frac{1}{2}e^2$
$\frac{1}{2}e^2 + b = \frac{1}{2}e^2$
$b = 0$

Dus l: $y = \frac{1}{4}e^2x$.

13 a $4 + \ln(3) = \ln(e^4) + \ln(3) = \ln(3e^4)$

b $\ln(10) - 4\ln(2) = \ln(10) - (\ln 2^4) = \ln(10) - \ln(16) = \ln\left(\frac{10}{16}\right) = \ln\left(\frac{5}{8}\right)$

14 **a** $2e^{5x} = 16$
$e^{5x} = 8$
$5x = \ln(8)$
$x = \frac{1}{5}\ln(8)$

b $\ln^2(5x) = 16$
$\ln(5x) = 4 \vee \ln(5x) = -4$
$5x = e^4 \vee 5x = e^{-4}$
$x = \frac{1}{5}e^4 \vee x = \frac{1}{5}e^{-4} = \dfrac{1}{5e^4}$
vold. vold.

c $2\ln^2(x) - \ln(x) = 0$
Stel $\ln(x) = u$.
$2u^2 - u = 0$
$u(2u - 1) = 0$
$u = 0 \vee 2u = 1$
$u = 0 \vee u = \frac{1}{2}$
$\ln(x) = 0 \vee \ln(x) = \frac{1}{2}$
$x = e^0 = 1 \vee x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$
vold. vold.

d $\ln(9x + 1) - \ln(x + 2) = \ln(4)$
$\ln(9x + 1) = \ln(x + 2) + \ln(4)$
$\ln(9x + 1) = \ln(4(x + 2))$
$\ln(9x + 1) = \ln(4x + 8)$
$9x + 1 = 4x + 8$
$5x = 7$
$x = 1\frac{2}{5}$
vold.

15 **a** $f(x) = 2^{3x-4}$ geeft $f'(x) = 2^{3x-4} \cdot \ln(2) \cdot 3 = 3 \cdot 2^{3x-4} \cdot \ln(2)$

b $f(x) = x \cdot 3^x$ geeft $f'(x) = 1 \cdot 3^x + x \cdot 3^x \cdot \ln(3) = (1 + x\ln(3))3^x$

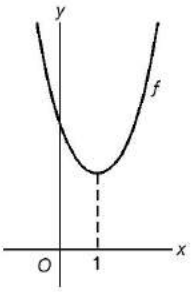
c $f(x) = \ln\left(x \cdot \sqrt[3]{x}\right) = \ln\left(x \cdot x^{\frac{1}{3}}\right) = \ln\left(x^{1\frac{1}{3}}\right)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1\frac{1}{3}}{x} = \dfrac{4}{3x}$

d $f(x) = {}^2\log(4x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(2)}$

e $f(x) = {}^3\log(5x - 6)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{(5x - 6)\ln(3)} \cdot 5 = \dfrac{5}{(5x - 6)\ln(3)}$

f $f(x) = \ln(3x^2 + 3)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 3} \cdot 6x = \dfrac{6x}{3x^2 + 3} = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

16 $f(x) = 3^{x-1} + 3^{-x+1}$ geeft $f'(x) = 3^{x-1} \cdot \ln(3) + -1 \cdot 3^{-x+1} \cdot \ln(3) = 3^{x-1} \cdot \ln(3) - 3^{-x+1} \cdot \ln(3)$
$f'(x) = 0$ geeft $3^{x-1} \cdot \ln(3) - 3^{-x+1} \cdot \ln(3) = 0$
$3^{x-1} \cdot \ln(3) = 3^{-x+1} \cdot \ln(3)$
$3^{x-1} = 3^{-x+1}$
$x - 1 = -x + 1$
$2x = 2$
$x = 1$



$f(1) = 3^0 + 3^0 = 1 + 1 = 2$
Dus $B_f = [2, \rightarrow\rangle$.

17 **a** $f(x) = 0$ geeft $\ln(x) = 0$
$x = e^0 = 1$
Dus het snijpunt met de x-as is $(1, 0)$.

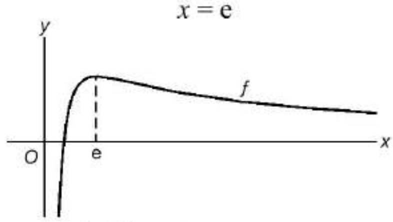
$f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ geeft $f'(x) = \dfrac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = \dfrac{1 - \ln(1)}{1} = 1$.

$\left.\begin{array}{l} y = x + b \\ \text{door } (1, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 + b = 0 \\ b = -1 \end{array}$

Dus k: $y = x - 1$.

b $f'(x) = 0$ geeft $1 - \ln(x) = 0$
$\ln(x) = 1$
$x = e$



$f(e) = \dfrac{\ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e}$

Dus $B_f = \left\langle \leftarrow, \dfrac{1}{e} \right]$.

10 Meetkunde met vectoren

Voorkennis Lijnen en afstanden

Bladzijde 56

1 **a** $y = 0$ geeft $3x = 24$, dus $x = 8$.
Het snijpunt met de x-as is $(8, 0)$.
$x = 0$ geeft $4y = 24$, dus $y = 6$.
Het snijpunt met de y-as is $(0, 6)$.

b $3x + 4y = 24$
$4y = -3x + 24$
$y = -\frac{3}{4}x + 6$
Dus $\text{rc}_l = -\frac{3}{4}$.

2 **a** $\frac{4}{4} = \frac{-3}{-3}$, dus k en l zijn evenwijdig.

b m is evenwijdig met k en l als $a = 4$ en $b = -3$.
$\left.\begin{array}{l} m\text{: } 4x - 3y = c \\ \text{door } (6, 5) \end{array}\right\} c = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 24 - 15 = 9$

3 **a** $\left.\begin{array}{l} m\text{: } 2x + 5y = c \\ \text{door } (3, 2) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 6 + 10 = 16$
Dus m: $2x + 5y = 16$.

b n is evenwijdig met l dus n is van de vorm n: $3x + 5y = c$.
$\left.\begin{array}{l} n\text{: } 3x + 5y = c \\ \text{door } (0, 8) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 8 = 40$
$3x + 5y = 40$
$5y = -3x + 40$
$y = -\frac{3}{5}x + 8$
Dus n: $y = -\frac{3}{5}x + 8$.

c $y = 0$ geeft $3x = 12$ ofwel $x = 4$, dus l snijdt de x-as in het punt $(4, 0)$.
$\text{rc}_p = \text{rc}_k$, dus p: $2x + 5y = c$.
$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = c \\ \text{door } (4, 0) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 8$
Dus p: $2x + 5y = 8$.

Bladzijde 57

4 **a** $\left\{\begin{array}{l} x = 3t + 1 \\ y = 7t - 2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 7 \\ 3 \end{array}\right|$ geeft $\left\{\begin{array}{l} 7x = 21t + 7 \\ 3y = 21t - 6 \end{array}\right.$ $-$
$\overline{7x - 3y = 13}$
Dus k: $7x - 3y = 13$.

b Substitutie van $x = -2t + p$ en $y = t + 4$ in $x + 2y = 5$ geeft $-2t + p + 2(t + 4) = 5$
$-2t + p + 2t + 8 = 5$
$p = -3$
Dus $p = -3$.

c Substitutie van $(3, 4)$ in $\left\{\begin{array}{l} x = 3t + q \\ y = -2t + 2q \end{array}\right.$ geeft $\left\{\begin{array}{l} 3t + q = 3 \\ -2t + 2q = 4 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array}\right|$ geeft $\left\{\begin{array}{l} 6t + 2q = 6 \\ -6t + 6q = 12 \end{array}\right.$ $+$
$\overline{8q = 18}$
$q = 2\frac{1}{4}$
Dus $q = 2\frac{1}{4}$.

d Substitutie van $x = t - 2$ in $4x + 3y = c$ geeft $4(t - 2) + 3y = c$
$4t - 8 + 3y = c$
$3y = -4t + 8 + c$
$y = -1\frac{1}{3}t + 2\frac{2}{3} + \frac{1}{3}c$

Dit moet gelijk zijn aan $y = at + 1$ dus $a = -1\frac{1}{3}$ en $2\frac{2}{3} + \frac{1}{3}c = 1$
$8 + c = 3$
$c = -5$

Dus $a = -1\frac{1}{3}$ en $c = -5$.

Bladzijde 58

5 **a** De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} m: x - 2y = c \\ A(3, 5) \end{array}\right\} c = 3 - 2 \cdot 5 = -7$

Dus $m: x - 2y = -7$.

k snijden met m geeft het punt C.

$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 2y = -7 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ x - 2y = -7 \end{cases}$ +

$5x = 5$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x + y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + y = 6 \\ 2 + y = 6 \\ y = 4 \end{array}$

Dus $C(1, 4)$.

$d(A, k) = d(A, C) = \sqrt{(1-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

b De lijn n gaat door B en staat loodrecht op l, dus $\text{rc}_n = -3$.

$\left.\begin{array}{l} n: y = -3x + b \\ B(4, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 4 + b = -1 \\ -12 + b = -1 \\ b = 11 \end{array}$

Dus $n: y = -3x + 11$.

l snijden met n geeft het punt D.

$\frac{1}{3}x + 1 = -3x + 11$

$3\frac{1}{3}x = 10$

$x = 3$

$x = 3$ geeft $y = -3 \cdot 3 + 11 = 2$

Dus $D(3, 2)$.

$d(B, l) = d(B, D) = \sqrt{(3-4)^2 + (2--1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

6 De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} m: 2x - y = c \\ A(3, 3) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

Dus $m: 2x - y = 3$.

k snijden met m geeft het punt B.

$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ +

$5x = 10$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + 2y = 4 \\ 2y = 2 \\ y = 1 \end{array}$

Dus $B(2, 1)$.

$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(2-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

De lijn n gaat door A en staat loodrecht op l.

$\left.\begin{array}{l} n: x + y = c \\ A(3, 3) \end{array}\right\} c = 3 + 3 = 6$

Dus $n: x + y = 6$.

l snijden met n geeft het punt C.

$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$ +

$2x = 9$

$\left.\begin{array}{l} x = 4\frac{1}{2} \\ x + y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4\frac{1}{2} + y = 6 \\ y = 1\frac{1}{2} \end{array}$

Dus $C\left(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$.

$d(A, l) = d(A, C) = \sqrt{\left(4\frac{1}{2} - 3\right)^2 + \left(1\frac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{4\frac{1}{2}}$

$\sqrt{5} > \sqrt{4\frac{1}{2}}$, dus A ligt niet dichter bij k dan bij l.

10

10.1 Vectoren en lijnen

Bladzijde 59

1 $OA^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29$

$OA = \sqrt{29}$

$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$AB = 5$

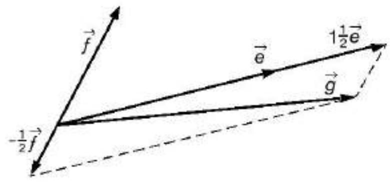
Dus de lengte van de wandeling is $5 + \sqrt{29}$.

Bladzijde 62

2 **a** $|\vec{a}| = \left|0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = 0{,}2 \cdot \left|\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = 0{,}2 \cdot \sqrt{12^2 + (-9)^2} = 0{,}2 \cdot \sqrt{144 + 81} = 0{,}2 \cdot \sqrt{225} = 0{,}2 \cdot 15 = 3$

b $2\vec{b} - 3\vec{c} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix}$

c



3 **a** $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

b $|\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3 + 6} = \sqrt{9} = 3$

c $|\vec{c}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{0 + 25} = \sqrt{25} = 5$

d $|\vec{d}| = \left|\begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-0{,}3)^2 + (0{,}4)^2} = \sqrt{0{,}09 + 0{,}16} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

e $|\vec{e}| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} = 2 \cdot \sqrt{1 + 9} = 2\sqrt{10}$

f $|\vec{f}| = 0{,}6 \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = 0{,}6 \cdot \sqrt{6^2 + 8^2} = 0{,}6 \cdot \sqrt{36 + 64} = 0{,}6 \cdot \sqrt{100} = 6$

Bladzijde 63

4 **a** $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix}$

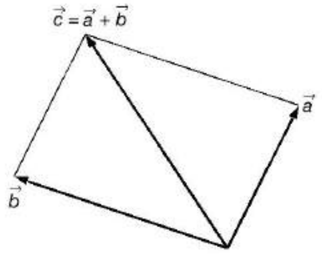
b $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

c $\vec{e} = 4\vec{a} - 3\vec{b} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$

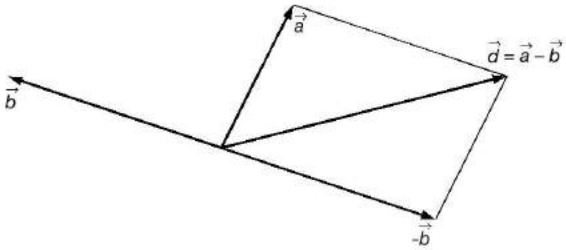
d $\vec{f} = 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix}$

10

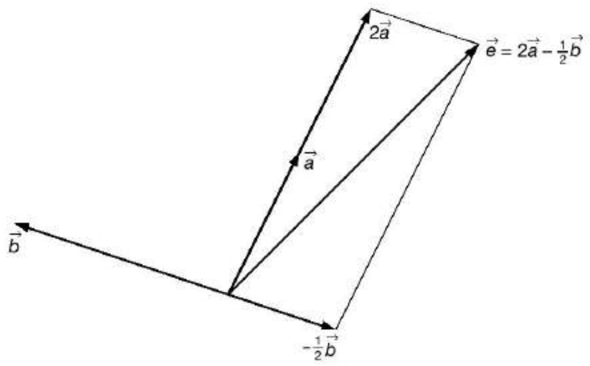
5 **a**



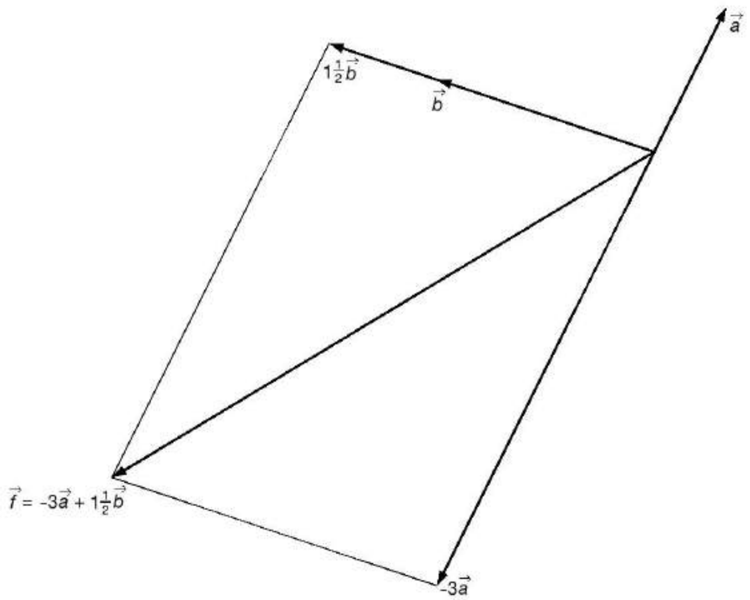
b



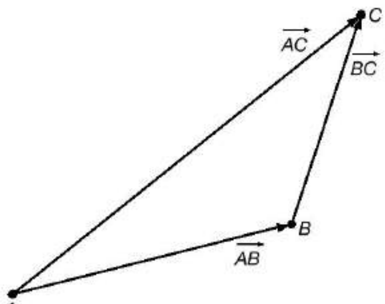
c



d



6 **a**

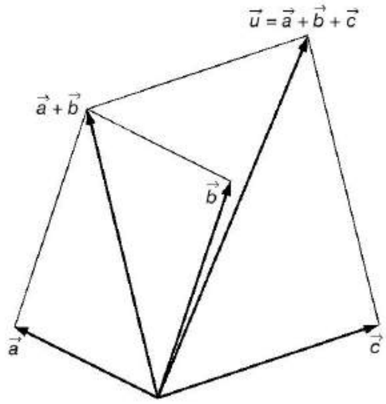


b $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$

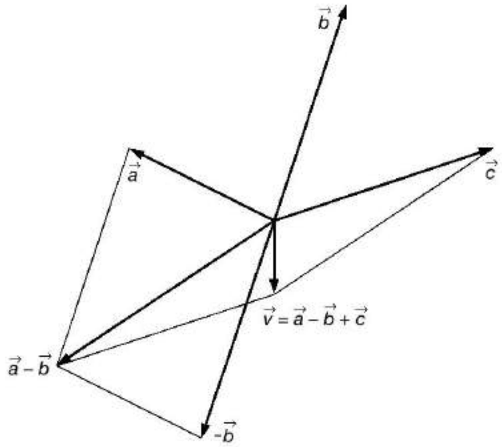
c $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF}$

d $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL}$

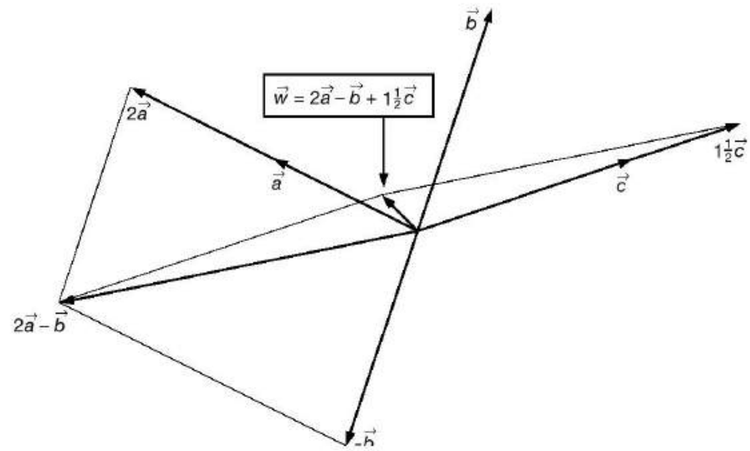
7 **a**


$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
$\vec{a} + \vec{b}$
$\vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{c}$

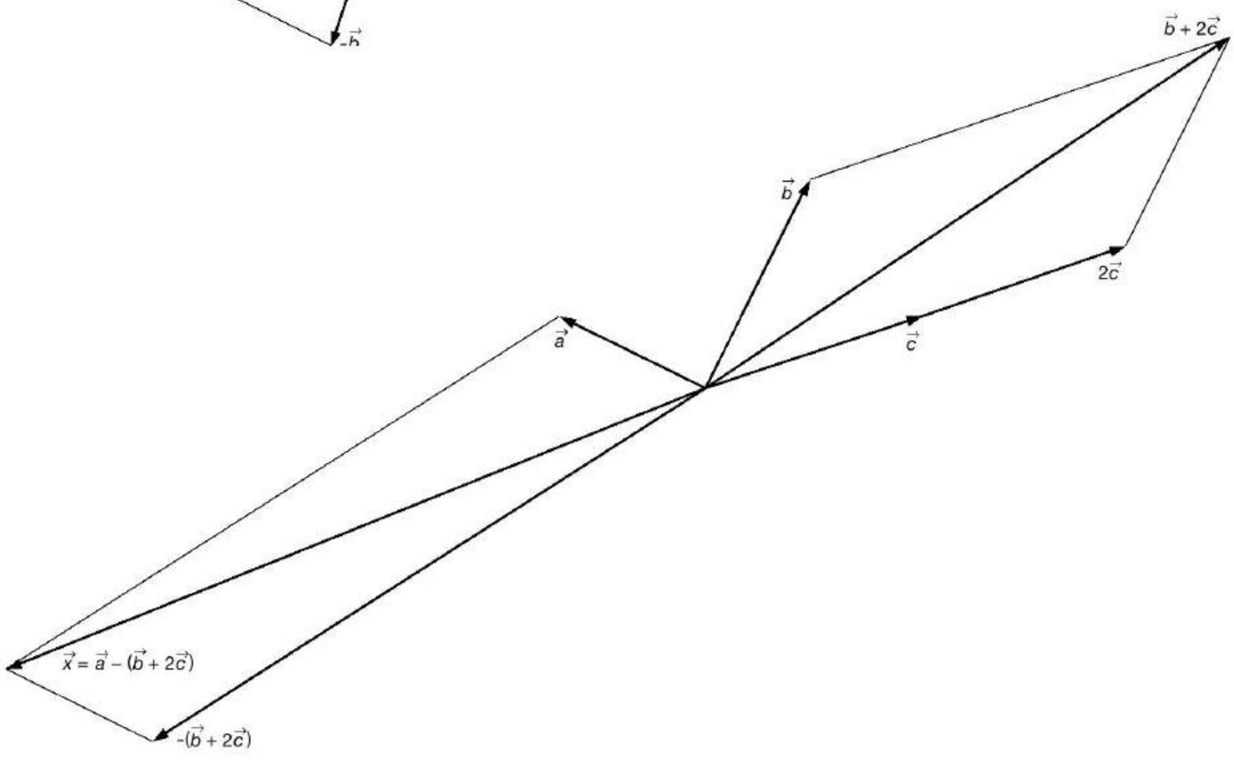
b


$\vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{c}$
$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
$\vec{a} - \vec{b}$
$-\vec{b}$

c

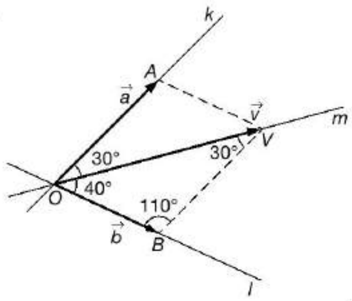

$\vec{b}$
$\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b} + 1\frac{1}{2}\vec{c}$
$2\vec{a}$
$1\frac{1}{2}\vec{c}$
$\vec{a}$
$\vec{c}$
$2\vec{a} - \vec{b}$

d


$\vec{b} + 2\vec{c}$
$\vec{b}$
$2\vec{c}$
$\vec{a}$
$\vec{c}$
$\vec{x} = \vec{a} - (\vec{b} + 2\vec{c})$
$-(\vec{b} + 2\vec{c})$

10

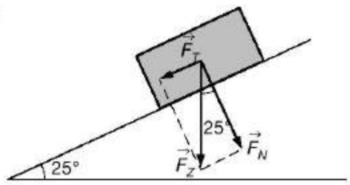
8



In $\triangle OBV$ geldt $\dfrac{12}{\sin(110°)} = \dfrac{|\vec{b}|}{\sin(30°)} = \dfrac{|\vec{a}|}{\sin(40°)}$.

Dus $|\vec{a}| = \dfrac{12\sin(40°)}{\sin(110°)} \approx 8{,}2$ en $|\vec{b}| = \dfrac{12\sin(30°)}{\sin(110°)} \approx 6{,}4$.

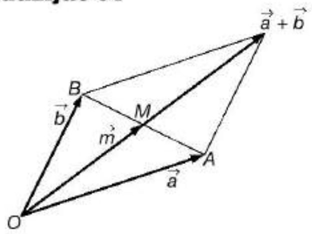
9



De component langs de helling $F_T = 750\sin(25°) \approx 317$N.
De component loodrecht op de helling $F_N = 750\cos(25°) \approx 680$N.

Bladzijde 64

10 **a**

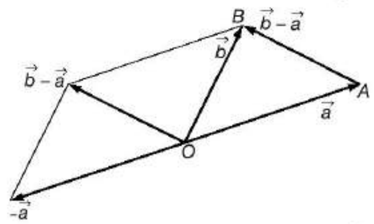


Met de parallellogramconstructie is de vector $\vec{a} + \vec{b}$ getekend.
In het parallellogram zijn de vector $\vec{a} + \vec{b}$ en het lijnstuk AB de diagonalen.
In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.

Dus de vector $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ is de helft van de vector $\vec{a} + \vec{b}$.

Dus voor $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ geldt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

b



In de figuur is eerst de vector $\vec{a}$ getekend en daarna met de parallellogramconstructie de vector $\vec{b} - \vec{a}$.

De vector $\vec{b} - \vec{a}$ is vervolgens kop-staart gelegd met de vector $\vec{a}$, en dat is precies de vector $\overrightarrow{AB}$.

Dus $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

alternatieve oplossing

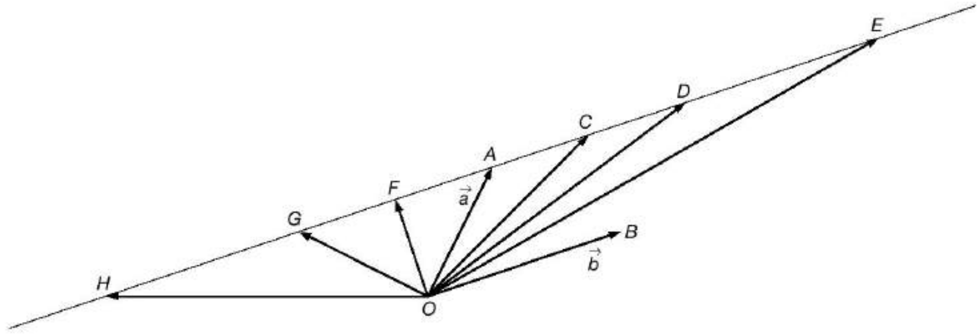
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, dus $-\vec{a} = \overrightarrow{AO}$.

Je weet dat $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

$$-\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB}$$

Dus $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

11 **a**



b De eindpunten van de in a getekende vectoren liggen op de lijn door het eindpunt van de vector $\vec{a}$, die evenwijdig is met de vector $\vec{b}$.

Bladzijde 66

12 **a** Je kunt ook $\vec{q}$ als steunvector nemen.

$$\left.\begin{array}{l} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{q} + \lambda(\vec{q} - \vec{p}) \\ \vec{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ is ook een richtingsvector van l.

$\lambda = -\frac{1}{2}$ geeft $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ is een punt van l en dus ook een steunvector van l.

Dus $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c $x = 6$ geeft $3 + 2\lambda = 6$

$$2\lambda = 3$$
$$\lambda = 1\tfrac{1}{2}$$

$\lambda = 1\frac{1}{2}$ geeft $y = 4 + 1\frac{1}{2} \cdot 2 = 7$

Dus het punt (6, 7) ligt op $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Verder geldt $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van l.

Dus $p = 7$.

13 **a**

$$\left.\begin{array}{l} k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b

$$\left.\begin{array}{l} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{c} + \lambda(\vec{d} - \vec{c}) \\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{d} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c

$$\left.\begin{array}{l} m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{e} + \lambda(\vec{f} - \vec{e}) \\ \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{f} - \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

14 $x = 7$ geeft $-2 + 3\lambda = 7$

$$3\lambda = 9$$
$$\lambda = 3$$

$\lambda = 3$ geeft $y = 5 - 4 \cdot 3 = 5 - 12 = -7$
Dus A ligt op k.

$x = -13$ geeft $-2 + 3\lambda = -13$

$$3\lambda = -11$$
$$\lambda = -3\tfrac{2}{3}$$

$\lambda = -3\frac{2}{3}$ geeft $y = 5 - 4 \cdot -3\frac{2}{3} = 5 + 14\frac{2}{3} = 19\frac{2}{3}$
Dus B ligt niet op k.

$x = -3\frac{1}{2}$ geeft $-2 + 3\lambda = -3\frac{1}{2}$

$$3\lambda = -1\tfrac{1}{2}$$
$$\lambda = -\tfrac{1}{2}$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ geeft $y = 5 - 4 \cdot -\frac{1}{2} = 5 + 2 = 7$
Dus C ligt op k.

15 lijn k

λ	0	1
punt	(1, 2)	(4, 3)

lijn l

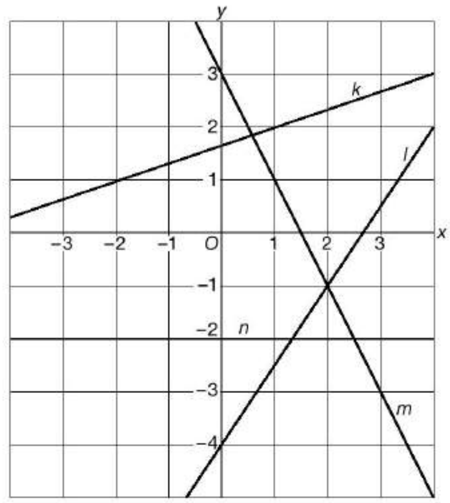
μ	0	1
punt	(2, −1)	(4, 2)

lijn m

ν	0	1
punt	(0, 3)	(1, 1)

lijn n

ρ	0	1
punt	(1, −2)	(2, −2)

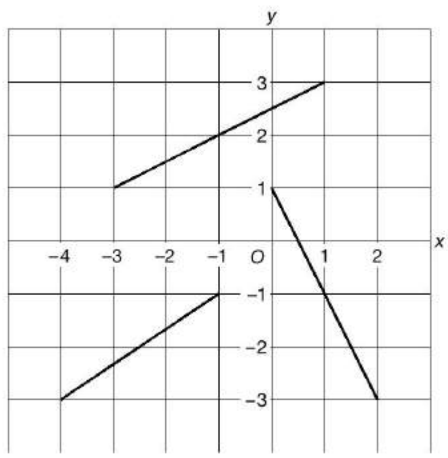


16

λ	−1	1
punt	(−3, 1)	(1, 3)

μ	1	3
punt	(0, 1)	(2, −3)

ν	−1	0
punt	(−4, −3)	(−1, −1)



17 **a**
$$\left.\begin{aligned} &k{:}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{c}) \\ &\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} k{:}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b $\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} + \lambda(\vec{b} - \vec{n}) \\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} m\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda(\vec{a} - \vec{c}) \\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} m\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

d Stel eerst een vectorvoorstelling op van de lijn door BC.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} + \lambda(\vec{c} - \vec{b}) \\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Dus een vectorvoorstelling van het lijnstuk BC is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} \wedge 0 \leq \lambda \leq 1$.

Bladzijde 67

18 **a** De lijn door de middens van AD en BC is evenwijdig met AB en CD en heeft dus dezelfde richting als AB en CD. Dus een richtingsvector van deze lijn is $\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d}$.

De vector vanuit O naar het midden van BC is $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. Dus $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ is een steunvector van de lijn door de middens van AD en BC. Dus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \lambda(\vec{c} - \vec{d})$ is een vectorvoorstelling van de lijn door de middens van AD en BC.

b
- $k\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{d})$
- $l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} + \mu\left(\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) - \vec{b}\right)$
- $m\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + \nu(\vec{c} - \vec{b})$

c I gaat door B en is evenwijdig met AC.
II gaat door het midden van AB en is evenwijdig met BD.
III gaat door A en het midden van BC.

19 **a** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ geeft $x = 3\lambda + 2 \wedge y = 4\lambda - 1$

Vervang je λ door t dan krijg je $x = 3t + 2 \wedge y = 4t - 1$.

Dus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $x = 3t + 2 \wedge y = 4t - 1$ komen op hetzelfde neer.

b $k\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ geeft $x = 4 + 2\lambda \wedge y = 1 - 5\lambda$, ofwel $k\colon x = 4 + 2t \wedge y = 1 - 5t$.

c $l\colon x = -t + 3 \wedge y = 2t + 7$ geeft $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ofwel $l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

10

20 $x = -t - 3 \wedge y = 2 = qt - 8$ geeft $\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ q \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ q \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ geeft $q = -2\frac{1}{2}$.

$(1, p)$ op $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ geeft $-3 - t = 1$

$-t = 4$

$t = -4$

$t = -4$ geeft $p = -8 - 4 \cdot -2\frac{1}{2} = -8 + 10 = 2$

Dus $p = 2$ en $q = -2\frac{1}{2}$.

10.2 Afstanden bij lijnen en cirkels

Bladzijde 69

21 **a** k snijden met de x-as geeft $ax = c$ ofwel $x = \frac{c}{a}$.

Dus $A\left(\frac{c}{a}, 0\right)$.

k snijden met de y-as geeft $by = c$ ofwel $y = \frac{c}{b}$.

Dus $B\left(0, \frac{c}{b}\right)$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle OAB$ geeft $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$$AB^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2}$$

Uit $AB = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2}$ volgt $AB = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{b^2c^2 + a^2c^2}{a^2b^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2b^2}(b^2 + a^2)} = \frac{c}{ab} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.

b $OS \times AB = OA \times OB$

$$OS \cdot \frac{c}{ab} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b}$$

$$OS \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{ab}{c}$$

$$OS \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = c$$

$$OS = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

c $\left.\begin{array}{l} l \,//\, k \text{, dus } l\!: ax + by = d \\ \text{door } P(x_P, y_P) \end{array}\right\} d = ax_P + by_P$

Dus $l\!: ax + by = ax_P + by_P$.

Net zoals de afstand van O tot de lijn $k\!: ax + by = c$ gelijk is aan $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

is de afstand van O tot de lijn $l\!: ax + by = ax_P + by_P$ gelijk aan $\frac{ax_P + by_P}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

d $d(P, k) = PQ = RS = OR - OS = d(O, l) - d(O, k) = \frac{ax_P + by_P}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ax_P + by_P - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Bladzijde 70

22 $d(A, k) = \frac{|1 - 4 \cdot -1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{17}} = \frac{9}{17}\sqrt{17}$

$d(B, k) = \frac{|2 - 4 \cdot 3\frac{1}{2} + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}\sqrt{17}$

$d(C, k) = \frac{|6 - 4 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10}{17}\sqrt{17}$

Het punt B ligt het dichtst bij de lijn k.

23 **a** $d(A, k) = \dfrac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|16|}{\sqrt{25}} = \dfrac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

b l: $y = -2x + 5$ ofwel l: $2x + y - 5 = 0$ geeft $d(B, l) = \dfrac{|2 \cdot 4 + -1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{|2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

c m: $x = 5 + 4\lambda \wedge y = \lambda$
Substitutie van $y = \lambda$ in $x = 5 + 4\lambda$ geeft $x = 5 + 4y$, dus m: $x - 4y - 5 = 0$.

$d(C, m) = \dfrac{|-1 - 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|-14|}{\sqrt{17}} = \dfrac{14}{\sqrt{17}} = \frac{14}{17}\sqrt{17}$

d $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 3t + 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x = 6t + 6 \\ 2y = 6t + 8 \end{cases}$ $-$
$3x - 2y = -2$

Dus n: $3x - 2y + 2 = 0$.
$d(D, n) = \dfrac{|3 \cdot -3 - 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|-9|}{\sqrt{13}} = \dfrac{9}{\sqrt{13}} = \frac{9}{13}\sqrt{13}$

Bladzijde 71

24 **a** $P(x, y)$ op afstand 2 van k geeft $d(P, k) = 2$

$$\frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$
$$\frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{25}} = 2$$
$$|3x + 4y - 12| = 10$$
$$3x + 4y - 12 = 10 \vee 3x + 4y - 12 = -10$$
$$3x + 4y = 22 \vee 3x + 4y = 2$$

Dus l: $3x + 4y = 22$ en m: $3x + 4y = 2$.

b De punten $P(p, 0)$ op afstand 3 van k geeft $d(P, k) = 3$

$$\frac{|3p + 4 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$
$$\frac{|3p - 12|}{\sqrt{25}} = 3$$
$$|3p - 12| = 15$$
$$3p - 12 = 15 \vee 3p - 12 = -15$$
$$3p = 27 \vee 3p = -3$$
$$p = 9 \vee p = -1$$

Dus $P_1(9, 0)$ en $P_2(-1, 0)$.

10

25 **a** Stel k: $y = ax + b$.
k door het punt $A(0, 4)$, dus k: $y = ax + 4$ ofwel k: $ax - y + 4 = 0$.

$d(B, k) = 5$ geeft $\dfrac{|5\frac{1}{2}a - 5 + 4|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$

$$\frac{|5\frac{1}{2}a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5$$
$$|5\tfrac{1}{2}a - 1| = 5\sqrt{a^2 + 1}$$
$$30\tfrac{1}{4}a^2 - 11a + 1 = 25(a^2 + 1)$$
$$30\tfrac{1}{4}a^2 - 11a + 1 = 25a^2 + 25$$
$$5\tfrac{1}{4}a^2 - 11a - 24 = 0$$
$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 5\tfrac{1}{4} \cdot -24 = 625$$
$$a = \frac{11 + 25}{10\frac{1}{2}} = 3\tfrac{3}{7} \vee a = \frac{11 - 25}{10\frac{1}{2}} = -1\tfrac{1}{3}$$

Dus k_1: $y = 3\frac{3}{7}x + 4$ en k_2: $y = -1\frac{1}{3}x + 4$.

b Stel $l: y = ax + b$.
$(3, 0)$ op l geeft $3a + b = 0$, dus $b = -3a$.
$l: y = ax - 3a$ ofwel $l: ax - y - 3a = 0$.

$$d(D, l) = \sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|6a - 4 - 3a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$
$$\frac{|3a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$$
$$|3a - 4| = \sqrt{5a^2 + 5}$$
$$9a^2 - 24a + 16 = 5a^2 + 5$$
$$4a^2 - 24a + 11 = 0$$
$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 400$$
$$a = \frac{24 + 20}{8} = 5\tfrac{1}{2} \vee a = \frac{24 - 20}{8} = \tfrac{1}{2}$$

Dus $l_1: y = 5\frac{1}{2}x - 16\frac{1}{2}$ en $l_2: y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

26 Stel $k: y = 3x + b$ ofwel $3x - y + b = 0$.

$$d(A, k) = d(B, k) \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 2 - 6 + b|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 \cdot 5 - 1 + b|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$$
$$|b| = |14 + b|$$
$$b = 14 + b \vee b = -14 - b$$
$$\text{geen opl.} \quad 2b = -14$$
$$b = -7$$

Dus $k: y = 3x - 7$.

27 Stel een punt op de parabool is $P(p, 2p^2)$.

$$d(P, k) = \sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|p - 2 \cdot 2p^2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$
$$\frac{|p - 4p^2 - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$
$$|-4p^2 + p - 2| = 5$$
$$-4p^2 + p - 2 = 5 \quad \vee \quad -4p^2 + p - 2 = -5$$
$$-4p^2 + p - 7 = 0 \quad \vee \quad -4p^2 + p + 3 = 0$$
$$D = 1^2 - 4 \cdot -4 \cdot -7 < 0 \quad D = 1^2 - 4 \cdot -4 \cdot 3 = 49$$
$$\text{geen opl.} \quad p = \frac{-1 + 7}{-8} = -\tfrac{3}{4} \vee p = \frac{-1 - 7}{-8} = 1$$

Dus de punten zijn $\left(-\frac{3}{4}, 1\frac{1}{8}\right)$ en $(1, 2)$.

10

28 Stel $k: ax + by = 1$.

$$d(A, k) = \sqrt{2} \wedge d(B, k) = 2\sqrt{2} \text{ geeft } \frac{|4a + 0 - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2} \wedge \frac{|6a + 0 - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2}$$
$$|4a - 1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \wedge |6a - 1| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Substitutie van $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ in $|6a - 1| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ geeft $|6a - 1| = 2 \cdot |4a - 1|$

$$|6a - 1| = |8a - 2|$$
$$6a - 1 = 8a - 2 \vee 6a - 1 = -8a + 2$$
$$-2a = -1 \vee 14a = 3$$
$$a = \tfrac{1}{2} \vee a = \tfrac{3}{14}$$

Substitutie van $a = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ geeft $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} = |2 - 1|$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} + 2b^2} = 1$$
$$\tfrac{1}{2} + 2b^2 = 1$$
$$2b^2 = \tfrac{1}{2}$$
$$b^2 = \tfrac{1}{4}$$
$$b = \tfrac{1}{2} \vee b = -\tfrac{1}{2}$$

Substitutie van $a = \frac{3}{14}$ in $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ geeft $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{196} + b^2} = \left|\frac{6}{7} - 1\right|$

$$\sqrt{\tfrac{9}{98} + 2b^2} = \tfrac{1}{7}$$
$$\tfrac{9}{98} + 2b^2 = \tfrac{1}{49}$$
$$2b^2 = -\tfrac{7}{98}$$
$$b^2 = -\tfrac{7}{196}$$

geen opl.

Dus $k_1: \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1$ en $k_2: \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$ ofwel $k_1: x + y = 2$ en $k_2: x - y = 2$.

29 **a** De straal van de cirkel is $\sqrt{5}$ en heeft O als middelpunt, dus de afstand van O tot een raaklijn aan de cirkel is $\sqrt{5}$.

b $l: y = 3x + b$ ofwel $l: 3x - y + b = 0$.

$d(O, l) = \sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$

$$\frac{|b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{5}$$
$$|b| = \sqrt{50}$$
$$|b| = 5\sqrt{2}$$

c $b = 5\sqrt{2}$ geeft $l_1: y = 3x + 5\sqrt{2}$ en $b = -5\sqrt{2}$ geeft $l_2: y = 3x - 5\sqrt{2}$.

Bladzijde 73

30 **a** **1** De discriminantmethode

Stel $k: y = \frac{3}{4}x + b$.

Substitutie van $y = \frac{3}{4}x + b$ in $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ geeft

$$x^2 + \left(\tfrac{3}{4}x + b\right)^2 - 4x - 6\left(\tfrac{3}{4}x + b\right) - 12 = 0$$
$$x^2 + \tfrac{9}{16}x^2 + 1\tfrac{1}{2}bx + b^2 - 4x - 4\tfrac{1}{2}x - 6b - 12 = 0$$
$$1\tfrac{9}{16}x^2 + \left(1\tfrac{1}{2}b - 8\tfrac{1}{2}\right)x + b^2 - 6b - 12 = 0$$

Raken, dus $D = 0$.

$$\left(1\tfrac{1}{2}b - 8\tfrac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1\tfrac{9}{16} \cdot (b^2 - 6b - 12) = 0$$
$$2\tfrac{1}{4}b^2 - 25\tfrac{1}{2}b + 72\tfrac{1}{4} - 6\tfrac{1}{4}b^2 + 37\tfrac{1}{2}b + 75 = 0$$
$$-4b^2 + 12b + 147\tfrac{1}{4} = 0$$
$$D = 12^2 - 4 \cdot -4 \cdot 147\tfrac{1}{4} = 2500$$
$$b = \frac{-12 + 50}{-8} = -4\tfrac{3}{4} \vee b = \frac{-12 - 50}{-8} = 7\tfrac{3}{4}$$

Dus $k_1: y = \frac{3}{4}x - 4\frac{3}{4}$ en $k_2: y = \frac{3}{4}x + 7\frac{3}{4}$.

2 Met lijn door M loodrecht op k

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

$x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$

$(x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 12 = 0$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Lijn m loodrecht op k heeft $\text{rc}_m = -\frac{4}{3}$.

10

Stel $m: y = -\frac{4}{3}x + b$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{4}{3}x + b \\ \text{door } M(2, 3) \end{array}\right\} -\frac{4}{3} \cdot 2 + b = 3$$
$$-2\tfrac{2}{3} + b = 3$$
$$b = 5\tfrac{2}{3}$$

Dus $m: y = -1\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$.

m snijden met c geeft $x^2 + (-\frac{4}{3}x + \frac{17}{3})^2 - 4x - 6(-\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}) - 12 = 0$

$$x^2 + \tfrac{16}{9}x^2 - \tfrac{136}{9}x + \tfrac{289}{9} - 4x + 8x - 34 - 12 = 0$$
$$\tfrac{25}{9}x^2 - \tfrac{100}{9}x - \tfrac{125}{9} = 0$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$(x + 1)(x - 5) = 0$$
$$x = -1 \vee x = 5$$

$x = -1$ substitueren in $y = -1\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$ geeft $y = 7$.

$x = 5$ substitueren in $y = -1\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$ geeft $y = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } (-1, 7) \end{array}\right\} \tfrac{3}{4} \cdot -1 + b = 7$$
$$-\tfrac{3}{4} + b = 7$$
$$b = 7\tfrac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } (5, -1) \end{array}\right\} \tfrac{3}{4} \cdot 5 + b = -1$$
$$3\tfrac{3}{4} + b = -1$$
$$b = -4\tfrac{3}{4}$$

Dus $k_1: y = \frac{3}{4}x + 7\frac{3}{4}$ en $k_2: y = \frac{3}{4}x - 4\frac{3}{4}$.

b Substitutie van $y = ax + 2 - 9a$ in $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ geeft
$x^2 + (ax + 2 - 9a)^2 - 4x - 6(ax + 2 - 9a) - 12 = 0$
Dit uitwerken is onaangenaam, maar zou nog kunnen. Je komt dan uit op de vergelijking
$(a^2 + 1)x^2 - (18a^2 + 2a + 4)x + 81a^2 + 18a - 20 = 0$.
Door $D = 0$ te stellen ontstaat vervolgens een vierdegraadsvergelijking die opgelost moet worden.

31 **a** c is de cirkel met middelpunt O en straal $\sqrt{10}$.
Stel $l: y = 3x + b$ ofwel $l: 3x - y + b = 0$.

$d(O, l) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$$|b| = 10$$
$$b = 10 \vee b = -10$$

Dus $l_1: y = 3x + 10$ en $l_2: y = 3x - 10$.

b Stel $m: y = ax + b$.

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } A(10, 0) \end{array}\right\} 10a + b = 0$$
$$b = -10a$$

Dus $m: y = ax - 10a$ ofwel $m: ax - y - 10a = 0$.

$d(O, m) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|a \cdot 0 - 0 - 10a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$$|-10a| = \sqrt{10a^2 + 10}$$
$$100a^2 = 10a^2 + 10$$
$$90a^2 = 10$$
$$a^2 = \tfrac{1}{9}$$
$$a = \tfrac{1}{3} \vee a = -\tfrac{1}{3}$$

Dus $m_1: y = \frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$ en $m_2: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

32 **a** Stel k: $y = ax + b$ door $A(-4, -1)$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ $-4a + b = -1$

$b = 4a - 1$

Dus k: $y = ax + 4a - 1$ ofwel k: $ax - y + 4a - 1 = 0$.

$d(O, k) = \sqrt{17}$ geeft $\dfrac{|0 - 0 + 4a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$

$|4a - 1| = \sqrt{17a^2 + 17}$

$16a^2 - 8a + 1 = 17a^2 + 17$

$a^2 + 8a + 16 = 0$

$(a + 4)^2 = 0$

$a = -4$

Dus k: $y = -4x + 4 \cdot -4 - 1$ ofwel k: $y = -4x - 17$.

b Loodrecht op l: $4x - y = 3$, dus m: $x + 4y = c$.

$d(O, m) = \sqrt{17}$ geeft $\dfrac{|0 + 4 \cdot 0 - c|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$

$|-c| = 17$

$-c = 17 \vee -c = -17$

$c = -17 \vee c = 17$

Dus m_1: $x + 4y = -17$ en m_2: $x + 4y = 17$.

c Door $(0, 17)$, dus n: $y = ax + 17$ ofwel n: $ax - y + 17 = 0$.

$d(O, n) = \sqrt{17}$ geeft $\dfrac{|a \cdot 0 - 0 + 17|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$

$\dfrac{17}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$

$\sqrt{17a^2 + 17} = 17$

$17a^2 + 17 = 289$

$17a^2 = 272$

$a^2 = 16$

$a = 4 \vee a = -4$

Dus n_1: $y = 4x + 17$ en n_2: $y = -4x + 17$.

33 **a** $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$

$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 19 = 0$

$(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 19 = 0$

$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$

Dus $M(5, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.

Stel k: $y = ax + b$ door $A(4, 5)$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ $4a + b = 5$

$b = 5 - 4a$

Dus k: $y = ax + 5 - 4a$ ofwel k: $ax - y + 5 - 4a = 0$.

$d(M, k) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|5a - 2 + 5 - 4a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$|a + 3| = \sqrt{10a^2 + 10}$

$a^2 + 6a + 9 = 10a^2 + 10$

$9a^2 - 6a + 1 = 0$

$(3a - 1)^2 = 0$

$3a = 1$

$a = \frac{1}{3}$

Dus k: $y = \frac{1}{3}x + 5 - 4 \cdot \frac{1}{3}$ ofwel k: $y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$.

10

b Stel l: $y = 3x + b$ ofwel l: $3x - y + b = 0$.

$d(M, l) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 5 - 2 + b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$|13 + b| = 10$
$13 + b = 10 \vee 13 + b = -10$
$b = -3 \vee b = -23$

l_1: $y = 3x - 3$ en l_2: $y = 3x - 23$.

c Stel m: $y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } B(9, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9a + b = 0 \\ b = -9a \end{array}$

Dus m: $y = ax - 9a$ ofwel m: $ax - y - 9a = 0$.

$d(M, m) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|5a - 2 - 9a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$|-4a - 2| = \sqrt{10a^2 + 10}$

$16a^2 + 16a + 4 = 10a^2 + 10$
$6a^2 + 16a - 6 = 0$
$a^2 + 2\frac{2}{3}a - 1 = 0$
$(a + 3)(a - \frac{1}{3}) = 0$
$a = -3 \vee a = \frac{1}{3}$

Dus m_1: $y = -3x + 27$ en m_2: $y = \frac{1}{3}x - 3$.

34 **a** $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$
$x^2 - 2x + y^2 - 4y - 12 = 0$
$(x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 12 = 0$
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 17$
Dus $M(1, 2)$ en $r = \sqrt{17}$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Stel } k\text{: } y = ax + b \\ \text{door } A(-3, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3a + b = 1 \\ b = 1 + 3a \end{array}$

Dus k: $y = ax + 1 + 3a$ ofwel k: $ax - y + 1 + 3a = 0$.

$d(M, k) = \sqrt{17}$ geeft $\dfrac{|a - 2 + 1 + 3a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$

$|4a - 1| = \sqrt{17a^2 + 17}$
$16a^2 - 8a + 1 = 17a^2 + 17$
$a^2 + 8a + 16 = 0$
$(a + 4)^2 = 0$
$a = -4$

Dus k: $y = -4x + 1 + 3 \cdot -4$ ofwel k: $y = -4x - 11$.

b l staat loodrecht op m: $4x - y = 1$, dus l: $x + 4y = c$.

$d(M, l) = \sqrt{17}$ geeft $\dfrac{|1 + 4 \cdot 2 - c|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$

$|9 - c| = 17$
$9 - c = 17 \vee 9 - c = -17$
$-c = 8 \vee -c = -26$
$c = -8 \vee c = 26$

Dus l_1: $x + 4y = -8$ en l_2: $x + 4y = 26$.

c Stel $n: y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } B(6, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6a + b = -1 \\ b = -6a - 1 \end{array}$

Dus $n: y = ax - 6a - 1$ ofwel $ax - y - 6a - 1 = 0$.

$d(M, n) = \sqrt{17}$ geeft $\dfrac{|a - 2 - 6a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$

$|-5a - 3| = \sqrt{17a^2 + 17}$

$25a^2 + 30a + 9 = 17a^2 + 17$

$8a^2 + 30a - 8 = 0$

$4a^2 + 15a - 4 = 0$

$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot -4 = 289$

$a = \dfrac{-15 + 17}{8} = \frac{1}{4} \vee a = \dfrac{-15 - 17}{8} = -4$

Dus $n_1: y = \frac{1}{4}x - 2\frac{1}{2}$ en $n_2: y = -4x + 23$.

35 Stel $k: \dfrac{x}{2r} + \dfrac{y}{4} = 1$ ofwel $k: 2x + ry = 4r$.

$d(O, k) = r$ geeft $\dfrac{|2 \cdot 0 + r \cdot 0 - 4r|}{\sqrt{4 + r^2}} = r$

$\dfrac{|-4r|}{\sqrt{4 + r^2}} = r$

$|-4r| = r\sqrt{4 + r^2}$

$16r^2 = r^2(4 + r^2)$

$16 = 4 + r^2$

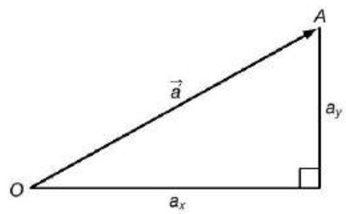
$r^2 = 12$

$r = 2\sqrt{3}$

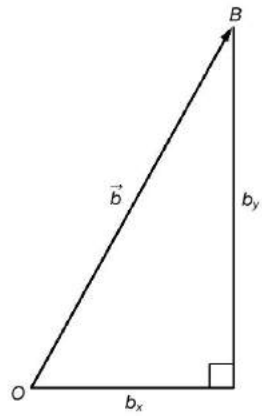
10.3 Vectoren en hoeken

Bladzijde 75

36 **a** De lengte van de vector $\vec{a}$ bereken je met de stelling van Pythagoras.
Dit geeft $|\vec{a}|^2 = a_x^{\,2} + a_y^{\,2}$.



De lengte van de vector $\vec{b}$ bereken je met de stelling van Pythagoras.
Dit geeft $|\vec{b}|^2 = b_x^{\,2} + b_y^{\,2}$.

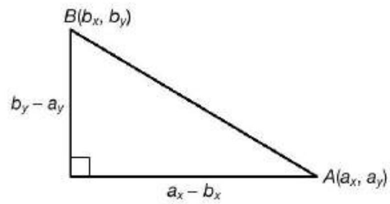


b Zie de schets hiernaast.
De stelling van Pythagoras geeft

$AB^2 = (a_x - b_x)^2 + (b_y - a_y)^2$

$= a_x^{\,2} - 2a_xb_x + b_x^{\,2} + b_y^{\,2} - 2a_yb_y + a_y^{\,2}$

$= a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + b_x^{\,2} + b_y^{\,2} - 2a_xb_x - 2a_yb_y$



10

Bladzijde 77

37 **a** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

b $\cos(\angle(\vec{c}, \vec{d})) = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{-2-3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Dus $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 135°$.

c $\cos(\angle(k, l)) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} \\ 1+3\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} \\ 1+3\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\left|3-\sqrt{3}-3-9\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(1+3\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1+9}}$

$= \dfrac{\left|-10\sqrt{3}\right|}{\sqrt{9-6\sqrt{3}+3+1+6\sqrt{3}+27} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{400}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dus $\angle(k, l) = 30°$.

38 **a** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot -1 + 3 \cdot -6 = -2 - 18 = -20$

b $\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = -2 + 0 = -2$

c $\vec{e} \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + -3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$

d $\vec{g} \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot -\sqrt{3} = 4 - 3 = 1$

Bladzijde 78

39 **a** $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{10}{5\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

10

Dus $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 26{,}6°$.

b $\cos(\angle(\vec{c}, \vec{d})) = \dfrac{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{4 \cdot -1 + -1 \cdot 3}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{-7}{\sqrt{170}}$

Dus $\angle(\vec{c}, \vec{d}) \approx 122{,}5°$.

c $\cos(\angle(\vec{e}, \vec{f})) = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{0 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{29}} = \dfrac{15}{3\sqrt{29}} = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$

Dus $\angle(\vec{e}, \vec{f}) \approx 21{,}8°$.

d $\cos(\angle(\vec{g}, \vec{h})) = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{2 \cdot 5 + -5 \cdot 2}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} = \dfrac{0}{29} = 0$

Dus $\angle(\vec{g}, \vec{h}) = 90°$.

40 **a** $\cos(\angle(k,l)) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$

Dus $\angle(k,l) \approx 36{,}9°$.

b $\cos(\angle(m,n)) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|3\cdot -1 + 1\cdot 2|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{50}}$

Dus $\angle(m,n) \approx 81{,}9°$.

c $\cos(\angle(p,q)) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|-1\cdot 2 + 1\cdot 1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Dus $\angle(p,q) \approx 71{,}6°$.

41 **a** Een richtingsvector van de lijn AB is $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Een richtingsvector van de lijn BC is $\vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

$\cos(\angle(AB,BC)) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|3\cdot 1 + -1\cdot 4|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}} = \dfrac{1}{\sqrt{170}}$

Dus $\angle(AB, BC) \approx 85{,}6°$.

b Een richtingsvector van de lijn AC is $\vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$.

Een richtingsvector van de lijn BC is $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

$\cos(\angle(AC,BC)) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|2\cdot 1 + -5\cdot 4|}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{17}} = \dfrac{18}{\sqrt{493}}$

Dus $\angle(AC, BC) \approx 35{,}8°$.

42 **a** $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$\cos(\angle(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})) = \dfrac{\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{-2\cdot -1 + -2\cdot 3}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{-4}{\sqrt{80}}$

$\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \approx 116{,}6°$

Dus $\angle B \approx 116{,}6°$.

b $\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE} = \vec{e} - \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

$\cos(\angle(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE})) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|-1\cdot -5 + 6\cdot 1|}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{26}} = \dfrac{11}{\sqrt{962}}$

$\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}) \approx 69{,}2°$

Dus de hoek tussen de diagonalen AD en BE is $69{,}2°$.

10

43 **a** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot -4 = 12 - 12 = 0$

De hoek tussen de vectoren is 90°. Dus als het inproduct van twee vectoren nul is, dan staan die vectoren loodrecht op elkaar.

b $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bladzijde 79

44 **a** Een richtingsvector gaat van het punt (0, 2) naar het punt (3, 0).

Dit is de vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dus $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b De vector $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn k.

c De vector $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn l.

Bladzijde 80

45 **a** $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = c \\ (2, -1) \text{ op } k \end{array}\right\} c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot -1 = 11$$

Dus $k: 4x - 3y = 11$.

b $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} 7x + 4y = c \\ (0, 0) \text{ op } l \end{array}\right\} c = 0$$

Dus $l: 7x + 4y = 0$.

46 **a** $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(-3, 0) op k, dus $\vec{s}_k = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dus $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(0, 0) op l, dus $\vec{s}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dus $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bladzijde 81

47 **a** Substitutie van $x = 3\lambda \wedge y = 2 + 2\lambda$ in $2x - 5y = 6$ geeft $2 \cdot 3\lambda - 5(2 + 2\lambda) = 6$

$$6\lambda - 10 - 10\lambda = 6$$
$$-4\lambda = 16$$
$$\lambda = -4$$

$\lambda = -4$ geeft $x = 3 \cdot -4 = -12$ en $y = 2 + 2 \cdot -4 = -6$

Dus het snijpunt is (−12, −6).

b Substitutie van $x = 2 - \lambda \wedge y = -5 + 3\lambda$ in $3x + 4y = 10$ geeft $3(2 - \lambda) + 4(-5 + 3\lambda) = 10$

$$6 - 3\lambda - 20 + 12\lambda = 10$$
$$9\lambda = 24$$
$$\lambda = 2\tfrac{2}{3}$$

$\lambda = 2\frac{2}{3}$ geeft $x = 2 - 2\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$ en $y = -5 + 3 \cdot 2\frac{2}{3} = 3$

Dus het snijpunt is $\left(-\frac{2}{3}, 3\right)$.

10

48 **a** $\vec{r}_l = \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } 5x + 2y = c \\ \text{door } (4, 1) \end{array}\right\} c = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 22$

Dus l: $5x + 2y = 22$.

b $n \perp m$, dus $\vec{n}_n = \vec{r}_m = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} n\text{: } 3x + 2y = c \\ \text{door } (5, -1) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 5 + 2 \cdot -1 = 13$

Dus n: $3x + 2y = 13$.

49 **a** $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$A(5, 2)$ op l, dus $\vec{s}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dus l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b $n \perp m$, dus $\vec{r}_n = \vec{n}_m = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$B(1, -3)$ op n, dus $\vec{s}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Dus n: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

50 **a** $\begin{cases} 3 + \lambda = -1 + 3\mu \\ 3 + 2\lambda = 5 - 4\mu \end{cases}$ geeft $\begin{cases} \lambda - 3\mu = -4 \\ 2\lambda + 4\mu = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right|$ geeft $\begin{cases} 2\lambda - 6\mu = -8 \\ 2\lambda + 4\mu = 2 \end{cases}$ $-$

$$-10\mu = -10$$
$$\mu = 1$$

$\mu = 1$ geeft $x = -1 + 3 \cdot 1 = 2 \wedge y = 5 - 4 \cdot 1 = 1$

Dus $S(2, 1)$.

b m door $A(-3, 5)$ en $B(3, -1)$, dus $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 3 - -3 \\ -1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

m door $A(-3, 5)$, dus $\vec{s}_m = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Dus m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

n staat loodrecht op p: $-x + 5y = 4$, dus n: $5x + y = c$.

$\left.\begin{array}{l} 5x + y = c \\ \text{door } C(-4, -2) \end{array}\right\} c = 5 \cdot -4 + -2 = -22$

Dus n: $5x + y = -22$.

Substitutie van $x = -3 + \lambda \wedge y = 5 - \lambda$ in $5x + y = -22$ geeft $5(-3 + \lambda) + 5 - \lambda = -22$

$$-15 + 5\lambda + 5 - \lambda = -22$$
$$4\lambda = -12$$
$$\lambda = -3$$

$\lambda = -3$ geeft $x = -3 + -3 = -6 \wedge y = 5 - -3 = 8$

Dus $T(-6, 8)$.

c $\vec{r}_q = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{n}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dus q: $x + 4y = c$.

$\left.\begin{array}{l} x + 4y = c \\ \text{door } (5, 3) \end{array}\right\} c = 5 + 4 \cdot 3 = 17$

Dus q: $x + 4y = 17$.

Substitutie van $x = 2t - 4 \wedge y = t - 6$ in $x + 4y = 17$ geeft $2t - 4 + 4(t - 6) = 17$

$$2t - 4 + 4t - 24 = 17$$
$$6t = 45$$
$$t = 7\tfrac{1}{2}$$

$t = 7\frac{1}{2}$ geeft $x = 2 \cdot 7\frac{1}{2} - 4 = 11 \wedge y = 7\frac{1}{2} - 6 = 1\frac{1}{2}$

Dus het snijpunt is $\left(11, 1\frac{1}{2}\right)$.

10

51 **a** Snijden van k met de x-as, dus $y = 0$ geeft $3 + \lambda = 0$

$\lambda = -3$

$\lambda = -3$ geeft $x = -2 + -3 \cdot 5 = -17$, dus $A(-17, 0)$.

$l \perp k$, dus $\vec{n}_l = \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } 5x + y = c \\ \text{door } (-17, 0) \end{array}\right\} c = 5 \cdot -17 + 0 = -85$

Dus l: $5x + y = -85$.

b $\vec{r}_l = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$m \,//\, l$, dus $\vec{r}_m = \vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $(0, 0)$ op m, dus $\vec{s}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dus m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c $\vec{r}_{OE} = \vec{e} - \vec{o} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$n \perp OE$, dus $\vec{n}_n = \vec{r}_{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} n\text{: } x - 4y = c \\ \text{door } D(-4, 7) \end{array}\right\} c = -4 - 4 \cdot 7 = -32$

Dus n: $x - 4y = -32$.

52 **a** $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(k, l)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-20 + 2|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{29}} = \frac{18}{\sqrt{493}}$$

Dus $\angle(k, l) \approx 35{,}8°$.

b $\vec{n}_m = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_n = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(m, n)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|14 - 3|}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{290}}$$

Dus $\angle(m, n) \approx 49{,}8°$.

c p: $y = 2x - 5$ ofwel p: $-2x + y = -5$ geeft $\vec{n}_p = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

q: $y = -x + 4$ ofwel q: $x + y = 4$ geeft $\vec{n}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(p, q)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Dus $\angle(p, q) \approx 71{,}6°$.

10

10.4 Vectoren en rotaties

Bladzijde 83

53 **a** $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b $\vec{b}_R = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$

Bladzijde 84

54 **a** $\vec{d} = \vec{m} + \overrightarrow{MD} = \vec{m} + \overrightarrow{AM}_L = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dus $D(-2, 5)$.

b $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \vec{m} + \overrightarrow{MB} = \vec{m} + \overrightarrow{AM}_R$

$\overrightarrow{AM} = \vec{m} - \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r \\ -\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{AM}_R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r \end{pmatrix}$.

Dit geeft $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s \end{pmatrix}$

Dus $B\left(\frac{1}{2}(p - q + r + s), \frac{1}{2}(p + q - r + s)\right)$.

c $\vec{d} = \vec{m} + \overrightarrow{MD} = \vec{m} + \overrightarrow{AM}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s \end{pmatrix}$

Dus $D\left(\frac{1}{2}(p + q + r - s), \frac{1}{2}(-p + q + r + s)\right)$.

Bladzijde 85

55 $\vec{n} = \vec{a} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}_R = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{d}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MB}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \vec{a} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\frac{1}{2} \\ 8\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Dus $N\left(9\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}\right)$.

56 $\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \overrightarrow{AC}_R$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}_R$

$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ d \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AD}_R = \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + d \\ a + d \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AC}_R = \begin{pmatrix} a + d \\ a - d \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AC}_R = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + d \\ a - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + d \\ a - d \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2a + d \\ a - d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a + d \\ a + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2d \\ 2a \end{pmatrix}$

Dus $P(2a + d, a - d)$ en $Q(a + 2d, 2a)$.

10

57 $\vec{q} = \vec{a} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{a} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 1\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}_R = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \vec{a} + 1\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 5\frac{1}{3} - 1 \\ 0 + 4 + 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{3} \\ 5\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\vec{r} = \vec{q} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{3} \\ 5\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{3} \\ 5\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{3} \\ 6\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Dus $Q(7\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3})$ en $R(6\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3})$.

58 $\vec{f} = \vec{a} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \vec{a} + \overrightarrow{AD}_R + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BE}_L$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{AD}_R = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \overrightarrow{AD}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

De lijn k door B en C heeft $\vec{r}_k = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{s}_k = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dus k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

E ligt op de x-as, dus $y = 0$ geeft $3 + 4\lambda = 0$

$$4\lambda = -3$$
$$\lambda = -\frac{3}{4}$$

$\lambda = -\frac{3}{4}$ geeft $x = 7 - 3 \cdot -\frac{3}{4} = 9\frac{1}{4}$, dus $E(9\frac{1}{4}, 0)$.

$\overrightarrow{BE} = \vec{e} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 9\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{4} \\ -3 \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{BE}_L = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

$\vec{f} = \vec{a} + \overrightarrow{AD}_R + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BE}_L = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\frac{1}{4} \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\frac{1}{4} \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Dus $F(12\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4})$.

Bladzijde 86

59 $\vec{t} = \vec{b} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{ST} = \vec{b} + \overrightarrow{AB}_R + \overrightarrow{SP}_R$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + b \\ c \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{AB}_R = \begin{pmatrix} c \\ a - b \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BS} = \vec{b}_L - \overrightarrow{AB}_R = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ -a + 2b \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{SP}_R = \begin{pmatrix} -a + 2b \\ 2c \end{pmatrix}$.

$\vec{t} = \vec{b} + \overrightarrow{AB}_R + \overrightarrow{SP}_R = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ a - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a + 2b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 3b + c \\ a - b + 3c \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \vec{t} + \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} -a + 3b + c \\ a - b + 3c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c \\ -a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 3b - c \\ b + 3c \end{pmatrix}$

Dus $T(-a + 3b + c, a - b + 3c)$ en $U(-a + 3b - c, b + 3c)$.

60 **a** $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -a \\ d \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}_R = \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -a \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a + d \\ a + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \end{pmatrix}$

$\vec{m} = \vec{a} + \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \end{pmatrix}$

De x-coördinaat is gelijk aan de y-coördinaat dus $M(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d)$ ligt op de lijn $y = x$.

b $OM = \sqrt{(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d)^2 + (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d)^2} = \sqrt{2(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d)^2} = \sqrt{2(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{4}d^2)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + 2ad + d^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + d)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (a + d) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (a + d)$

10

alternatieve uitwerking

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ geeft $OM = \left|\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d\right| \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (a + d)$.

61 $\vec{n} = \vec{m} + \overrightarrow{MN} = \vec{m} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 2a \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$

$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}a \\ 1\frac{1}{2}a \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \vec{m} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}a \\ 1\frac{1}{2}a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2}a \\ 2\frac{1}{2}a \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} y = mx \\ \text{door } N\left(3\frac{1}{2}a, 2\frac{1}{2}a\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3\frac{1}{2}am = 2\frac{1}{2}a \\ m = \frac{5}{7} \end{array}$

Bladzijde 87

62 **a** Noem M het midden van AB.

$\vec{p} = \vec{m} + \overrightarrow{MP}$ met $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ en $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AM}_{\text{R}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_{\text{R}}$, dus $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_{\text{R}}$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AB}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_{\text{R}} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dus $P(10, 5)$.

b Noem N het midden van OC.

$\vec{r} = \vec{n} + \vec{n}_L$ en $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dus $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Dus $R\left(-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$.

Bladzijde 88

63 $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ c \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \vec{c}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}$

$B(0, a)$ geeft $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b - a \end{pmatrix}$

Uit $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{BD}$ volgt dat $AC = BD$ en $AC \perp BD$.

64 Bewijs dat $MP = MQ$ en $MP \perp MQ$.

$M\left(\frac{1}{2}a, 0\right)$

$\vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b - a \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ a - b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a + b + c \\ a - b + c \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}_{\text{L}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b - c \\ b + c \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MP} = \vec{p} - \vec{m} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a + b + c \\ a - b + c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b + c \\ a - b + c \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MQ} = \vec{q} - \vec{m} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b - c \\ b + c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a + b - c \\ b + c \end{pmatrix}$

Uit $\overrightarrow{MP}$ en $\overrightarrow{MQ}$ volgt dat $MP = MQ$ en $MP \perp MQ$.

Dus $\triangle PQM$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

10

65 $\vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_\text{R} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ a-b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}_\text{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-c \\ b+c \end{pmatrix}$

$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a}_\text{R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QR} = \vec{r} - \vec{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-c \\ b+c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b+c \\ -a-b-c \end{pmatrix}$

Uit $\overrightarrow{OP}$ en $\overrightarrow{QR}$ volgt $OP \perp QR$.

$\overrightarrow{AQ} = \vec{q} - \vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-c \\ b+c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PR} = \vec{r} - \vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c \\ -a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c \end{pmatrix}$

Uit $\overrightarrow{AQ}$ en $\overrightarrow{PR}$ volgt $AQ \perp PR$.

$\overrightarrow{BR} = \vec{r} - \vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a-b \\ -\frac{1}{2}a-c \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-c \\ b+c \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a-c \\ -\frac{1}{2}a+b \end{pmatrix}$

Uit $\overrightarrow{BR}$ en $\overrightarrow{PQ}$ volgt $BR \perp PQ$.

66 $\vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_\text{R} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ a-b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \vec{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}_\text{L} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-d \\ c-e \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c+e \\ b-d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-c+d+e \\ b+c-d+e \end{pmatrix}$

$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c}_\text{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d-e \\ d+e \end{pmatrix}$

$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a}_\text{R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PR} = \vec{r} - \vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d-e \\ d+e \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a-b-c+d-e \\ -a+b-c+d+e \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QS} = \vec{s} - \vec{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-c+d+e \\ b+c-d+e \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b+c-d-e \\ -a-b-c+d-e \end{pmatrix}$

Uit $\overrightarrow{PR}$ en $\overrightarrow{QS}$ volgt $PR = QS$ en $PR \perp QS$.

10

10.5 Bewegingen met GeoGebra

Bladzijde 90

67 **a** *
b *
c *
d *
e *
f *
g *
h *
i *

Bladzijde 91

68 a $t = -2$
b $(0, 5\frac{1}{3})$ voor $t = -2$ en $(8, -5\frac{1}{3})$ voor $t = 2$.
c $(-1, 3\frac{2}{3})$ voor $t = -1$.
d $t \approx -1{,}77$
e $(8, -5\frac{1}{3})$ voor $t = -4$ en $t = 2$.
f Is de hoek kleiner dan 90°, dan is de versnelling te ontbinden in een component loodrecht op de snelheid en een component in dezelfde richting als de snelheid, dus de versnelling zorgt dan voor een toename van de snelheid.
Is de hoek groter dan 90°, dan is de versnelling te ontbinden in een component loodrecht op de snelheid en een component in tegengestelde richting aan de snelheid, dus de versnelling zorgt dan voor een afname van de snelheid.
Dus voor $t \approx -1{,}77$ is de snelheid het kleinst. Het bijbehorende punt is $(-1; 3{,}65)$.

69 a $|\vec{v}|_{\text{min}} \approx 1{,}89$
b $|\vec{a}|_{\text{min}} = 2$
c 0° en 30°
d 60°

Bladzijde 92

70 a $x(t) = 0$ geeft $t^3 - 3t = 0$
$t(t^2 - 3) = 0$
$t = 0 \vee t^2 = 3$
$t = 0 \vee t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$
$y(0) = 4\cos(0) = 4$
$y(\sqrt{3}) = 4\cos(2\sqrt{3}) \approx -3{,}79$
$y(-\sqrt{3}) = 4\cos(-2\sqrt{3}) \approx -3{,}79$
Dus in $(0, 4)$ en $(0; -3{,}79)$.
b In de buigpunten is de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{v}$ 0° of 180°.
c $(-2, -1\frac{2}{3})$ en $(2, -1\frac{2}{3})$
$|\vec{v}| \approx 7{,}27$

71 a Voor $t = -2$ is $\vec{p} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Op $t = -2$ ligt het punt P op de x-as en heeft het punt P een verticale snelheid van 0 en de versnelling is naar beneden gericht, dus de baan raakt de x-as.
b $(-0{,}02; -0{,}22)$, $(0{,}66; -1{,}91)$ en $(-0{,}47; -4{,}7)$.
In deze punten heeft $|\vec{v}|$ een lokaal minimum.
c $x = -6$
Hoe dichter je t bij $t = -3$ kiest, hoe dichter de x-coördinaat nadert naar $x = -6$.

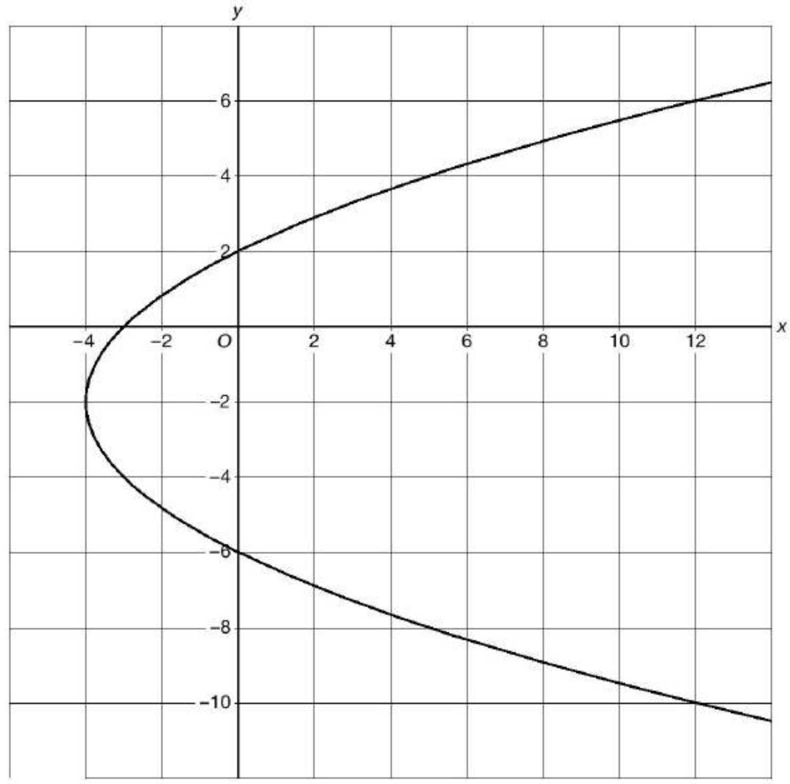
10

10.6 Snelheid en versnelling

Bladzijde 93

72 a $t = 0$ geeft $x = 0 - 0 = 0$ en $y = 0 - 6 = -6$, dus op $t = 0$ is P in het punt $(0, -6)$.
b

t	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
x	12	5	0	−3	−4	−3	0	5	12
y	−10	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6



c De verplaatsing van P op $[2, 3]$ is $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bladzijde 95

73 **a** Evenwijdig aan de y-as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$$t^2 - 4 = 0 \wedge 2t - 2 \neq 0$$
$$t^2 = 4 \wedge 2t \neq 2$$
$$(t = 2 \vee t = -2) \wedge t \neq 1$$
$$t = 2 \vee t = -2$$

$t = 2$ geeft $x = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = -5\frac{1}{3}$ en $y = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$
$t = -2$ geeft $x = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot -2 = 5\frac{1}{3}$ en $y = (-2)^2 - 2 \cdot -2 = 8$

Dus de punten $\left(-5\frac{1}{3}, 0\right)$ en $\left(5\frac{1}{3}, 8\right)$.

b Door de oorsprong, dus $x(t) = 0 \wedge y(t) = 0$

$$\tfrac{1}{3}t^3 - 4t = 0 \wedge t^2 - 2t = 0$$
$$\tfrac{1}{3}t(t^2 - 12) = 0 \wedge t(t - 2) = 0$$
$$(t = 0 \vee t^2 = 12) \wedge (t = 0 \vee t = 2)$$
$$t = 0$$

Stel l: $ax + by = 0$.

$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dus l: $x - 2y = 0$.

Bladzijde 96

74 **a** Naar links bewegen betekent $x'(t) < 0$ en omhoog bewegen betekent $y'(t) > 0$, dus $x'(t) < 0 \wedge y'(t) > 0$ en dit geeft $t^2 - 4 < 0 \wedge 2t - 2 > 0$.

b $t^2 - 4 < 0 \wedge 2t - 2 > 0$

$t^2 < 4 \wedge 2t > 2$

$-2 < t < 2 \wedge t > 1$

$1 < t < 2$

10

75 **a** $x(t) = t^2 - 2$ geeft $x'(t) = 2t$

$y(t) = t^3 - 4t$ geeft $y'(t) = 3t^2 - 4$

Raaklijn evenwijdig aan de x-as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$$3t^2 - 4 = 0 \wedge 2t \neq 0$$
$$3t^2 = 4 \wedge t \neq 0$$
$$t^2 = \tfrac{4}{3} \wedge t \neq 0$$
$$t = \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \vee t = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

$t = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ geeft $x = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$ en $y = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 - 4 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{8}{9}\sqrt{3} - \frac{24}{9}\sqrt{3} = -1\frac{7}{9}\sqrt{3}$

$t = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ geeft $x = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$ en $y = \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 - 4 \cdot -\frac{2}{3}\sqrt{3} = -\frac{8}{9}\sqrt{3} + \frac{24}{9}\sqrt{3} = 1\frac{7}{9}\sqrt{3}$

Dus de punten zijn $\left(-\frac{2}{3}, -1\frac{7}{9}\sqrt{3}\right)$ en $\left(-\frac{2}{3}, 1\frac{7}{9}\sqrt{3}\right)$.

b $v(-1) = \sqrt{(x'(-1))^2 + (y'(-1))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

c $x'(t) > 0 \wedge y'(t) < 0$ geeft $2t > 0 \wedge 3t^2 - 4 < 0$

$$t > 0 \wedge 3t^2 < 4$$
$$t > 0 \wedge t^2 < \tfrac{4}{3}$$
$$t > 0 \wedge -\sqrt{\tfrac{4}{3}} < t < \sqrt{\tfrac{4}{3}}$$
$$t > 0 \wedge -\tfrac{2}{3}\sqrt{3} < t < \tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$
$$0 < t < \tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

d $x = 2$ geeft $t^2 - 2 = 2$

$$t^2 = 4$$
$$t = 2 \vee t = -2$$

$t = -2$ geeft $y = (-2)^3 - 4 \cdot -2 = 0$ en $t = 2$ geeft $y = 2^3 - 4 \cdot 2 = 0$.

$t = -2$ geeft het punt (2, 0) en $t = 2$ geeft het punt (2, 0), dus de baan snijdt zichzelf in (2, 0).

$$t = 2 \text{ geeft } \vec{v}(2) = \begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t = -2 \text{ geeft } \vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} x'(-2) \\ y'(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1 - 4|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

Dus $\varphi \approx 53{,}1°$.

76 **a** $x(t) = 0$ geeft $2t - \frac{1}{6}t^3 = 0$

$\frac{1}{6}t(12 - t^2) = 0$

$t = 0 \vee t^2 = 12$

$t = 0 \vee t = 2\sqrt{3} \vee t = -2\sqrt{3}$

$t = 0$ geeft (0, 0),

$t = 2\sqrt{3}$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot 12 - 2 \cdot 2\sqrt{3} = 3 - 4\sqrt{3}$, dus $B\left(0, 3 - 4\sqrt{3}\right)$

en $t = -2\sqrt{3}$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot 12 - 2 \cdot -2\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3}$, dus $A\left(0, 3 + 4\sqrt{3}\right)$.

$d(A, B) = 3 + 4\sqrt{3} - \left(3 - 4\sqrt{3}\right) = 8\sqrt{3}$

b $x'(t) = 2 - \frac{1}{2}t^2$ en $y'(t) = \frac{1}{2}t - 2$

Raaklijn evenwijdig aan de x-as geeft $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$$\tfrac{1}{2}t - 2 = 0 \wedge 2 - \tfrac{1}{2}t^2 \neq 0$$
$$\tfrac{1}{2}t = 2 \wedge \tfrac{1}{2}t^2 \neq 2$$
$$t = 4 \wedge t^2 \neq 4$$
$$t = 4 \wedge t \neq 2 \wedge t \neq -2$$
$$t = 4$$

$t = 4$ geeft $x = 2 \cdot 4 - \frac{1}{6} \cdot 4^3 = -2\frac{2}{3}$ en $y = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 = -4$, dus $\left(-2\frac{2}{3}, -4\right)$.

10

Raaklijn evenwijdig aan de y-as geeft $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

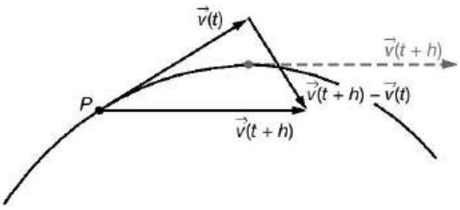
$$2 - \tfrac{1}{2}t^2 = 0 \wedge \tfrac{1}{2}t - 2 \neq 0$$
$$(t = 2 \vee t = -2) \wedge t \neq 4$$
$$t = 2 \vee t = -2$$

$t = 2$ geeft $x = 2 \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 = 2\frac{2}{3}$ en $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -3$ en
$t = -2$ geeft $x = 2 \cdot -2 - \frac{1}{6} \cdot (-2)^3 = -2\frac{2}{3}$ en $y = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot -2 = 5$.
Dus $\left(2\frac{2}{3}, -3\right)$ en $\left(-2\frac{2}{3}, 5\right)$.

c Bij de oorsprong hoort $t = 0$ (zie vraag a).
$v(0) = \sqrt{(x'(0))^2 + (y'(0))^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

d $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}t^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t - 2\right)^2}$
Voer in $y_1 = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2}$.
De optie minimum geeft $x \approx 2{,}11$ en $y \approx 0{,}97$.
Dus de minimale snelheid is 0,97.

77



Bladzijde 98

78 $$a_b(1) = \frac{\vec{v}(1) \cdot \vec{a}(1)}{|\vec{v}(1)|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4-3}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{5}$$

79 $$\left.\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{a_b(t)}{|\vec{a}(t)|} \\ \cos(\varphi) &= \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)| \cdot |\vec{a}(t)|} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \frac{a_b(t)}{|\vec{a}(t)|} &= \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)| \cdot |\vec{a}(t)|} \\ a_b(t) &= \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|} \end{aligned}$$

80 **a** Snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $t^3 - 3t = 0$

$$t(t^2 - 3) = 0$$
$$t = 0 \vee t^2 = 3$$
$$t = 0 \vee t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$$

De baan passeert D twee keer, dus op $t = -\sqrt{3}$ en $t = \sqrt{3}$ en C op $t = 0$.

Snijden met de y-as, dus $x = 0$ geeft $t^2 - 4 = 0$

$$t^2 = 4$$
$$t = 2 \vee t = -2$$

$t = 2$ geeft $y = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$, dus de baan passeert A op $t = 2$ en B op $t = -2$.
Dus de punten worden in de volgorde B, D, C, D, A doorlopen.

b $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \end{pmatrix}$

$$a_b(t) = \frac{\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \end{pmatrix}}{\sqrt{(2t)^2 + (3t^2 - 3)^2}} = \frac{4t + 18t^3 - 18t}{\sqrt{4t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9}} = \frac{18t^3 - 14t}{\sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}}$$

c $|\vec{v}(2)| = \sqrt{(2t)^2 + (3t - 3)^2} = \sqrt{(2 \cdot 2)^2 + (3 \cdot 2^2 - 3)^2} = \sqrt{97}$

$$a_b(2) = \frac{18 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2}{\sqrt{9 \cdot 2^4 - 14 \cdot 2^2 + 9}} = \frac{116}{\sqrt{97}}$$

d $a_b(t) = 0$ geeft $18t^3 - 14t = 0$

$$2t(9t^2 - 7) = 0$$
$$t = 0 \lor t^2 = \tfrac{7}{9}$$
$$t = 0 \lor t = \sqrt{\tfrac{7}{9}} \lor t = -\sqrt{\tfrac{7}{9}}$$
$$t = 0 \lor t = \tfrac{1}{3}\sqrt{7} \lor t = -\tfrac{1}{3}\sqrt{7}$$
vold. vold. vold.

$|\vec{v}(0)| = \sqrt{0+9} = 3$

$|\vec{v}(\tfrac{1}{3}\sqrt{7})| = \sqrt{(2 \cdot \tfrac{1}{3}\sqrt{7})^2 + (3 \cdot \tfrac{7}{9} - 3)^2} = \sqrt{\tfrac{32}{9}} = \sqrt{\tfrac{16}{9}} \cdot \sqrt{2} = 1\tfrac{1}{3}\sqrt{2}$

$|\vec{v}(-\tfrac{1}{3}\sqrt{7})| = \sqrt{(2 \cdot -\tfrac{1}{3}\sqrt{7})^2 + (3 \cdot \tfrac{7}{9} - 3)^2} = 1\tfrac{1}{3}\sqrt{2}$

e $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2 - 3)^2}$

Voer in $y_1 = \sqrt{(2x)^2 + (3x^2 - 3)^2}$.
De optie minimum geeft $y \approx 1{,}886$ voor $x \approx -0{,}882$ en $x \approx 0{,}882$.
Dus de minimale baansnelheid is 1,886.

f $t = \sqrt{3}$ geeft $x = (\sqrt{3})^2 - 4 = -1$ en $y = 0$
$t = -\sqrt{3}$ geeft $x = (-\sqrt{3})^2 - 4 = -1$ en $y = 0$
Dus de baan snijdt zichzelf in $D(-1, 0)$.

$t = \sqrt{3}$ geeft $\vec{v}(\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$ en $t = -\sqrt{3}$ geeft $\vec{v}(-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-12 + 36}{(\sqrt{12+36})^2} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

Dus $\varphi = 60°$.

Bladzijde 99

81 **a** Snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $\tfrac{1}{2}t^2 - 2t = 0$

$$\tfrac{1}{2}t(t-4) = 0$$
$$t = 0 \lor t = 4$$

$t = 0$ geeft $(-2, 0)$, dus A hoort bij $t = 0$ en B hoort bij $t = 4$.
Dus de punten worden in de volgorde C, A, D, B doorlopen.

b $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2}t^2 - 2 \\ \tfrac{1}{2}t^2 - 2t \end{pmatrix}$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t-2 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$a_b(t) = \frac{\begin{pmatrix} t \\ t-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{t^2 + (t-2)^2}} = \frac{t + t - 2}{\sqrt{t^2 + t^2 - 4t + 4}} = \frac{2t - 2}{\sqrt{2t^2 - 4t + 4}}$$

c $\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)$ geeft $a_b(t) = 0$

$$2t - 2 = 0$$
$$t = 1$$
voldoet

$t = 1$ geeft $x = \tfrac{1}{2} - 2 = -1\tfrac{1}{2}$ en $y = \tfrac{1}{2} - 2 = -1\tfrac{1}{2}$, dus $(-1\tfrac{1}{2}, -1\tfrac{1}{2})$.

d $|\vec{v}(t)| = \sqrt{t^2 + (t-2)^2} = \sqrt{t^2 + t^2 - 4t + 4} = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$

$t_{top} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 2} = 1$ geeft $|\vec{v}(1)| = \sqrt{2 - 4 + 4} = \sqrt{2}$

Dus de minimale baansnelheid is $\sqrt{2}$.

10

e B hoort bij $t = 4$, dus $|\vec{v}(4)| = \sqrt{4^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Snijden met de y-as, dus $x = 0$ geeft $\frac{1}{2}t^2 - 2 = 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}t^2 &= 2 \\ t^2 &= 4 \\ t = 2 &\vee t = -2 \end{aligned}$$

Bij C hoort dus $t = -2$ en dit geeft $|\vec{v}(-2)| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Dus de baansnelheden in B en C zijn gelijk.

f $E\left(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ invullen in $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$ geeft $\begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - 2 = -1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t^2 - 2t = 2\frac{1}{2} \end{cases}$ $-$

$$\begin{aligned} 2t - 2 &= -4 \\ 2t &= -2 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Stel k: $ax + by = c$.

$\vec{r}_k = \vec{v}(-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 3x - y = c \\ \text{door } \left(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} c = 3 \cdot -1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = -7$

Dus k: $3x - y = -7$.

82 **a** $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 25t \\ -5t^2 + 15t + 3 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 25 \\ -10t + 15 \end{pmatrix}$

$|\vec{v}(0)| = \sqrt{25^2 + 15^2} \approx 29{,}2$ m/s

b De hoek met de horizon is de hoek met de x-as. Neem $\vec{r}_{x\text{-as}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$, dus $\cos(\varphi) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{25}{\sqrt{850}}$

Dus $\varphi \approx 31{,}0°$.

c $y(t)$ is maximaal voor $t = -\dfrac{15}{2 \cdot -5} = 1\frac{1}{2}$ geeft $y_{max} = -5 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 15 \cdot 1\frac{1}{2} + 3 = 14{,}25$ m

d $y(t) = 0$ geeft $-5t^2 + 15t + 3 = 0$

$$\begin{aligned} & t^2 - 3t - \tfrac{3}{5} = 0 \\ & \left(t - 1\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{5} = 0 \\ & \left(t - 1\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2\tfrac{17}{20} \\ & t - 1\tfrac{1}{2} = \sqrt{2\tfrac{17}{20}} \vee t - 1\tfrac{1}{2} = -\sqrt{2\tfrac{17}{20}} \\ & t = 1\tfrac{1}{2} + \sqrt{2\tfrac{17}{20}} \vee t = 1\tfrac{1}{2} - \sqrt{2\tfrac{17}{20}} \end{aligned}$$

voldoet — voldoet niet

$t = 1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{17}{20}}$ geeft $x = 25\left(1\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{17}{20}}\right) = 79{,}704...$

Dus de speer komt 76,7 m achter de afworplijn neer.

e $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 25 \\ -10t + 15 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

De snelheidsvector is de valversnelling van -10 m/s^2.

Bladzijde 100

83 **a** Snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $t^2 - 4 = 0$

$$\begin{aligned} t^2 &= 4 \\ t = 2 &\vee t = -2 \end{aligned}$$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ 2t \end{pmatrix}$

$t = 2$ geeft $\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $t = -2$ geeft $\vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

De snelheidsvectoren in A en B zijn verticaal, dus de raaklijnen in A en B zijn verticaal.

10

b $y = 5$ geeft $t^2 - 4 = 5$

$$t^2 = 9$$
$$t = 3 \vee t = -3$$

$t = 3$ geeft $x = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 = -3$, dus $t = 3$ hoort bij C.

$\left|\vec{v}(3)\right| = \sqrt{(3^2-4)^2 + (2 \cdot 3)^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ 2t \end{pmatrix}$ geeft $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}$

$$a_b(3) = \frac{\vec{v}(3) \cdot \vec{a}(3)}{\left|\vec{v}(3)\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{61}} = \frac{30 + 12}{\sqrt{61}} = \frac{42}{\sqrt{61}} = \tfrac{42}{61}\sqrt{61}$$

c $$a_b(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(t^2-4)^2 + (2t)^2}} = \frac{2t^3 - 8t + 4t}{\sqrt{t^4 - 8t^2 + 16 + 4t^2}} = \frac{2t^3 - 4t}{\sqrt{t^4 - 4t^2 + 16}}$$

Voer in $y_1 = \dfrac{2x^3 - 4x}{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 16}}$.

Optie minimum geeft $x \approx 0{,}851$ en $y \approx -0{,}588$.
Dus de baanversnelling heeft voor $t \approx 0{,}851$ een minimum van $-0{,}588$.

d Snijden met de y-as, dus $x = 0$ geeft $\frac{1}{3}t^3 - 4t = 0$

$$\tfrac{1}{3}t(t^2 - 12) = 0$$
$$t = 0 \vee t^2 = 12$$
$$t = 0 \vee t = 2\sqrt{3} \vee t = -2\sqrt{3}$$

$t = 2\sqrt{3}$ geeft $y = 12 - 4 = 8$ en $t = -2\sqrt{3}$ geeft $y = 12 - 4 = 8$.
Dus de baan snijdt zichzelf in $D(0, 8)$.

$t = 2\sqrt{3}$ geeft $\vec{v}\left(2\sqrt{3}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $t = -2\sqrt{3}$ geeft $\vec{v}\left(-2\sqrt{3}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right|} = \frac{64 - 48}{(\sqrt{64 + 48})^2} = \frac{16}{112} = \tfrac{1}{7}$$

Dus $\varphi \approx 81{,}8°$.

Diagnostische toets

Bladzijde 102

1 **a** $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left|\vec{c}\right| = 10$

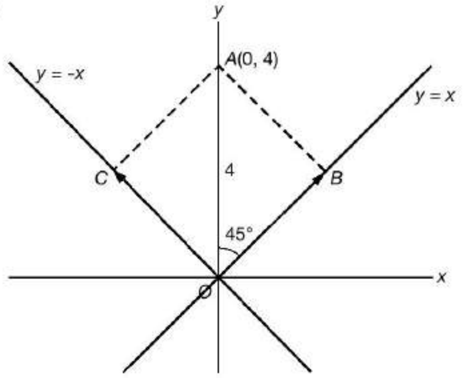
b $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$

c $\vec{e} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\left|\vec{e}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

2



In $\triangle OAB$ is $OA = 4$ en $\angle O = 45°$.

Dus $OB = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Ook $OC = 2\sqrt{2}$, dus de lengte van de componenten is $2\sqrt{2}$.

3 **a**
$$\left.\begin{array}{l} k\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} + \lambda(\vec{c} - \vec{a}) \\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \end{array}\right\} k\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

b M is het midden van BC, dus $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{m} - \vec{a}) \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{m} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\frac{1}{2} \\ -7\frac{1}{2} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c Stel eerst een vectorvoorstelling op van de lijn door AC.

$$\left.\begin{array}{l} n\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{c} - \vec{a}) \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\} n\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Dus een vectorvoorstelling van het lijnstuk AC is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \wedge 0 \le \lambda \le 1$.

4 $x = -2$ geeft $3 + 5\lambda = -2$
$5\lambda = -5$
$\lambda = -1$
$\lambda = -1$ geeft $y = -5 + 2 \cdot -1 = -5 - 2 = -7$
Dus A ligt niet op k.

$x = 13$ geeft $3 + 5\lambda = 13$
$5\lambda = 10$
$\lambda = 2$
$\lambda = 2$ geeft $y = -5 + 2 \cdot 2 = -5 + 4 = -1$
Dus B ligt niet op k.

$x = 23$ geeft $3 + 5\lambda = 23$
$5\lambda = 20$
$\lambda = 4$
$\lambda = 4$ geeft $y = -5 + 2 \cdot 4 = -5 + 8 = 3$
Dus C ligt op k.

5 **a** $\begin{cases} x = 3 + 6\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 6 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x \;\;\;= 3 + 6\lambda \\ 6y = 24 - 6\lambda \end{cases}$ +
$\overline{x + 6y = \;27}$

Dus k: $x + 6y - 27 = 0$.

$d(A, k) = \dfrac{|4 + 6 \cdot 3 - 27|}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = \dfrac{|-5|}{\sqrt{37}} = \dfrac{5}{\sqrt{37}} = \frac{5}{37}\sqrt{37}$

b $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x \;\;= 3t + 2 \\ 3y = 3t - 12 \end{cases}$ −
$\overline{x - 3y = 14}$

Dus l: $x - 3y - 14 = 0$.

$d(B, l) = \dfrac{|4 - 3 \cdot 1 - 14|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{|-13|}{\sqrt{10}} = \dfrac{13}{\sqrt{10}} = 1\frac{3}{10}\sqrt{10}$

c m: $y = x + 3$ ofwel m: $x - y + 3 = 0$ geeft $d(C, m) = \dfrac{|5 - 4 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

6 Stel k: $y = ax + b$ \
Door $A(3, 2)$ $\Big\}$ $a \cdot 3 + b = 2$ \
$b = -3a + 2$

Dus k: $y = ax - 3a + 2$ ofwel k: $ax - y - 3a + 2 = 0$.

$d(B, k) = \sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|8a - 7 - 3a + 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$

$\dfrac{|5a - 5|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$

$|5a - 5| = \sqrt{5a^2 + 5}$

$25a^2 - 50a + 25 = 5a^2 + 5$

$20a^2 - 50a + 20 = 0$

$a^2 - 2\frac{1}{2} + 1 = 0$

$\left(a - \frac{1}{2}\right)(a - 2) = 0$

$a = \frac{1}{2} \vee a = 2$

Dus k_1: $y = \frac{1}{2}x - 3 \cdot \frac{1}{2} + 2$ ofwel k_1: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ en k_2: $y = 2x - 3 \cdot 2 + 2$ ofwel k_2: $y = 2x - 4$.

7 **a** $x^2 + y^2 = 10$, dus $M(0, 0)$ en $r = \sqrt{10}$.

Stel k: $y = ax + b$ \
door $(-1, -3)$ $\Big\}$ $-a + b = -3$ \
$b = a - 3$

Dus k: $y = ax + a - 3$ ofwel k: $ax - y + a - 3 = 0$.

$d(M, k) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|a - 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$|a - 3| = \sqrt{10a^2 + 10}$

$a^2 - 6a + 9 = 10a^2 + 10$

$9a^2 + 6a + 1 = 0$

$(3a + 1)^2 = 0$

$3a = -1$

$a = -\frac{1}{3}$

Dus k: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - 3$ ofwel k: $y = -\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$.

b Stel l: $y = 3x + b$ ofwel l: $3x - y + b = 0$.

$d(M, l) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$|b| = 10$

$b = 10 \vee b = -10$

Dus l_1: $y = 3x + 10$ en l_2: $y = 3x - 10$.

c Stel $m: y = ax + b$.

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } (4, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4a + b = 2 \\ b = 2 - 4a \end{array}$$

Dus $m: y = ax + 2 - 4a$ ofwel $m: ax - y + 2 - 4a = 0$.

$d(M, m) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|2 - 4a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$$\begin{array}{l} |-4a + 2| = \sqrt{10a^2 + 10} \\ 16a^2 - 16a + 4 = 10a^2 + 10 \\ 6a^2 - 16a - 6 = 0 \\ a^2 - 2\tfrac{2}{3}a - 1 = 0 \\ (a - 3)(a + \tfrac{1}{3}) = 0 \\ a = 3 \vee a = -\tfrac{1}{3} \end{array}$$

Dus $m_1: y = 3x + 2 - 4 \cdot 3$ ofwel $m_1: y = 3x - 10$ en $m_2: y = -\frac{1}{3}x + 2 - 4 \cdot -\frac{1}{3}$ ofwel $m_2: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

d n staat loodrecht op $p: 3x + y - 5 = 0$ ofwel $p: 3x + y = 5$, dus $n: x - 3y = c$.

$d(M, n) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|-c|}{\sqrt{1 + 9}} = \sqrt{10}$

$$\begin{array}{l} |-c| = 10 \\ -c = 10 \vee -c = -10 \\ c = -10 \vee c = 10 \end{array}$$

Dus $l_1: x - 3y = -10$ en $l_2: x - 3y = 10$.

Bladzijde 103

8 **a** $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{r}_{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\cos(\angle(AB, BC)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-42 - 5|}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{74}} = \frac{47}{\sqrt{2738}}$$

Dus $\angle(AB, BC) \approx 26{,}1°$.

b $\vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\cos(\angle(AB, AC)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-6 - 4|}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{629}}$$

Dus $\angle(AB, AC) \approx 66{,}5°$.

9 **a** $\vec{r}_k = \vec{r}_l = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} n: 3x + 5y = c \\ \text{door } (3, 4) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 29$$

Dus $n: 3x + 5y = 29$.

b $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ op m, dus $\vec{s}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$m \perp n$, dus $\vec{r}_m = \vec{n}_n = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Dus $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10

c $p \perp r$, dus p: $4x - y = c$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ $c = 4 \cdot -2 - 3 = -11$
door $(-2, 3)$
Dus p: $4x - y = -11$.

10 Substitutie van $x = -2 + 2\lambda$ en $y = 3 - \lambda$ in l: $2x - 3y = 22$ geeft

$$\begin{aligned} 2(-2 + 2\lambda) - 3(3 - \lambda) &= 22 \\ -4 + 4\lambda - 9 + 3\lambda &= 22 \\ 7\lambda &= 35 \\ \lambda &= 5 \end{aligned}$$

$\lambda = 5$ geeft $x = -2 + 2 \cdot 5 = 8$ en $y = 3 - 5 = -2$, dus $S(8, -2)$.

11

$$\overrightarrow{CM} = \vec{m} - \vec{c} = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - c \\ -d \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - a \\ d \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - b \\ d \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}_L = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c - a \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d \\ c - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - d \\ -a + c + d \end{pmatrix}$$

$$\vec{h} = \vec{b} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} = \vec{b} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}_R = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c - b \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + d \\ b - c + d \end{pmatrix}$$

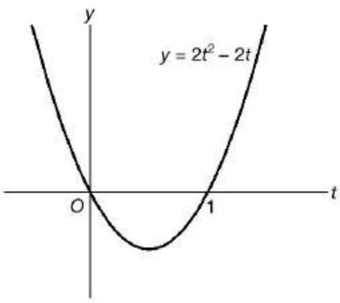
$$\overrightarrow{DH} = \vec{h} - \vec{d} = \begin{pmatrix} c + d \\ b - c + d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c - d \\ -a + c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d \\ a + b - 2c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} d \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - c \end{pmatrix}$$

Dus $CM \perp DH$ en $DH = 2 \cdot CM$.

12 **a** $x'(t) = 4 - 2t$ en $y'(t) = 2t^2 - 2t$

$$\begin{aligned} x'(t) > 0 \text{ geeft } 4 - 2t &> 0 \\ -2t &> -4 \\ t &< 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t) > 0 \text{ geeft } 2t^2 - 2t &> 0 \\ 2t(t - 1) &> 0 \end{aligned}$$



$t < 0 \vee t > 1$
$t < 2 \wedge (t < 0 \vee t > 1)$ geeft $t < 0 \vee 1 < t < 2$
Dus voor $t < 0 \vee 1 < t < 2$ beweegt P naar rechts en omhoog.

b $y'(t) = 0$ geeft $t = 0 \vee t = 1$ (zie vraag a) met de bijbehorende punten $(0, 0)$ en $\left(3, -\frac{1}{3}\right)$.
$x'(t) = 0$ geeft $t = 2$ (zie vraag a) met het bijbehorende punt $\left(4, 1\frac{1}{3}\right)$.
Dus evenwijdig aan de x-as in $(0, 0)$ en $\left(3, -\frac{1}{3}\right)$ en evenwijdig aan de y-as in $\left(4, 1\frac{1}{3}\right)$.

c Snijden met x-as, dus $y = 0$ geeft

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}t^3 - t^2 &= 0 \\ t^2\left(\tfrac{2}{3}t - 1\right) &= 0 \\ t = 0 \vee \tfrac{2}{3}t &= 1 \\ t = 0 \vee \quad t &= 1\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

vold. niet vold.

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(4 - 2t)^2 + (2t^2 - 2t)^2}$$

$$\left|\vec{v}\left(1\tfrac{1}{2}\right)\right| = \sqrt{(4 - 3)^2 + \left(4\tfrac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{1 + 2\tfrac{1}{4}} = \sqrt{3\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{13}$$

d Voer in $y_1 = \sqrt{(4 - 2x)^2 + (2x^2 - 2x)^2}$.
De optie minimum geeft $x = 1{,}317...$ en $y = 1{,}600...$
Dus de minimale snelheid van P is ongeveer 1,60.

e $x''(t) = -2$ en $y''(t) = 4t - 2$, dus $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4t - 2 \end{pmatrix}$

$\vec{a}(t)$ evenwijdig met de x-as geeft $4t - 2 = 0$

$$4t = 2$$
$$t = \tfrac{1}{2}$$

$x\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\frac{3}{4}$ en $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{6}$

Dus in het punt $\left(1\frac{3}{4}, -\frac{1}{6}\right)$.

f $a_b(3) = \dfrac{\vec{v}(3) \cdot \vec{a}(3)}{|\vec{v}(3)|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{4 + 120}{\sqrt{4 + 144}} = \dfrac{124}{\sqrt{148}} = 1\frac{25}{37}\sqrt{37}$

11 Integraalrekening

Voorkennis Herleiden

Bladzijde 106

1 **a** $\frac{10}{2\frac{1}{2}}x^{2\frac{1}{2}} = 4x^2 \cdot \sqrt{x}$

b $\frac{30}{1\frac{1}{4}}x^{1\frac{1}{4}} = 30 \cdot \frac{4}{5} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{4}} = 24x \cdot \sqrt[4]{x}$

c $\frac{14}{2\frac{1}{3}}x^{2\frac{1}{3}} = 14 \cdot \frac{3}{7} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 6x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $\frac{3}{-1\frac{1}{2}}x^{-1\frac{1}{2}} = -2 \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{x\sqrt{x}}$

e $\frac{5}{-2\frac{1}{5}}x^{-2\frac{1}{5}} = 5 \cdot -\frac{5}{11} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{5}}} = -\frac{25}{11x^2 \cdot x^{\frac{1}{5}}} = -\frac{25}{11x^2 \cdot \sqrt[5]{x}}$

f $\frac{8\frac{1}{2}}{-3\frac{1}{3}}x^{-3\frac{1}{3}} = \frac{17}{2} \cdot -\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{x^{3\frac{1}{3}}} = -\frac{51}{20x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{51}{20x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

Bladzijde 107

2 **a** $f(x) = x\ln(x) - x$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

b $f(x) = x\sqrt{4x-3}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{4x-3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x-3}} \cdot 4 = \sqrt{4x-3} + \frac{2x}{\sqrt{4x-3}} = \frac{4x-3}{\sqrt{4x-3}} + \frac{2x}{\sqrt{4x-3}} = \frac{6x-3}{\sqrt{4x-3}}$

c $f(x) = \frac{e^{4x}-5}{2e^{3x}}$ geeft $f'(x) = \frac{2e^{3x} \cdot 4e^{4x} - (e^{4x}-5) \cdot 6e^{3x}}{(2e^{3x})^2} = \frac{8e^{7x} - 6e^{7x} + 30e^{3x}}{4e^{6x}} = \frac{2e^{7x} + 30e^{3x}}{4e^{6x}} = \frac{e^{4x}+15}{2e^{3x}}$

d $f(x) = x^2\ln^2(x) - x^2\ln(x)$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \ln^2(x) + x^2 \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 2x \cdot \ln(x) - x^2 \cdot \frac{1}{x} =$
$2x\ln^2(x) + 2x\ln(x) - 2x\ln(x) - x = 2x\ln^2(x) - x$

e $f(x) = 6x^2\sqrt{x^2+1}$ geeft $f'(x) = 12x \cdot \sqrt{x^2+1} + 6x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = 12x\sqrt{x^2+1} + \frac{6x^3}{\sqrt{x^2+1}} =$
$\frac{12x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{6x^3}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{12x^3+12x+6x^3}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{18x^3+12x}{\sqrt{x^2+1}}$

f $f(x) = \frac{5 \cdot 2^x}{\ln(2)} - \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \frac{5}{\ln(2)} \cdot 2^x - (e^x - e^{-x}) = \frac{5}{\ln(2)} \cdot 2^x - e^x + e^{-x}$ geeft
$f'(x) = \frac{5}{\ln(2)} \cdot 2^x \cdot \ln(2) - e^x - e^{-x} = 5 \cdot 2^x - \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) = 5 \cdot 2^x - \frac{e^{2x}+1}{e^x}$

3 **a** $f(4) - f(p) = \pi\left(p^2 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 4^3\right) - \pi\left(p^2 \cdot p - \frac{1}{3} \cdot p^3\right) = \pi\left(4p^2 - 21\frac{1}{3}\right) - \pi\left(p^3 - \frac{1}{3}p^3\right) =$
$\pi\left(4p^2 - 21\frac{1}{3}\right) - \pi \cdot \frac{2}{3}p^3 = \pi\left(-\frac{2}{3}p^3 + 4p^2 - 21\frac{1}{3}\right)$

b $f(2p) - f(p) = \pi\left(p^2 \cdot 2p - \frac{1}{3} \cdot (2p)^3\right) - \pi\left(p^2 \cdot p - \frac{1}{3} \cdot p^3\right) = \pi\left(2p^3 - \frac{1}{3} \cdot 8p^3\right) - \pi\left(p^3 - \frac{1}{3}p^3\right) =$
$\pi\left(2p^3 - 2\frac{2}{3}p^3 - p^3 + \frac{1}{3}p^3\right) = -1\frac{1}{3}\pi p^3$

c $f\left(\frac{3}{4}p\right) - f\left(\frac{1}{2}p\right) = \pi\left(p^2 \cdot \frac{3}{4}p - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}p\right)^3\right) - \pi\left(p^2 \cdot \frac{1}{2}p - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}p\right)^3\right) =$
$\pi\left(\frac{3}{4}p^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{64}p^3\right) - \pi\left(\frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}p^3\right) = \pi\left(\frac{3}{4}p^3 - \frac{9}{64}p^3\right) - \pi\left(\frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{24}p^3\right) = \pi\left(\frac{39}{64}p^3 - \frac{11}{24}p^3\right) = \frac{29}{192}\pi p^3$

d $f\left(\frac{1}{3}p\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) = \pi\left(p^2 \cdot \frac{1}{3}p - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}p\right)^3\right) - \pi\left(p^2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) = \pi\left(\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27}p^3\right) - \pi\left(\frac{1}{3}p^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27}\right) =$
$\pi\left(\frac{26}{81}p^3 - \frac{1}{3}p^2 + \frac{1}{81}\right)$

11

11.1 Primitieven en integralen

Bladzijde 108

1 **a** $g(x) = x^3 + c$ geeft $g'(x) = 3x^2$ en dit is $f(x)$.

b $\left.\begin{array}{l} g(x) = x^3 + c \\ g(2) = 15 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 2^3 + c = 15 \\ 8 + c = 15 \\ c = 7 \end{array}$

Dus $c = 7$.

Bladzijde 109

2 **a** $F(x) = (x^2+1)^6 + 1$ geeft $F'(x) = 6 \cdot (x^2+1)^5 \cdot 2x = 12x(x^2+1)^5$

Dus $F'(x) = f(x)$ ofwel F is een primitieve van f.

b $G(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} - 2$ geeft $G'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) \cdot 2e^{2x} = \left(\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{2x} = xe^{2x}$

Dus $G'(x) = g(x)$ ofwel G is een primitieve van g.

c $H(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + 3$ geeft $H'(x) = 2\ln(x) \cdot \dfrac{1}{x} + 2 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln(x) + 2}{x}$

Dus $H'(x) = h(x)$ ofwel H is een primitieve van h.

d $J(x) = \dfrac{e^{3x} - 10}{2e^x} - 4$ geeft $J'(x) = \dfrac{2e^x \cdot 3e^{3x} - (e^{3x} - 10) \cdot 2e^x}{(2e^x)^2} = \dfrac{6e^{4x} - 2e^{4x} + 20e^x}{4e^{2x}} = \dfrac{4e^{4x} + 20e^x}{4e^{2x}} = \dfrac{e^{3x} + 5}{e^x}$

Dus $J'(x) = j(x)$ ofwel J is een primitieve van j.

e $K(x) = \sin^3(x)$ geeft $K'(x) = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x) = 3(1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) = 3\cos(x) - 3\cos^3(x)$

Dus $K'(x) = k(x)$ ofwel K is een primitieve van k.

3 **a** $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ geeft $F'(x) = x^4$

Dus $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ is een primitieve van $f(x) = x^4$.

b $G(x) = \frac{1}{4}e^{4x+1}$ geeft $G'(x) = \frac{1}{4}e^{4x+1} \cdot 4 = e^{4x+1}$

Dus $G(x) = \frac{1}{4}e^{4x+1}$ is een primitieve van $g(x) = e^{4x+1}$.

c $H(x) = \dfrac{3^x}{\ln(3)} = \dfrac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x$ geeft $H'(x) = \dfrac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x \cdot \ln(3) = 3^x$

Dus $H(x) = \dfrac{3^x}{\ln(3)}$ is een primitieve van $h(x) = 3^x$.

d $J(x) = x\ln(x)$ geeft $J'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$

Dus $J(x) = x\ln(x)$ is een primitieve van $j(x) = \ln(x) + 1$.

e $K(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ geeft $K'(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \cos(2x)$

Dus $K(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ is een primitieve van $k(x) = \cos(2x)$.

Bladzijde 110

11

4 $F(x) = \dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ geeft $F'(x) = \dfrac{a}{n+1} \cdot (n+1)x^n = ax^n$

Dus $F(x) = \dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ zijn de primitieven van $f(x) = ax^n$.

$F(x) = \dfrac{g^x}{\ln(g)} + c = \dfrac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$ geeft $F'(x) = \dfrac{1}{\ln(g)} \cdot g^x \cdot \ln(g) = g^x$

Dus $F(x) = \dfrac{g^x}{\ln(g)} + c$ zijn de primitieven van $f(x) = g^x$.

$F(x) = e^x + c$ geeft $F'(x) = e^x$

Dus $F(x) = e^x + c$ zijn de primitieven van $f(x) = e^x$.

$F(x) = \ln|x| + c$ geeft $F'(x) = \dfrac{1}{x}$

Dus $F(x) = \ln|x| + c$ zijn de primitieven van $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$F(x) = x\ln(x) - x + c$ geeft $F'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

Dus $F(x) = x\ln(x) - x + c$ zijn de primitieven van $f(x) = \ln(x)$.

$F(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$ geeft $F'(x) = \dfrac{1}{\ln(g)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1\right) = \dfrac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(g)} = {}^{g}\log(x)$

Dus $F(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$ zijn de primitieven van $f(x) = {}^{g}\log(x)$.

$F(x) = -\cos(x) + c$ geeft $F'(x) = \sin(x)$

Dus $F(x) = -\cos(x) + c$ zijn de primitieven van $f(x) = \sin(x)$.

$F(x) = \sin(x) + c$ geeft $F'(x) = \cos(x)$

Dus $F(x) = \sin(x) + c$ zijn de primitieven van $f(x) = \cos(x)$.

5 **a** $f(x) = ax^{-1}$ geeft $F(x) = \dfrac{a}{-1+1}x^{-1+1} + c$ kan niet kloppen, want $\dfrac{a}{-1+1} = \dfrac{a}{0}$ bestaat niet en $x^0 = 1$ voor $x \neq 0$.

b $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$

c $[a \cdot F]' = a \cdot F' = a \cdot f$

Dus als F een primitieve is van f, dan is $a \cdot F$ een primitieve van $a \cdot f$.

6 **a** $f(x) = 6x^2$ geeft $F(x) = \frac{1}{3} \cdot 6x^3 + c = 2x^3 + c$

b $f(x) = 2x^3 + 5x^4$ geeft $F(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x^4 + \frac{1}{5} \cdot 5x^5 + c = \frac{1}{2}x^4 + x^5 + c$

c $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x}{2x^3} = \dfrac{x^4}{2x^3} - \dfrac{2x}{2x^3} = \frac{1}{2}x - x^{-2}$ geeft $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + x^{-1} + c = \frac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{x} + c$

d $f(x) = 10^x$ geeft $F(x) = \dfrac{10^x}{\ln(10)} + c$

e $f(x) = 5 \cdot 2^x$ geeft $F(x) = 5 \cdot \dfrac{2^x}{\ln(2)} + c = \dfrac{5 \cdot 2^x}{\ln(2)} + c$

f $f(x) = x^2 + \sin(x)$ geeft $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \cos(x) + c$

g $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^4} = \dfrac{1}{x} + 2x^{-4}$ geeft $F(x) = \ln|x| + \dfrac{2}{-3}x^{-3} + c = \ln|x| - \dfrac{2}{3x^3} + c$

h $f(x) = x\sqrt{x} - 2\cos(x) = x^{1\frac{1}{2}} - 2\cos(x)$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{2\frac{1}{2}}x^{2\frac{1}{2}} - 2\sin(x) + c = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sin(x) + c$

7 **a** $f(x) = x^3 - 3x$ geeft $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 1\frac{1}{2}x^2 + c$

b $f(x) = 5\mathrm{e}^x$ geeft $F(x) = 5\mathrm{e}^x + c$

c $f(x) = \dfrac{x^4 - 6}{2x^3} = \frac{1}{2}x - 3x^{-3}$ geeft $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x^{-2} + c = \frac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{2x^2} + c$

d $f(x) = 3^x + x^3$ geeft $F(x) = \dfrac{3^x}{\ln(3)} + \frac{1}{4}x^4 + c$

e $f(x) = 2\ln(x)$ geeft $F(x) = 2(x\ln(x) - x) + c = 2x\ln(x) - 2x + c$

f $f(x) = \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$ geeft $F(x) = \ln(2) \cdot x + x\ln(x) - x + c = x\ln(2) + x\ln(x) - x + c$

Bladzijde 111

8 **a** $f(x) = \mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^x$ geeft $F(x) = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^{x+1} + c$

b $f(x) = \dfrac{8}{x^3} = 8x^{-3}$ geeft $F(x) = \dfrac{8}{-2} \cdot x^{-2} + c = -\dfrac{4}{x^2} + c$

c $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x^4} = -x^{-2} + 2x^{-3} + 3x^{-4}$ geeft $F(x) = x^{-1} - x^{-2} - x^{-3} + c = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + c$

d $f(x) = \ln\left(x\sqrt{x}\right) = \ln\left(x^{1\frac{1}{2}}\right) = 1\frac{1}{2}\ln(x)$ geeft $F(x) = 1\frac{1}{2}(x\ln(x) - x) + c = 1\frac{1}{2}x\ln(x) - 1\frac{1}{2}x + c$

e $f(x) = {}^{2}\log\left(\dfrac{1}{x}\right) = {}^{2}\log(x^{-1}) = -{}^{2}\log(x)$ geeft $F(x) = -\dfrac{1}{\ln(2)}(x\ln(x) - x) + c = -\dfrac{x\ln(x) - x}{\ln(2)} + c$

f $f(x) = {}^{5}\log(2x) = {}^{5}\log(2) + {}^{5}\log(x)$ geeft

$F(x) = {}^{5}\log(2) \cdot x + 5 \cdot \dfrac{1}{\ln(10)} \cdot (x\ln(x) - x) + c = 5x\log(2) + \dfrac{5x\ln(x) - 5x}{\ln(10)} + c$

9 **a** $f(x) = 2x - 3$ geeft $F(x) = x^2 - 3x + c$

b $\left.\begin{array}{l} F(x) = x^2 - 3x + c \\ \text{door } (1, 2) \end{array}\right\}\ 1^2 - 3 \cdot 1 + c = 2$

$1 - 3 + c = 2$

$c = 4$

Dus $F(x) = x^2 - 3x + 4$.

11

c De grafiek van $F(x) = x^2 - 3x + c$ raakt de x-as, dus $D = 0$

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$$
$$9 - 4c = 0$$
$$-4c = -9$$
$$c = 2\tfrac{1}{4}$$

Dus $F(x) = x^2 - 3x + 2\frac{1}{4}$.

10 $f(x) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ geeft $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + c$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + c \\ \text{door } (1, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 + c = 7 \\ c = 6\frac{7}{15} \end{array}$$

Dus $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + 6\frac{7}{15}$.

11 $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ geeft

$F'(x) = (2ax + b) \cdot e^{2x} + (ax^2 + bx + c) \cdot 2\,e^{2x} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c)e^{2x}$

Dit moet gelijk zijn aan $f(x) = x^2 e^{2x}$, dus $2a = 1 \wedge 2a + 2b = 0 \wedge b + 2c = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 2a = 1 \text{ geeft } a = \frac{1}{2} \\ 2a + 2b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot \frac{1}{2} + 2b = 0 \\ 2b = -1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} b = -\frac{1}{2} \\ b + 2c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} + 2c = 0 \\ 2c = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ en $c = \frac{1}{4}$.

Bladzijde 112

12 **a** $O(p) = O(\text{rechthoek}) + O(\text{driehoek}) = p \cdot b + \frac{1}{2} \cdot p \cdot (ap + b - b) = bp + \frac{1}{2}p \cdot ap = \frac{1}{2}ap^2 + bp$

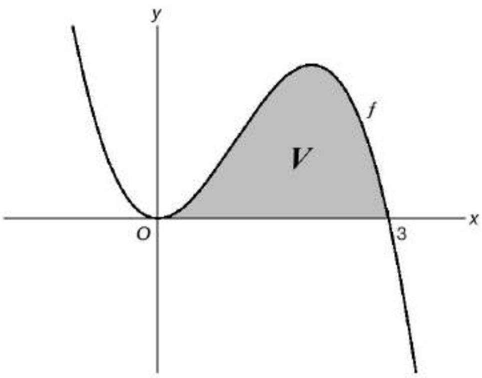
b $O'(p) = ap + b$

Dus $O'(p) = f(p)$.

Bladzijde 113

13 **a** $f(x) = 0$ geeft $3x^2 - x^3 = 0$

$$x^2(3 - x) = 0$$
$$x = 0 \vee x = 3$$



$$O(V) = \int_0^3 (3x^2 - x^3)\,dx = \left[x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^3 = 3^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 3^4 - (0 - 0) = 27 - 20\tfrac{1}{4} = 6\tfrac{3}{4}$$

b $\int_0^p (3x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{4}$

$$\left[x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^p = 3\tfrac{3}{8}$$
$$p^3 - \tfrac{1}{4}p^4 - (0 - 0) = 3\tfrac{3}{8}$$
$$p^3 - \tfrac{1}{4}p^4 = 3\tfrac{3}{8}$$

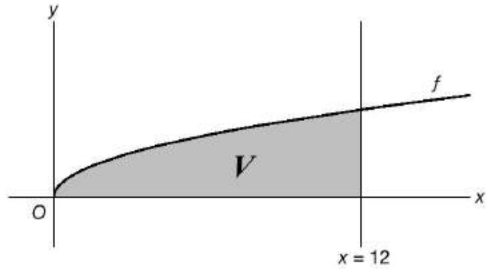
Voer in $y_1 = x^3 - \frac{1}{4}x^4$ en $y_2 = 3\frac{3}{8}$.

Intersect geeft $x \approx 1{,}84$ en $x \approx 3{,}74$.

Dus $p \approx 1{,}84$.

Bladzijde 114

14 **a**



$$O(V) = \int_0^{12} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{12} x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}}\right]_0^{12} = \left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{12} = \tfrac{2}{3}\cdot 12\sqrt{12} - 0 = 8\sqrt{12} = 16\sqrt{3}$$

b $O(V) = 18$

$\int_0^{p} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 18$

$\left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{p} = 18$

$\tfrac{2}{3}p\sqrt{p} = 18$

$p\sqrt{p} = 27$

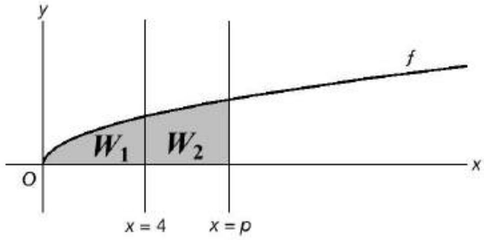
kwadrateren geeft

$p^3 = 729$

$p = 9$

vold.

c



$O(W_1) = O(W_2)$

$\int_0^{4} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_4^{p} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

$\left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{4} = \left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_4^{p}$

$\tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - 0 = \tfrac{2}{3}p\sqrt{p} - \tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4}$

$\tfrac{2}{3}p\sqrt{p} = 2\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4}$

$p\cdot\sqrt{p} = 16$

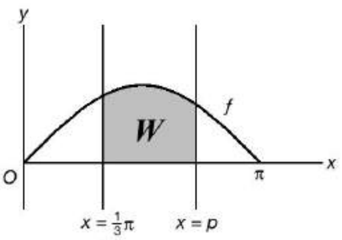
kwadrateren geeft

$p^3 = 256$

$p = \sqrt[3]{256}$

vold.

15



$O(W) = \tfrac{1}{2}O(V)$

$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{p} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

$[-\cos(x)]_{\frac{1}{3}\pi}^{p} = \tfrac{1}{2}[-\cos(x)]_0^{\pi}$

$-\cos(p) + \cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2}(-\cos(\pi) + \cos(0))$

$-\cos(p) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + 1)$

$-\cos(p) + \tfrac{1}{2} = 1$

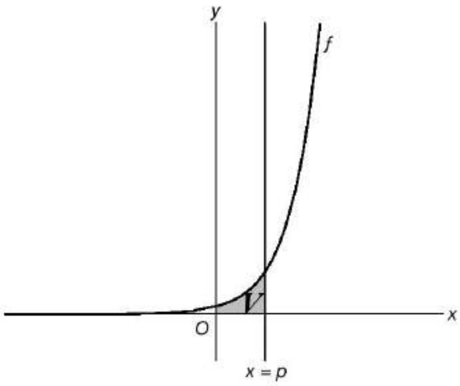
$-\cos(p) = \tfrac{1}{2}$

$\cos(p) = -\tfrac{1}{2}$

$p = \tfrac{2}{3}\pi$

11

16 a



$O(V) = 5$

$\int_0^p e^x \, dx = 5$

$[e^x]_0^p = 5$

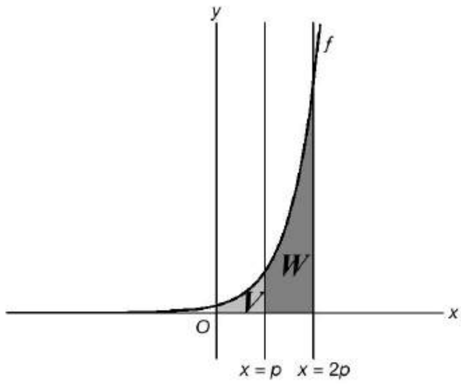
$e^p - e^0 = 5$

$e^p - 1 = 5$

$e^p = 6$

$p = \ln(6)$

b



$O(W) = 2 \cdot O(V)$

$\int_p^{2p} e^x \, dx = 2\int_0^p e^x \, dx$

$[e^x]_p^{2p} = 2[e^x]_0^p$

$e^{2p} - e^p = 2(e^p - e^0)$

$e^{2p} - e^p = 2e^p - 2$

$(e^p)^2 - 3e^p + 2 = 0$

Stel $e^p = u$.

$u^2 - 3u + 2 = 0$

$(u-1)(u-2) = 0$

$u = 1 \vee u = 2$

$e^p = 1 \vee e^p = 2$

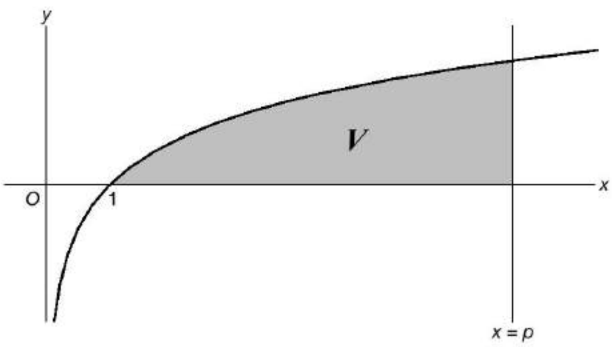
$p = 0 \quad \vee \quad p = \ln(2)$

vold. niet vold.

Dus $p = \ln(2)$.

Bladzijde 115

17 a



$O(V) = \int_1^{e^2} \ln(x) \, dx = \left[x\ln(x) - x\right]_1^{e^2} = e^2 \ln(e^2) - e^2 - (\ln(1) - 1) = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$

b $O(V) = 10$

$\int_1^p \ln(x) \, dx = 10$

$[x \ln x - x]_1^p = 10$

$p\ln(p) - p - (\ln(1) - 1) = 10$

$p\ln(p) - p + 1 = 10$

$p\ln(p) - p = 9$

Voer in $y_1 = x\ln(x) - x$ en $y_2 = 9$.

Intersect geeft $x \approx 8{,}174$.

Dus $p \approx 8{,}174$.

11.2 Oppervlakten

Bladzijde 117

18 **a** $F(x) = a(3x+1)^6 + c$ geeft $F'(x) = 6a(3x+1)^5 \cdot 3 = 18a(3x+1)^5$

b $F'(x) = 18a(3x+1)^5$ moet gelijk zijn aan $f(x) = (3x+1)^5$, dus $18a = 1$ en dit geeft $a = \frac{1}{18}$.

19 $\left[\dfrac{1}{a}F(ax+b)+c\right]' = \dfrac{1}{a} \cdot f(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$

Dus $\dfrac{1}{a}F(ax+b)+c$ zijn de primitieven van $f(ax+b)$.

Bladzijde 118

20 **a** $f(x) = (ax+b)^n$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c$

b $f(x) = g^{ax+b}$ geeft $F(x) = \dfrac{g^{ax+b}}{a\ln(g)} + c$

c $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

d $f(x) = \ln(ax+b)$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{a}((ax+b)\ln(ax+b) - (ax+b)) + c$

e $f(x) = {}^g\log(ax+b)$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{a\ln(g)}((ax+b)\ln(ax+b) - (ax+b)) + c$

f $f(x) = \cos(ax+b)$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

21 **a** $f(x) = \dfrac{3}{(2x-1)^4} = 3(2x-1)^{-4}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{-3}(2x-1)^{-3} + c = -\dfrac{1}{2(2x-1)^3} + c$

b $f(x) = (4x+3)\sqrt{4x+3} = (4x+3)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2\frac{1}{2}}(4x+3)^{2\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{10}(4x+3)^2 \cdot \sqrt{4x+3} + c$

c $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right)$ geeft $F(x) = -\frac{2}{3}\cos\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right) + c$

d $f(x) = x^2 - \ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ geeft $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\left(\left(\frac{1}{2}x+1\right)\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right) + c = \frac{1}{3}x^3 - (x+2)\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right) + x + 2 + c$

e $f(x) = \dfrac{6}{3x+1}$ geeft $F(x) = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \ln|3x+1| + c = 2\ln|3x+1| + c$

f $f(x) = e^{4x+1} - 4^{ex}$ geeft $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x+1} - \dfrac{1}{e\ln(4)} \cdot 4^{ex} + c = \frac{1}{4}e^{4x+1} - \dfrac{4^{ex}}{e\ln(4)} + c$

g $f(x) = 5\log(3x+2)$ geeft $F(x) = \dfrac{5}{3\ln(10)}((3x+2)\ln(3x+2) - (3x+2)) + c = \dfrac{(15x+10)\ln(3x+2) - 15x - 10}{3\ln(10)} + c$

h $f(x) = 3x - \cos(3x+1)$ geeft $F(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$

22 **a** $f(x) = (2x-1)^6$ geeft $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}(2x-1)^7 + c = \frac{1}{14}(2x-1)^7 + c$

b $g(x) = \dfrac{1}{(3x+4)^3} = (3x+4)^{-3}$ geeft $G(x) = \frac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{-2}(3x+4)^{-2} + c = -\dfrac{1}{6(3x+4)^2} + c$

c $h(x) = 4\sqrt{3-2x} = 4(3-2x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $H(x) = \dfrac{4}{-2} \cdot \frac{2}{3}(3-2x)^{1\frac{1}{2}} + c = -1\frac{1}{3}(3-2x)\sqrt{3-2x} + c$

d $j(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}} = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $J(x) = -2 \cdot 2(1-x)^{\frac{1}{2}} + c = -4\sqrt{1-x} + c$

23 **a** $f(x) = 4\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ geeft $F(x) = -3 \cdot 4\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + c = -12\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + c$

b $g(x) = x^2 - 5\cos(2x)$ geeft $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2} \cdot 5\sin(2x) + c = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{1}{2}\sin(2x) + c$

c $h(x) = \sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$ geeft $H(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) + c$

d $j(x) = 3\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right)$ geeft $J(x) = 2 \cdot 3\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right) + c = 6\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right) + c$

24 **a** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ geeft $F(x) = \ln|x-1| + c$

b $f(x) = \dfrac{3}{2x-5}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2} \cdot 3\ln|2x-5| + c = 1\frac{1}{2}\ln|2x-5| + c$

c $f(x) = e^{4x-1}$ geeft $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x-1} + c$

d $f(x) = \ln(4x-1)$ geeft $F(x) = \frac{1}{4}((4x-1)\ln(4x-1) - (4x-1)) + c = \left(x - \frac{1}{4}\right)\ln(4x-1) - x + \frac{1}{4} + c$

e $f(x) = (2x+1)\sqrt{2x+1} = (2x+1)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}(2x+1)^{2\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{5}(2x+1)^2 \cdot \sqrt{2x+1} + c$

f $f(x) = 2^{3x}$ geeft $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \dfrac{2^{3x}}{\ln(2)} + c = \dfrac{2^{3x}}{3\ln(2)} + c$

g $f(x) = 3^{2-5x}$ geeft $F(x) = -\frac{1}{5} \cdot \dfrac{3^{2-5x}}{\ln(3)} + c = -\dfrac{3^{2-5x}}{5\ln(3)} + c$

h $f(x) = {}^2\log(5x+3)$ geeft $F(x) = \frac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot ((5x+3)\ln(5x+3) - (5x+3)) + c = \dfrac{(5x+3)\ln(5x+3) - (5x+3)}{5\ln(2)} + c$

25 **a** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \left(2x + \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)\mathrm{d}x = \left[x^2 + 2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right]_0^{\frac{1}{3}\pi} = \left(\tfrac{1}{3}\pi\right)^2 + 2\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) - (0+0) = \tfrac{1}{9}\pi^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{9}\pi^2 + 1$

b $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \left(x^2 - 2\sin\left(x - \tfrac{1}{6}\pi\right)\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 2\cos\left(x - \tfrac{1}{6}\pi\right)\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)^3 + 2\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) - \left(\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)^3 + 2\cos(0)\right) =$

$\frac{1}{81}\pi^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \left(\frac{1}{648}\pi^3 + 2 \cdot 1\right) = \frac{7}{648}\pi^3 + \sqrt{3} - 2$

26 **a** De regel gaat over functies van de vorm $f(ax+b)$ en g is van de vorm $f(ax^2+b)$.

b $G(x) = a(4x^2-1)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $G'(x) = 1\frac{1}{2}a(4x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 8x = 12ax\sqrt{4x^2-1}$
Er bestaat geen waarde van a waarvoor $G'(x) = \sqrt{4x^2-1}$.

Bladzijde 119

27 $f(x) = 0$ geeft $1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi\right) = 0$

$2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi\right) = -1$

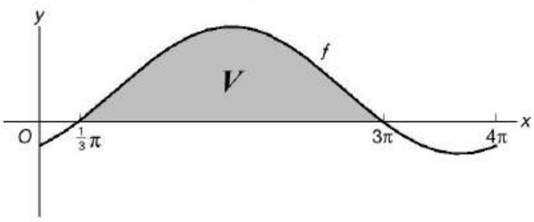
$\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 3\pi + k \cdot 4\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

x op $[0, 4\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 3\pi$

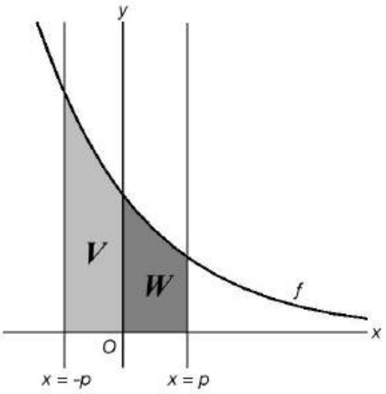


$O(V) = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}\pi}^{3\pi} \left(1 + 2\cos\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{6}\pi\right)\right)\mathrm{d}x = \left[x + 4\sin\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{6}\pi\right)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{3\pi} = 3\pi + 4\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) - \left(\tfrac{1}{3}\pi + 4\sin\left(-\tfrac{2}{3}\pi\right)\right) =$

$3\pi + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \left(\frac{1}{3}\pi + 4 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 3\pi + 2\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi + 2\sqrt{3} = 2\frac{2}{3}\pi + 4\sqrt{3}$

11

28



$O(V) = 2O(W)$

$\int_{-p}^{0} 2\,e^{1-\frac{1}{3}x}\,dx = 2\int_{0}^{p} 2\,e^{1-\frac{1}{3}x}\,dx$

$\left[-3\cdot 2e^{1-\frac{1}{3}x}\right]_{-p}^{0} = 2\left[-3\cdot 2e^{1-\frac{1}{3}x}\right]_{0}^{p}$

$\left[-6e^{1-\frac{1}{3}x}\right]_{-p}^{0} = 2\left[-6e^{1-\frac{1}{3}x}\right]_{0}^{p}$

$-6e^{1} + 6e^{1+\frac{1}{3}p} = 2\left(-6e^{1-\frac{1}{3}p} + 6e^{1}\right)$

$-6e + 6e\cdot e^{\frac{1}{3}p} = -12e\cdot e^{-\frac{1}{3}p} + 12e$

$-1 + e^{\frac{1}{3}p} = -2e^{-\frac{1}{3}p} + 2$

Stel $e^{\frac{1}{3}p} = u$.

$-1 + u = -\frac{2}{u} + 2$

$-u + u^2 = -2 + 2u$

$u^2 - 3u + 2 = 0$

$(u-1)(u-2) = 0$

$u = 1 \vee u = 2$

$e^{\frac{1}{3}p} = 1 \vee e^{\frac{1}{3}p} = 2$

$\frac{1}{3}p = 0 \vee \frac{1}{3}p = \ln(2)$

$p = 0 \quad \vee \quad p = 3\ln(2)$

vold. niet   vold.

Dus $p = 3\ln(2)$.

29 **a** $O(U) = \int_{1}^{8} (10x - x^2)\,dx = \left[5x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^8 = 5\cdot 8^2 - \frac{1}{3}\cdot 8^3 - \left(5\cdot 1^2 - \frac{1}{3}\cdot 1^3\right) = 320 - 170\frac{2}{3} - 4\frac{2}{3} = 144\frac{2}{3}$

$O(V) = \int_{1}^{8} (x+8)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 8x\right]_1^8 = \frac{1}{2}\cdot 8^2 + 8\cdot 8 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 8\cdot 1\right) = 32 + 64 - 8\frac{1}{2} = 87\frac{1}{2}$

$O(W) = O(U) - O(V) = 144\frac{2}{3} - 87\frac{1}{2} = 57\frac{1}{6}$

b $\int_{1}^{8} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{1}^{8} (10x - x^2 - (x+8))\,dx = \int_{1}^{8} (10x - x^2 - x - 8))\,dx = \int_{1}^{8} (-x^2 + 9x - 8)\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - 8x\right]_1^8 = -\frac{1}{3}\cdot 8^3 + 4\frac{1}{2}\cdot 8^2 - 8\cdot 8 - \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 4\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 8\cdot 1\right)$

$= -170\frac{2}{3} + 288 - 64 - \left(-\frac{1}{3} + 4\frac{1}{2} - 8\right) = 53\frac{1}{3} + 3\frac{5}{6} = 57\frac{1}{6}$

$\int_{1}^{8} (f(x) - g(x))\,dx$ is gelijk aan $O(W)$.

30 $\int_{0}^{6} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = \frac{1}{6}\cdot 6^3 - 1\frac{1}{2}\cdot 6^2 - (0 - 0) = -18$

Bladzijde 122

31 **a** $x^3 = 2x$

$x = 0 \vee x^2 = 2$

$x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

$$O(V) = \int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3)\,dx = \left[x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{2}} = 2 - \tfrac{1}{4} \cdot 4 - (0 - 0) = 1$$

b $\int_0^p (2x - x^3)\,dx = \frac{1}{2}$

$\left[x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^p = \frac{1}{2}$

$p^2 - \tfrac{1}{4}p^4 - (0 - 0) = \frac{1}{2}$

$4p^2 - p^4 = 2$

$p^4 - 4p^2 + 2 = 0$

Stel $p^2 = u$.

$u^2 - 4u + 2 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$

$u = \dfrac{4 + \sqrt{8}}{2} \vee u = \dfrac{4 - \sqrt{8}}{2}$

$u = \dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{2} \vee u = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{2}$

$u = 2 + \sqrt{2} \vee u = 2 - \sqrt{2}$

$p^2 = 2 + \sqrt{2} \vee p^2 = 2 - \sqrt{2}$

vold. niet $\quad p = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \vee p = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

vold. $\quad$ vold. niet

Dus $p = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

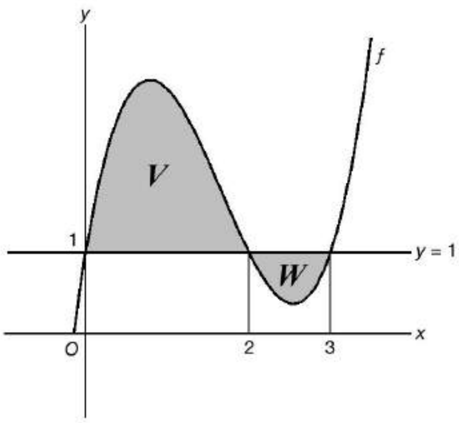
32 **a** $f(x) = 1$ geeft $x^3 - 5x^2 + 6x + 1 = 1$

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$

$x(x - 2)(x - 3) = 0$

$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$



$$O(V) = \int_0^2 (f(x) - 1)\,dx = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 1\tfrac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^2$$

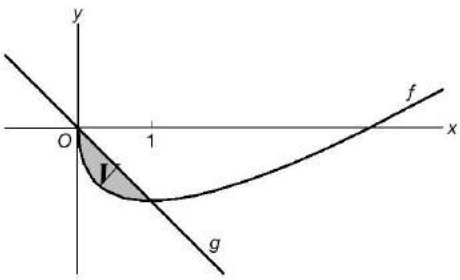
$$= \tfrac{1}{4} \cdot 2^4 - 1\tfrac{2}{3} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - (0 - 0 + 0) = 2\tfrac{2}{3}$$

b $$O(W) = \int_2^3 (1 - f(x))\,dx = \int_2^3 (1 - (x^3 - 5x^2 + 6x + 1))\,dx = \int_2^3 (1 - x^3 + 5x^2 - 6x - 1)\,dx$$

$$= \int_2^3 (-x^3 + 5x^2 - 6x)\,dx = \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + 1\tfrac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_2^3$$

$$= -\tfrac{1}{4} \cdot 3^4 + 1\tfrac{2}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - \left(-\tfrac{1}{4} \cdot 2^4 + 1\tfrac{2}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2\right) = \tfrac{5}{12}$$

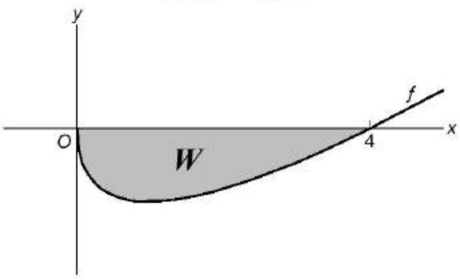
33 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $x - 2\sqrt{x} = -x$
$2x = 2\sqrt{x}$
$x = \sqrt{x}$
kwadrateren geeft
$x^2 = x$
$x = 0 \vee x = 1$
vold. vold.



$$O(V) = \int_0^1 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-x - \left(x - 2\sqrt{x}\right)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-2x + 2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(-2x + 2x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = \left[-x^2 + 2\cdot\tfrac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \left[-x^2 + 1\tfrac{1}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = -1^2 + 1\tfrac{1}{3}\cdot 1\sqrt{1} - (0 + 0) = -1 + 1\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}$$

b $f(x) = 0$ geeft $x - 2\sqrt{x} = 0$
$x = 2\sqrt{x}$
kwadrateren geeft
$x^2 = 4x$
$x = 0 \vee x = 4$
vold. vold.



$$O(W) = \int_0^4 -f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 -\left(x - 2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(-x + 2x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{2}x^2 + 2\cdot\tfrac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}}\right]_0^4 = \left[-\tfrac{1}{2}x^2 + 1\tfrac{1}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cdot 4^2 + 1\tfrac{1}{3}\cdot 4\sqrt{4} = -8 + 10\tfrac{2}{3} = 2\tfrac{2}{3}$$

34 **a** $O(V) = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$

$O(W) = \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[\cos(x)\right]_{\pi}^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 1 - -1 = 2$

b $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$

$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = O(V) - O(W) = 2 - 2 = 0$

35 $f(x) = g(x)$ geeft $\sin(x) = \cos(2x)$

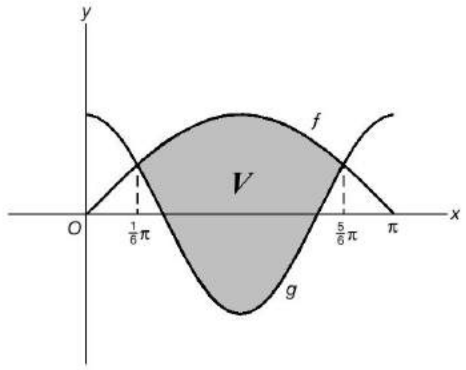
$$\cos\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos(2x)$$

$$x - \tfrac{1}{2}\pi = 2x + k \cdot 2\pi \vee x - \tfrac{1}{2}\pi = -2x + k \cdot 2\pi$$

$$-x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi$$

x op $[0, \pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$.



$$O(V) = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin(x) - \cos(2x))\,dx = \left[-\cos(x) - \tfrac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$= -\cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) - \tfrac{1}{2}\sin\left(1\tfrac{2}{3}\pi\right) - \left(-\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) - \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2} \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3} = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Bladzijde 123

36 **a** $f(x) = -1\frac{1}{2}$ geeft $\dfrac{x^2 + x + 1}{x} = -1\frac{1}{2}$

$$x^2 + x + 1 = -1\tfrac{1}{2}x$$

$$x^2 + 2\tfrac{1}{2}x + 1 = 0$$

$$\left(x + \tfrac{1}{2}\right)(x + 2) = 0$$

$$x = -\tfrac{1}{2} \vee x = -2$$

$$O(V) = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} - -1\tfrac{1}{2}\right)dx = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(x + 1 + \frac{1}{x} + 1\tfrac{1}{2}\right)dx = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}\right)dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 + \ln|x| + 2\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8} + \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - 1\tfrac{1}{4} - (2 + \ln(2) - 5) = \tfrac{1}{8} + \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - 1\tfrac{1}{4} - 2 - \ln(2) + 5$$

$$= 1\tfrac{7}{8} + \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - \ln(2) = 1\tfrac{7}{8} + \ln\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

b $O(W) = 2$ geeft $\displaystyle\int_1^p \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} - (x + 1)\right)dx = 2$

$$\int_1^p \left(x + 1 + \frac{1}{x} - (x + 1)\right)dx = 2$$

$$\int_1^p \frac{1}{x}\,dx = 2$$

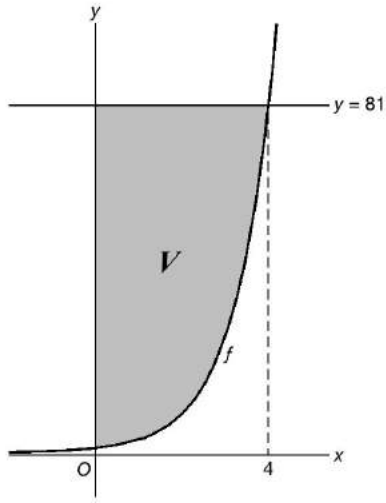
$$\left[\ln|x|\right]_1^p = 2$$

$$\ln|p| - \ln(1) = 2$$

$$\ln(p) = 2$$

$$p = e^2$$

37 **a** $f(x) = 81$ geeft $3^x = 81$
$x = 4$



$$O(V) = \int_0^4 (81 - 3^x)\,dx = \left[81x - \frac{3^x}{\ln(3)}\right]_0^4 = 324 - \frac{81}{\ln(3)} - \left(0 - \frac{1}{\ln(3)}\right) = 324 - \frac{80}{\ln(3)}$$

b $\int_0^a (81 - 3^x)\,dx = \frac{1}{2}\left(324 - \frac{80}{\ln(3)}\right)$

$$\left[81x - \frac{3^x}{\ln(3)}\right]_0^a = 162 - \frac{40}{\ln(3)}$$

$$81a - \frac{3^a}{\ln(3)} - \left(0 - \frac{1}{\ln(3)}\right) = 162 - \frac{40}{\ln(3)}$$

$$81a - \frac{3^a}{\ln(3)} = 162 - \frac{41}{\ln(3)}$$

Voer in $y_1 = 81x - \frac{3^x}{\ln(3)}$ en $y_2 = 162 - \frac{41}{\ln(3)}$.

Intersect geeft $x \approx 1{,}60$ en $x \approx 5{,}29$.
Dus $a \approx 1{,}60$.

38 $f(x) = 8$ geeft $\frac{8}{x^2} = 8$
$x^2 = 1$
$x = 1 \vee x = -1$
vold. vold. niet

$$O(V) = 1 \cdot 8 + \int_1^8 \frac{8}{x^2}\,dx = 8 + \int_1^8 8x^{-2}\,dx = 8 + \left[-8x^{-1}\right]_1^8 = 8 + \left[-\frac{8}{x}\right]_1^8 = 8 - \frac{8}{8} + \frac{8}{1} = 15$$

$O(V_1) = \frac{2}{3}O(V)$ geeft $8 + \int_1^a \frac{8}{x^2}\,dx = \frac{2}{3} \cdot 15$

$$8 + \int_1^a 8x^{-2}\,dx = 10$$

$$\int_1^a 8x^{-2}\,dx = 2$$

$$\left[-8x^{-1}\right]_1^a = 2$$

$$\left[-\frac{8}{x}\right]_1^a = 2$$

$$-\frac{8}{a} + \frac{8}{1} = 2$$

$$-\frac{8}{a} = -6$$

$$-6a = -8$$

$$a = 1\tfrac{1}{3}$$

11

39 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $2\,e^x = 9 - 4\,e^{-x}$

$2\,e^{2x} = 9\,e^x - 4$

$2\,e^{2x} - 9\,e^x + 4 = 0$

Stel $e^x = u$.

$2u^2 - 9u + 4 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 49$

$u = \dfrac{9+7}{4} = 4 \vee u = \dfrac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$

$e^x = 4 \vee e^x = \frac{1}{2}$

$x = \ln(4) \vee x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$O(V) = \int_{\ln(\frac{1}{2})}^{\ln(4)} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{\ln(\frac{1}{2})}^{\ln(4)} (9 - 4\,e^{-x} - 2\,e^x)\,dx = \left[9x + 4\,e^{-x} - 2\,e^x\right]_{\ln(\frac{1}{2})}^{\ln(4)}$$

$$= 9\ln(4) + 4 \cdot \tfrac{1}{4} - 2 \cdot 4 - \left(9\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) + 4 \cdot 2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = 9\ln(4) + 1 - 8 - 9\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - 8 + 1$$

$$= 9\left(\ln(4) - \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) - 14 = 9\ln(8) - 14 = 9\ln(2^3) - 14 = 27\ln(2) - 14$$

b $\displaystyle\int_0^{\ln(4)} (g(x) - f(x))\,dx = \left[9x + 4\,e^{-x} - 2\,e^x\right]_0^{\ln(4)} = 9\ln(4) + 1 - 8 - (0 + 4 - 2) = 3{,}476...$

$\frac{3}{4}(27\ln(2) - 14) = 3{,}536...$

$3{,}476... \neq 3{,}536...$, dus Rob heeft niet gelijk.

11.3 Inhouden

Bladzijde 125

40 **a** Het groene lichaam is te benaderen door de cilinder met straal $f(x)$ en hoogte h.
Dus de inhoud is ongeveer $\pi \cdot (f(x))^2 \cdot h$.

b $I'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{I(x+h) - I(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\pi \cdot (f(x))^2 \cdot h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \pi \cdot (f(x))^2 = \pi \cdot (f(x))^2$

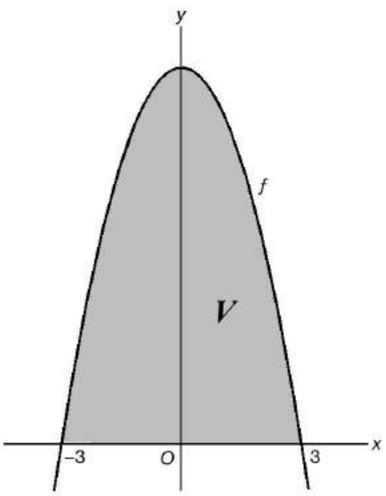
Dus I is een primitieve van $\pi \cdot (f(x))^2$.

Bladzijde 126

41 $f(x) = 0$ geeft $9 - x^2 = 0$

$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$



$$I(L) = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)^2\,dx = \pi \int_{-3}^{3} (x^4 - 18x^2 + 81)\,dx = \pi\left[\left(\tfrac{1}{5}x^5 - 6x^3 + 81x\right)\right]_{-3}^{3}$$

$$= \pi\left(\tfrac{1}{5} \cdot 3^5 - 6 \cdot 3^3 + 81 \cdot 3\right) - \pi\left(\tfrac{1}{5} \cdot (-3)^5 - 6 \cdot (-3)^3 + 81 \cdot -3\right) = 129\tfrac{3}{5}\pi - -129\tfrac{3}{5}\pi = 259\tfrac{1}{5}\pi$$

42 $4 - x^2 = x + 2$
$-x^2 - x + 2 = 0$
$x^2 + x - 2 = 0$
$(x - 1)(x + 2) = 0$
$x = 1 \vee x = -2$

$$I(V) = \pi\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx + \pi\int_{1}^{2}(4-x^2)^2\,dx = \pi\int_{-2}^{1}(x^2+4x+4)\,dx + \pi\int_{1}^{2}(16-8x^2+x^4)\,dx$$
$$= \pi\left[\left(\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right)\right]_{-2}^{1} + \pi\left[\left(16x - \tfrac{8}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5\right)\right]_{1}^{2}$$
$$= \pi\left(\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 + 2\cdot 1^2 + 4\cdot 1\right) - \pi\left(\tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 + 4\cdot -2\right) + \pi\left(16\cdot 2 - \tfrac{8}{3}\cdot 2^3 + \tfrac{1}{5}\cdot 2^5\right) - \pi\left(16\cdot 1 - \tfrac{8}{3}\cdot 1^3 + \tfrac{1}{5}\cdot 1^5\right)$$
$$= 12\tfrac{8}{15}\pi$$

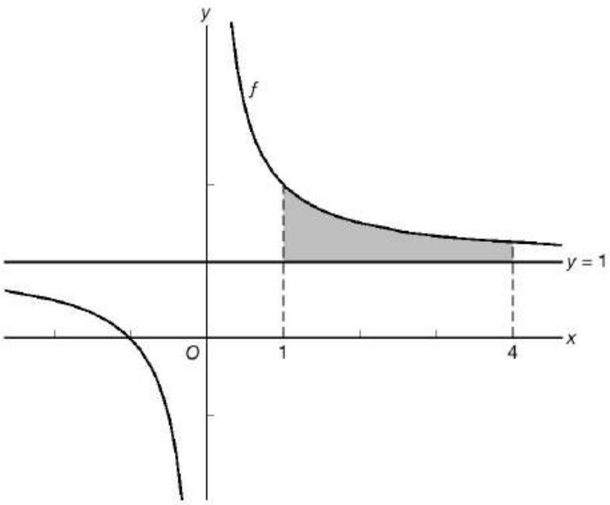
43 **a** $g(x) = \dfrac{3}{x}$

b $I(M) = \pi\displaystyle\int_{1}^{3}\left(\frac{3}{x}\right)^2 dx = \pi\int_{1}^{3} 9x^{-2}\,dx = \pi\left[-9x^{-1}\right]_1^3 = \pi\left[-\frac{9}{x}\right]_1^3 = \pi\left(-\frac{9}{3} + \frac{9}{1}\right) = 6\pi$

Wentelen van V om de lijn $y = 2$ levert hetzelfde lichaam als wentelen van W om de x-as omdat V en de lijn $y = 2$ beide 2 omlaag zijn verschoven.

Bladzijde 127

44 **a**



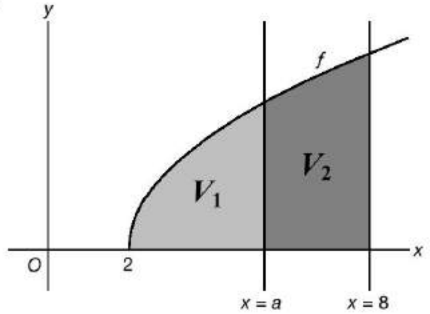
$$I(L) = \pi\int_{1}^{4}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 dx - \pi\cdot 1^2\cdot 3 = \pi\int_{1}^{4}(1+x^{-1})^2\,dx - 3\pi = \pi\int_{1}^{4}(1+2x^{-1}+x^{-2})\,dx - 3\pi$$
$$= \pi\int_{1}^{4}\left(1 + \frac{2}{x} + x^{-2}\right)dx - 3\pi = \pi\left[x + 2\ln|x| - x^{-1}\right]_1^4 - 3\pi = \pi\left[x + 2\ln|x| - \frac{1}{x}\right]_1^4 - 3\pi$$
$$= \pi\left(4 + 2\ln(4) - \tfrac{1}{4}\right) - \pi(1 + 2\ln(1) - 1) - 3\pi = \pi\left(3\tfrac{3}{4} + 2\ln(4)\right) - \pi(1 + 0 - 1) - 3\pi = \pi\left(\tfrac{3}{4} + 2\ln(4)\right)$$

b Wentelen van de grafiek van f om de lijn $y = 1$ geeft dezelfde inhoud als wentelen van de grafiek van $g(x) = f(x) - 1 = \dfrac{x+1}{x} - 1 = \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} - 1 = 1 + \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1}{x}$ om de x-as.

$$I(L) = \pi\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_{1}^{4} x^{-2}\,dx = \pi\left[-x^{-1}\right]_1^4 = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\tfrac{1}{4}\pi + \pi = \tfrac{3}{4}\pi$$

11

45



$$I(L_1 + L_2) = \pi \int_2^8 \left(\sqrt{x-2}\,\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_2^8 (x-2)\mathrm{d}x = \pi\left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^8 = \pi(32-16) - \pi(2-4) = 18\pi$$

$I(L_1) = \frac{1}{2} \cdot 18\pi$ geeft $\pi \int_2^a \left(\sqrt{x-2}\right)^2 \mathrm{d}x = 9\pi$

$$\pi \int_2^a (x-2)\,\mathrm{d}x = 9\pi$$

$$\int_2^a (x-2)\,\mathrm{d}x = 9$$

$$\left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^a = 9$$

$\left(\frac{1}{2}a^2 - 2a\right) - (2-4) = 9$
$\frac{1}{2}a^2 - 2a + 2 = 9$
$a^2 - 4a - 14 = 0$
$(a-2)^2 - 4 - 14 = 0$
$(a-2)^2 = 18$
$a - 2 = \sqrt{18} \vee a - 2 = -\sqrt{18}$
$a = 2 + 3\sqrt{2} \vee a = 2 - 3\sqrt{2}$
vold. vold. niet

Dus $a = 2 + 3\sqrt{2}$.

46 **a** $O(V_p) = 2\mathrm{e}$ geeft $\int_0^p \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}$

$\left[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\right]_0^p = 2\mathrm{e}$
$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}p+1} - 2\mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e}$
$2\mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}p} = 4\mathrm{e}$
$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}p} = 2$
$\frac{1}{2}p = \ln(2)$
$p = 2\ln(2)$

b $I(L_p) = 9\pi\mathrm{e}^2$ geeft $\pi \int_0^p \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = 9\pi\mathrm{e}^2$

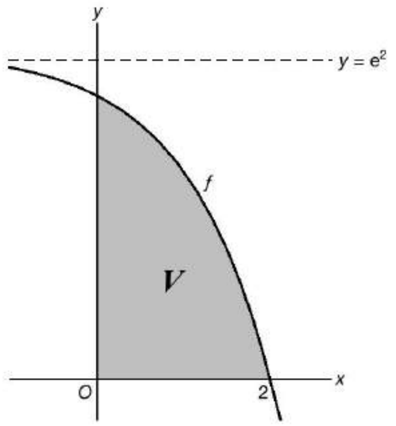
$$\int_0^p \mathrm{e}^{x+2}\,\mathrm{d}x = 9\mathrm{e}^2$$

$[\mathrm{e}^{x+2}]_0^p = 9\mathrm{e}^2$
$\mathrm{e}^{p+2} - \mathrm{e}^2 = 9\mathrm{e}^2$
$\mathrm{e}^p \cdot \mathrm{e}^2 = 10\mathrm{e}^2$
$\mathrm{e}^p = 10$
$p = \ln(10)$

47 $f(x) = 0$ geeft $e^2 - e^x = 0$

$e^x = e^2$

$x = 2$



$$I(L) = \pi \int_0^2 (e^2 - e^x)^2 \, dx = \pi \int_0^2 (e^4 - 2e^{x+2} + e^{2x}) \, dx = \pi \left[e^4 \cdot x - 2\,e^{x+2} + \tfrac{1}{2}\,e^{2x} \right]_0^2$$

$$= \pi\left(2\,e^4 - 2\,e^4 + \tfrac{1}{2}\,e^4\right) - \pi\left(0 - 2\,e^2 + \tfrac{1}{2}\right) = \pi\left(\tfrac{1}{2}\,e^4 + 2\,e^2 - \tfrac{1}{2}\right)$$

48 **a** $I(L) = 8\tfrac{2}{3}\pi - 2\tfrac{1}{6}\pi = 6\tfrac{1}{2}\pi$

b $\pi \int_1^3 (f(x) - g(x))^2 \, dx = \pi \int_1^3 \left(x - \tfrac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi \int_1^3 \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi \int_1^3 \tfrac{1}{4}x^2 \, dx = \pi \left[\tfrac{1}{12}x^3 \right]_1^3 = \pi\left(\tfrac{1}{12} \cdot 3^3 - \tfrac{1}{12} \cdot 1^3\right) = 2\tfrac{1}{6}\pi$

$\pi \int_1^3 ((f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx = \pi \int_1^3 \left(x^2 - \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2\right) dx = \pi \int_1^3 \left(x^2 - \tfrac{1}{4}x^2\right) dx = \pi \int_1^3 \tfrac{3}{4}x^2 \, dx = \pi \left[\tfrac{1}{4}x^3 \right]_1^3 = \pi\left(\tfrac{1}{4} \cdot 3^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 1^3\right) = 6\tfrac{1}{2}\pi$

Dus Irma heeft gelijk.

Bladzijde 129

49 $f(x) = g(x)$ geeft $\sqrt{x} = \tfrac{1}{2}x$

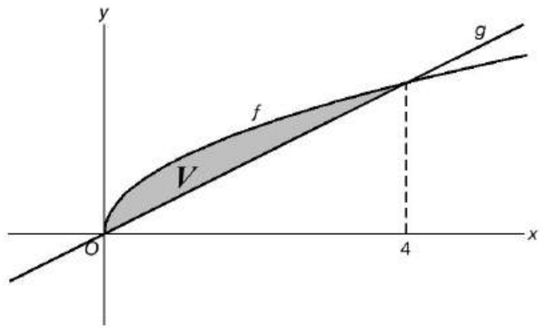
kwadrateren geeft

$x = \tfrac{1}{4}x^2$

$4x = x^2$

$x = 0 \lor x = 4$

vold. vold.



$$I(L) = \pi \int_0^4 ((f(x))^2 - (g(x))^2) \, dx = \pi \int_0^4 \left(x - \tfrac{1}{4}x^2\right) dx = \pi \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{12}x^3 \right]_0^4 = \pi\left(8 - 5\tfrac{1}{3}\right) = 2\tfrac{2}{3}\pi$$

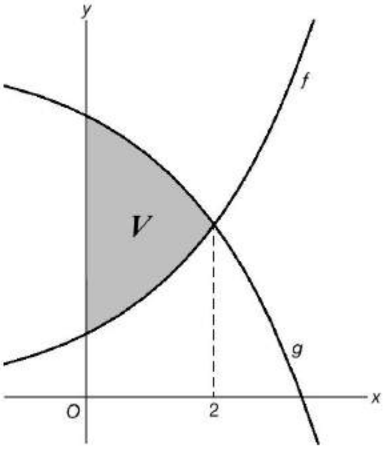
11

50 $f(x) = g(x)$ geeft $e^{\frac{1}{2}x} = 2e - e^{\frac{1}{2}x}$

$2e^{\frac{1}{2}x} = 2e$

$\frac{1}{2}x = 1$

$x = 2$



$$I(L) = \pi \int_0^2 \left(\left(2e - e^{\frac{1}{2}x}\right)^2 - \left(e^{\frac{1}{2}x}\right)^2\right) dx = \pi \int_0^2 \left(4e^2 - 4e \cdot e^{\frac{1}{2}x} + e^x - e^x\right) dx = \pi \int_0^2 \left(4e^2 - 4e^{\frac{1}{2}x+1}\right) dx$$

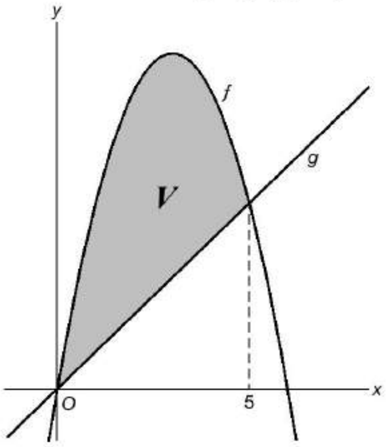
$$= \pi\left[4e^2x - 8e^{\frac{1}{2}x+1}\right]_0^2 = \pi(8e^2 - 8e^2) - \pi(0 - 8e) = 8\pi e$$

51 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $6x - x^2 = x$

$-x^2 + 5x = 0$

$-x(x - 5) = 0$

$x = 0 \vee x = 5$



$$I(L) = \pi \int_0^5 ((6x - x^2)^2 - x^2)\,dx = \pi \int_0^5 (36x^2 - 12x^3 + x^4 - x^2)\,dx = \pi \int_0^5 (x^4 - 12x^3 + 35x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 11\tfrac{2}{3}x^3\right]_0^5 = \pi\left(\tfrac{1}{5} \cdot 5^5 - 3 \cdot 5^4 + 11\tfrac{2}{3} \cdot 5^3\right) - 0 = 208\tfrac{1}{3}\pi$$

b $I(L_1) = \frac{1}{2}I(L)$ geeft $\pi \int_0^p ((6x - x^2)^2 - x^2)\,dx = 104\frac{1}{6}\pi$

$\left[\left(\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 11\frac{2}{3}x^3\right)\right]_0^p = 104\frac{1}{6}$

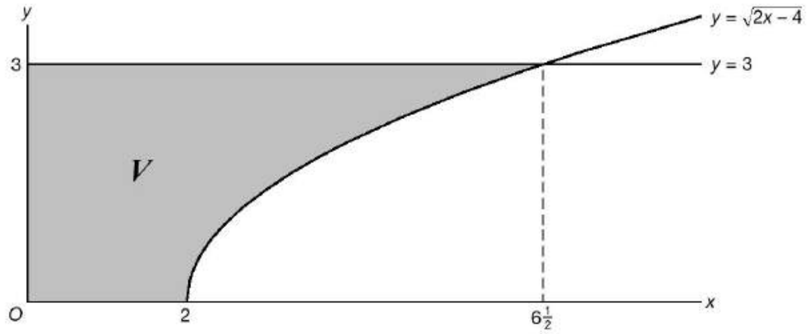
$\frac{1}{5}p^5 - 3p^4 + 11\frac{2}{3}p^3 - 0 = 104\frac{1}{6}$

$\frac{1}{5}p^5 - 3p^4 + 11\frac{2}{3}p^3 = 104\frac{1}{6}$

Voer in $y_1 = \frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 11\frac{2}{3}x^3$ en $y_2 = 104\frac{1}{6}$.
Intersect geeft $x \approx 2{,}77$.
Dus $p \approx 2{,}77$.

Bladzijde 131

52 **a**



$y = \sqrt{2x-4}$ geeft $y^2 = 2x - 4$

$2x - 4 = y^2$

$2x = y^2 + 4$

$x = \frac{1}{2}y^2 + 2$

$x^2 = \left(\frac{1}{2}y^2 + 2\right)^2$

$x^2 = \frac{1}{4}y^4 + 2y^2 + 4$

$$I(L) = \pi\int_0^3 x^2\,dy = \pi\int_0^3 \left(\tfrac{1}{4}y^4 + 2y^2 + 4\right)dy = \pi\left[\tfrac{1}{20}y^5 + \tfrac{2}{3}y^3 + 4y\right]_0^3 = \pi\left(\tfrac{1}{20}\cdot 3^5 + \tfrac{2}{3}\cdot 3^3 + 4\cdot 3\right) - 0$$

$$= \pi\left(12\tfrac{3}{20} + 18 + 12\right) = 42\tfrac{3}{20}\pi$$

b $y = 3$ geeft $\sqrt{2x-4} = 3$

$2x - 4 = 9$

$2x = 13$

$x = 6\frac{1}{2}$

$$I(M) = I(\text{cilinder}) - \pi\int_2^{6\frac{1}{2}} \left(\sqrt{2x-4}\right)^2 dx = \pi\cdot 3^2\cdot 6\tfrac{1}{2} - \pi\int_2^{6\frac{1}{2}} (2x-4)\,dx = 58\tfrac{1}{2}\pi - \pi\left[x^2 - 4x\right]_2^{6\frac{1}{2}}$$

$$= 58\tfrac{1}{2}\pi - \pi\left(\left(6\tfrac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot 6\tfrac{1}{2}\right) + \pi(2^2 - 4\cdot 2) = 58\tfrac{1}{2}\pi - 16\tfrac{1}{4}\pi - 4\pi = 38\tfrac{1}{4}\pi$$

53 **a** $I(L) = \pi\int_0^4 x^2\,dy = \pi\int_0^4 y\,dy = \pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^4 = 8\pi - 0 = 8\pi$

b $P(p, q)$ ligt op de parabool, dus $q = p^2$.

$I(L_p) = I(M_q)$ geeft $\pi\int_0^p y^2\,dx = \pi\int_0^q x^2\,dy$

$\int_0^p x^4\,dx = \int_0^{p^2} y\,dy$

$\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^p = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{p^2}$

$\frac{1}{5}p^5 - 0 = \frac{1}{2}p^4 - 0$

$2p^5 = 5p^4$

$p^4 = 0 \vee 2p = 5$

$p = 0 \vee p = 2\frac{1}{2}$

$p = 0$ voldoet niet en $p = 2\frac{1}{2}$ geeft $q = 6\frac{1}{4}$.

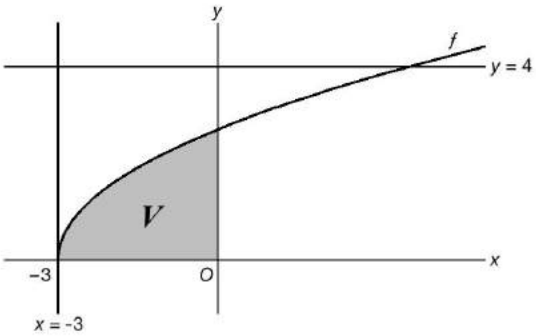
Dus $p = 2\frac{1}{2}$ en $q = 6\frac{1}{4}$.

11

54 **a** $f(x) = 0$ geeft $2x + 6 = 0$

$2x = -6$

$x = -3$



$$I(L) = \pi\int_{-3}^{0}\left(\sqrt{2x+6}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-3}^{0}(2x+6)\,\mathrm{d}x = \pi\left[x^2+6x\right]_{-3}^{0} = \pi\cdot 0 - \pi(9-18) = 9\pi$$

b $x = 0$ geeft $y = \sqrt{6}$

$y = \sqrt{2x+6}$ geeft $y^2 = 2x + 6$

$2x + 6 = y^2$

$2x = y^2 - 6$

$x = \frac{1}{2}y^2 - 3$

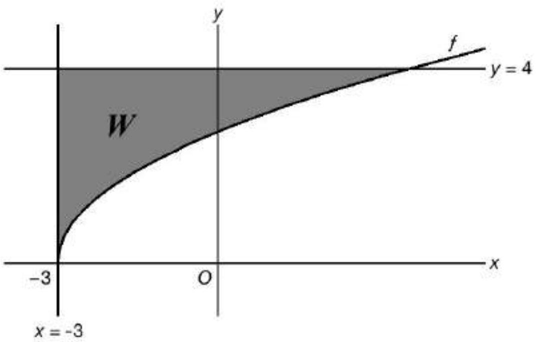
$x^2 = \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right)^2$

$x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 3y^2 + 9$

$$I(M) = \pi\int_{0}^{\sqrt{6}} x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_{0}^{\sqrt{6}}\left(\tfrac{1}{4}y^4 - 3y^2 + 9\right)\mathrm{d}y = \pi\left[\tfrac{1}{20}y^5 - y^3 + 9y\right]_{0}^{\sqrt{6}}$$

$$= \pi\left(\tfrac{1}{20}\cdot\left(\sqrt{6}\right)^5 - \left(\sqrt{6}\right)^3 + 9\cdot\sqrt{6}\right) - 0 = \pi\left(\tfrac{1}{20}\cdot 36\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 9\sqrt{6}\right) = 4\tfrac{4}{5}\pi\sqrt{6}$$

c



$$y = \sqrt{2x+6} \xrightarrow{\text{translatie } (3,\,0)} y = \sqrt{2(x-3)+6}$$

ofwel $y = \sqrt{2x}$

$y = \sqrt{2x}$ geeft $y^2 = 2x$

$2x = y^2$

$x = \frac{1}{2}y^2$

$x^2 = \frac{1}{4}y^4$

$$I(N) = \pi\int_{0}^{4} x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_{0}^{4}\tfrac{1}{4}y^4\,\mathrm{d}y = \pi\left[\tfrac{1}{20}y^5\right]_{0}^{4} = \pi\cdot\tfrac{1}{20}\cdot 4^5 - 0 = 51\tfrac{1}{5}\pi$$

11.4 Toepassingen van integralen

Bladzijde 133

55 De cirkel met straal r en middelpunt $(0, 0)$ heeft vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$ ofwel $y^2 = r^2 - x^2$.

$$I_{\text{bol}} = 2\cdot\pi\int_{0}^{r} y^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{0}^{r}(r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{0}^{r} = 2\pi\left(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3\right) - 0 = 2\pi\cdot\tfrac{2}{3}r^3 = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Bladzijde 135

56 $I_p = 24\pi$ geeft $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6\right)^2 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{3}p\right)^2 \cdot p = 24\pi$

$$32 - \tfrac{4}{27}p^3 = 24$$
$$-\tfrac{4}{27}p^3 = -8$$
$$p^3 = 54$$
$$p = \sqrt[3]{54}$$

57 $I(K_p) = 100\pi$ geeft $\pi \int_0^8 \left(\frac{4}{5}x\right)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_0^p \left(\frac{4}{5}x\right)^2 \mathrm{d}x = 100\pi$

$$\int_0^8 \tfrac{16}{25}x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^p \tfrac{16}{25}x^2\,\mathrm{d}x = 100$$
$$\left[\tfrac{16}{75}x^3\right]_0^8 - \left[\tfrac{16}{75}x^3\right]_0^p = 100$$
$$\tfrac{16}{75} \cdot 8^3 - 0 - \tfrac{16}{75}p^3 + 0 = 100$$
$$109\tfrac{17}{75} - \tfrac{16}{75}p^3 = 100$$
$$-\tfrac{16}{75}p^3 = -9\tfrac{17}{75}$$
$$p^3 = 43\tfrac{1}{4}$$
$$p = \sqrt[3]{43\tfrac{1}{4}} \approx 3{,}51$$

Alternatieve uitwerking

$I(K_p) = 100\pi$ geeft $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot 8\right)^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{5}p\right)^2 \cdot p = 100\pi$

$$\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{16}{25} \cdot 8^2 \cdot 8 - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{16}{25}p^2 \cdot p = 100$$
$$16 \cdot 8^3 - 16p^3 = 7500$$
$$-16p^3 = -692$$
$$p^3 = 43\tfrac{1}{4}$$
$$p = \sqrt[3]{43\tfrac{1}{4}} \approx 3{,}51$$

58 $I = \pi \int_{\frac{1}{3}r}^{r} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{\frac{1}{3}r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{3}r}^{r} = \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) - \pi\left(r^2 \cdot \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}r\right)^3\right) = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{26}{81}\pi r^3 = \frac{28}{81}\pi r^3$

59 $I_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi$

$I(S_p) = \frac{1}{2} \cdot 288\pi$ geeft $\pi \int_{-3}^{p} y^2\,\mathrm{d}x = 144\pi$

$$\int_{-3}^{p} (36 - x^2)\,\mathrm{d}x = 144$$
$$\left[36x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{p} = 144$$
$$36p - \tfrac{1}{3}p^3 - \left(36 \cdot -3 - \tfrac{1}{3} \cdot (-3)^3\right) = 144$$
$$36p - \tfrac{1}{3}p^3 + 99 = 144$$
$$36p - \tfrac{1}{3}p^3 = 45$$

Voer in $y_1 = 36x - \frac{1}{3}x^3$ en $y_2 = 45$.
Intersect geeft $x \approx 1{,}27$ en $x \approx 9{,}70$.
Dus $p \approx 1{,}27$.

60 k snijden met de x-as geeft $-\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4} = 0$

$$-\tfrac{3}{4}x = -6\tfrac{1}{4}$$
$$x = 8\tfrac{1}{3}$$

$$I(L) = \pi \int_3^{8\frac{1}{3}} \left(-\tfrac{3}{4}x + 6\tfrac{1}{4}\right)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_3^5 (25 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[-\tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(-\tfrac{3}{4}x + 6\tfrac{1}{4}\right)^3\right]_3^{8\frac{1}{3}} - \pi\left[25x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_3^5$$
$$= \pi\left[-\tfrac{4}{9}\left(-\tfrac{3}{4}x + 6\tfrac{1}{4}\right)^3\right]_3^{8\frac{1}{3}} - \pi\left[25x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_3^5 = 0 + \tfrac{4}{9}\pi \cdot 4^3 - 83\tfrac{1}{3}\pi + 66\pi = 11\tfrac{1}{9}\pi$$

11

61 **a** De gemiddelde snelheid gedurende de eerste zes seconden is $\frac{0+10}{2} = 5$ m/s.

Er wordt $5 \cdot 6 = 30$ m afgelegd gedurende deze zes seconden.

b De afstand s is een primitieve van de snelheid v.

$$O(\triangle OAB) = \int_0^6 v(t)\,\mathrm{d}t = s(6) - s(0) = \text{de afgelegde afstand gedurende de eerste zes seconden.}$$

c De afgelegde afstand op het interval [0, 15] is O(gehele driehoek) $= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75$ m.

Bladzijde 137

62 $s(10) = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{4}t^2 + 5t + 4\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{12}t^3 + 2\frac{1}{2}t^2 + 4t\right]_0^{10} = -\frac{1}{12} \cdot 1000 + 2\frac{1}{2} \cdot 100 + 4 \cdot 10 - 0 = 206\frac{2}{3}$ meter

63 $a(t) = mt$ met $m = \frac{5-0}{20-0} = \frac{1}{4}$

Dus $a(t) = \frac{1}{4}t$.

$a(t) = \frac{1}{4}t$ geeft $v(t) = \frac{1}{8}t^2 + c$

$v(0) = 1$ geeft $v(t) = \frac{1}{8}t^2 + 1$

$v(t) = \frac{1}{8}t^2 + 1$ geeft $s(t) = \frac{1}{24}t^3 + t + c$

De afgelegde afstand gedurende deze 20 seconden is $s(20) - s(0) = \frac{1}{24} \cdot 20^3 + 20 + c - c = 353\frac{1}{3}$ meter.

64 **a** $a(t) = -t^2 + 6t$ en $v(0) = 0$ geeft $v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2$

$v(6) = -\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 = 36$

Dus de snelheid op $t = 6$ is 36 m/s.

b $v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2$ geeft $s(t) = -\frac{1}{12}t^4 + t^3 + c$

De afgelegde afstand gedurende deze 6 seconden is $s(6) - s(0) = -\frac{1}{12} \cdot 6^4 + 6^3 + c - c = 108$ meter.

c $v(t) = 36$ geeft $s(t) = 36t + c$

$s(6) = 108$ geeft $36 \cdot 6 + c = 108$

$216 + c = 108$

$c = -108$

Dus $s(t) = 36t - 108$ voor $t \geq 6$.

$s(10) = 36 \cdot 10 - 108 = 252$

Dus op $t = 10$ is 252 meter afgelegd.

d $s(t) = 500$ geeft $36t - 108 = 500$

$36t = 608$

$t = 16\frac{8}{9}$

Dus op $t = 16\frac{8}{9}$ is in totaal 500 meter afgelegd.

65 **a** 54 km/uur = 15 m/s

$v(t) = at + b$ en $v(0) = 15$ geeft $v(t) = at + 15$.

$v(t) = at + 15$ en $s(0) = 0$ geeft $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + 15t$.

Noem de remtijd t_r, dat geldt $v(t_r) = 0$ en $s(t_r) = 0{,}75$.

$v(t_r) = 0$ geeft $at_r + 15 = 0$

$at_r = -15$

$s(t_r) = 0{,}75$ geeft $\frac{1}{2}at_r^2 + 15t_r = 0{,}75$ ofwel $\frac{1}{2}at_r \cdot t_r + 15t_r = 0{,}75$.

Substitutie van $at_r = -15$ in $\frac{1}{2}at_r \cdot t_r + 15t_r = 0{,}75$ geeft $-7{,}5t_r + 15t_r = 0{,}75$

$7{,}5t_r = 0{,}75$

$t_r = 0{,}1$

De botsing duurde 0,1 seconde.

Alternatieve uitwerking

Het rekenwerk wordt eenvoudiger als het probleem "achterstevoren" wordt aangepakt.

Noem de remtijd t_r en neem $v(0) = 0$, $s(0) = 0$, $v(t_r) = 15$ en $s(t_r) = 0{,}75$.

Dit geeft $v(t) = at$ en $s(t) = \frac{1}{2}at^2$. Dan geldt

$$\left.\begin{array}{l} at_r = 15 \\ \frac{1}{2}at_r^2 = 0{,}75 \text{ ofwel } \frac{1}{2}at_r \cdot t_r = 0{,}75 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 15t_r = 0{,}75 \\ t_r = 0{,}1 \end{array}$$

De botsing duurde 0,1 seconde.

b $\left.\begin{array}{l} at_r = -15 \\ t_r = 0{,}1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 0{,}1 = -15 \\ a = -150 \end{array}$

De versnelling is -150 m/s^2.
Dit is 15 keer zo groot als de versnelling van de zwaartekracht.

Bladzijde 138

66 **a** $v(t) = -0{,}2t^2 + 4t$ en $s(0) = 0$ geeft $s(t) = -\frac{2}{30}t^3 + 2t^2$
$s(10) = -\frac{2}{30} \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 = 133\frac{1}{3}$
$v(t) = 0{,}8t^2 - 24t + 180$ geeft $s(t) = \frac{4}{15}t^3 - 12t^2 + 180t + c$
$s(10) = 133\frac{1}{3}$ geeft $\frac{4}{15} \cdot 10^3 - 12 \cdot 10^2 + 180 \cdot 10 + c = 133\frac{1}{3}$
$866\frac{2}{3} + c = 133\frac{1}{3}$
$c = -733\frac{1}{3}$
Dus $s(t) = \frac{4}{15}t^3 - 12t^2 + 180t - 733\frac{1}{3}$.
$s(15) = \frac{4}{15} \cdot 15^3 - 12 \cdot 15^2 + 180 \cdot 15 - 733\frac{1}{3} = 166\frac{2}{3}$
De totale afstand die de auto gedurende deze 15 seconden heeft afgelegd is $166\frac{2}{3}$ meter.

b gemiddelde snelheid $= \dfrac{166\frac{2}{3}}{15} = 11\frac{1}{9}$
Voer in $y_1 = -0{,}2x^2 + 4x$, $y_2 = 0{,}8x^2 - 24x + 180$ en $y_3 = 11\frac{1}{9}$.
Intersect met y_1 en y_3 geeft $x = 3{,}333...$
Intersect met y_2 en y_3 geeft $x = 11{,}273...$
Dus op $t \approx 3{,}33$ en $t \approx 11{,}27$ is de snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid.

c Voer in $y_4 = -\frac{2}{30}x^3 + 2x^2$ en $y_5 = 100$.
Intersect met y_4 en y_5 geeft $x = 8{,}317...$
Dus na ongeveer 8,3 seconden heeft de auto 100 meter afgelegd.

67 **a** Voor de atleet geldt:
voor $t \leq 3{,}5$ is $a_a(t) = -\frac{12}{7}t + 6$
$v_a(t) = -\frac{6}{7}t^2 + 6t$
$s_a(t) = -\frac{2}{7}t^3 + 3t^2$
$s_a(3{,}5) = 24{,}5$ en $v_a(3{,}5) = 10{,}5$
$\left.\begin{array}{l} \text{voor } t > 3{,}5 \text{ is } s_a(t) = 10{,}5t + b \\ \text{door } (3{,}5; 24{,}5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10{,}5 \cdot 3{,}5 + b = 24{,}5 \\ 36{,}75 + b = 24{,}5 \\ b = -12{,}25 \end{array}$
Dus $s_a(t) = 10{,}5t - 12{,}25$ voor $t \geq 3{,}5$.
Voor het paard geldt:
voor $t \leq 6$ is $a_p(t) = -\frac{2}{3}t + 4$
$v_p(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 4t$
$s_p(t) = -\frac{1}{9}t^3 + 2t^2$
$s_p(6) = 48$ en $v_p(6) = 12$
$\left.\begin{array}{l} \text{voor } t \geq 6 \text{ is } s_p(t) = 12t + b \\ \text{door } (6, 48) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 12 \cdot 6 + b = 48 \\ 72 + b = 48 \\ b = -24 \end{array}$
Dus $s_p(t) = 12t - 24$ voor $t \geq 6$.

Voor $0 \leq t \leq 3{,}5$:
Voer in $y_1 = -\frac{2}{7}x^3 + 3x^2 - \left(-\frac{1}{9}x^3 + 2x^2\right)$.
De optie maximum geeft $x = 3{,}818...$ voldoet niet.

Voor $3{,}5 < t \leq 6$:
Voer in $y_1 = 10{,}5x - 12{,}25 - \left(-\frac{1}{9}x^3 + 2x^2\right)$.
De optie maximum geeft $x = 3{,}878...$ en $y = 4{,}871...$ voldoet.
Dus de maximale voorsprong is 4,9 meter.

b Voer in $y_1 = 10{,}5x - 12{,}25$, $y_2 = 12x - 24$ en $y_3 = 100$.
Intersect met y_1 en y_3 geeft $x = 10{,}690...$
Intersect met y_2 en y_3 geeft $x = 10{,}333...$
De wedstrijd wordt door het paard gewonnen met een voorsprong van
$10{,}690... - 10{,}333... = 0{,}357... \approx 0{,}36$ seconden.

11

Bladzijde 139

68 **a** $a(t) = -4\,e^{-0,1t}$

$\left.\begin{array}{l} v(t) = 40\,e^{-0,1t} + c \\ v(3) = 32 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 40\,e^{-0,3} + c = 32 \\ 29{,}632... + c = 32 \\ c = 2{,}367... \end{array}$

$v(t) = 40\,e^{-0,1t} + 2{,}367...$

$v(0) = 40 + 2{,}367... = 42{,}367...$

De snelheid is 42,4 m/s.

b $v(t) = 40\,e^{-0,1t} + 2{,}367...$

$\left.\begin{array}{l} s(t) = -400\,e^{-0,1t} + 2{,}367... \cdot t + c \\ s(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -400 + 0 + c = 0 \\ c = 400 \end{array}$

Dus $s(t) = -400\,e^{-0,1t} + 2{,}367... \cdot t + 400$.

Voer in $y_1 = -400\,e^{-0,1x} + 2{,}367... \cdot x + 400$ en $y_2 = 800$.

Intersect geeft $x = 168{,}970...$

$v(168{,}970...) = 2{,}367...$

De snelheid waarmee de parachutist op de grond komt is 2,4 m/s.

69 **a** $a(t) = 5\,e^{0,012t}$ geeft

$\left.\begin{array}{l} v(t) = 416{,}6...\,e^{0,012t} + c \\ v(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 416{,}6... + c = 0 \\ c = -416{,}6... \end{array}$

Dus $v(t) = 416{,}6...\,e^{0,012t} - 416{,}6...$

$v(t) = 416{,}6...\,e^{0,012t} - 416{,}6...$ geeft

$\left.\begin{array}{l} s(t) = 34\,722{,}2...\,e^{0,012t} - 416{,}6...t + c \\ s(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 34\,722{,}2... + c = 0 \\ c = -34\,722{,}2\,... \end{array}$

Dus $s(t) = 34\,722{,}2...\,e^{0,012t} - 416{,}6...\,t - 34722{,}2...$

$v(170) = 416{,}6...\,e^{0,012 \cdot 170} - 416{,}6... = 2787{,}7...$ m/s ≈ 10036 km/uur

$s(170) = 34\,722{,}2...\,e^{0,012 \cdot 170} - 416{,}6... \cdot 170 - 34\,722{,}2... = 161479{,}4...$ m ≈ 161 km

Dus de snelheid na 170 seconden is 10 036 km/uur en de Apollo heeft dan 161 km afgelegd.

b $a(t) = 4\,e^{0,0045(t-170)}$ geeft

$\left.\begin{array}{l} v(t) = 888{,}8...\,e^{0,0045(t-170)} + c \\ v(170) = 2787{,}7... \end{array}\right\} \begin{array}{l} 888{,}8... + c = 2787{,}7... \\ c = 1898{,}8... \end{array}$

Dus $v(t) = 888{,}8...\,e^{0,0045(t-170)} + 1898{,}8...$

$v(t) = 888{,}8...\,e^{0,0045(t-170)} + 1898{,}8...$ geeft

$\left.\begin{array}{l} s(t) = 197\,530{,}8...e^{0,0045(t-170)} + 1898{,}8...t + c \\ s(170) = 161\,479{,}4... \end{array}\right\} \begin{array}{l} 197\,530{,}8... + 1898{,}8... \cdot 170 + c = 161\,479{,}4... \\ 520\,337{,}9... + c = 161\,479{,}4... \\ c = -358\,858{,}4... \end{array}$

Dus $s(t) = 197\,530{,}8...e^{0,0045(t-170)} + 1898{,}8...t - 358\,858{,}4...$

$v(560) = 888{,}8...\,e^{0,0045(560-170)} + 1898{,}8... = 7039{,}7...$ m/s $\approx 25\,343$ km/uur

$s(560) = 197\,530{,}8...\,e^{0,0045(560-170)} + 1898{,}... \cdot 560 - 358\,858{,}4... = 1\,846\,915{,}3...$ m ≈ 1847 km

Dus de snelheid na 560 seconden is 25 343 km/uur en de Apollo heeft dan 1847 km afgelegd.

70 **a** $x^2 + y^2 = 9$

$y^2 = 9 - x^2$

$y = \sqrt{9 - x^2}$

$O = \int_{-3}^{3} y\,dx = \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$

Je hebt dus de primitieve van $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ nodig.

b Een primitieve van $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ moet in ieder geval iets van de vorm $G(x) = a(9 - x^2)^{1\frac{1}{2}}$ zijn.

$G(x) = a(9 - x^2)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $G'(x) = 1\frac{1}{2}a(9 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3ax\sqrt{9 - x^2}$.

Er bestaat geen waarde van a waarvoor $G'(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

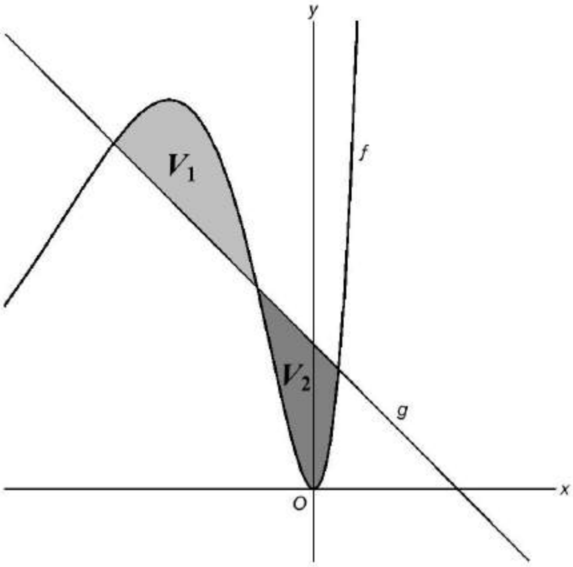
11

Bladzijde 140

71 Voer in $y_1 = \dfrac{4 - x^2}{x^2 + 1}$ en $y_2 = \ln^2(x)$.
Intersect geeft $x = 0{,}138...$ en $x = 1{,}702...$

De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) geeft $\displaystyle\int_{0{,}138...}^{1{,}702...} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \approx 2{,}24$.
Dus $O(V) \approx 2{,}24$.

72 Voer in $y_1 = 10x^2\,\mathrm{e}^x$ en $y_2 = -x + 2$.
Intersect geeft $x = -2{,}786...$, $-0{,}777...$ en $x = 0{,}342...$



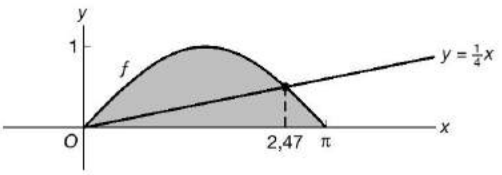
De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) geeft $\displaystyle\int_{-2{,}786...}^{-0{,}777...} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 2{,}063...$ en

$\displaystyle\int_{-0{,}777...}^{0{,}342...} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 1{,}425...$

Dus O(beide vlakdelen) $= 2{,}063... + 1{,}425... \approx 3{,}489$.

Bladzijde 141

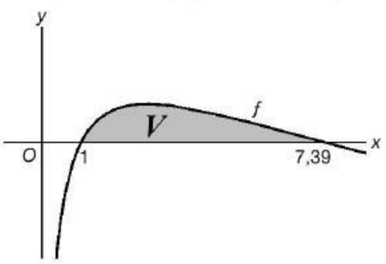
73 Voer in $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \frac{1}{4}x$.
Intersect geeft $x = 2{,}474...$



De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) geeft $O(V) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 2$ en $\displaystyle\int_0^{2{,}474...} \left(\sin(x) - \tfrac{1}{4}x\right)\mathrm{d}x = 1{,}020...$

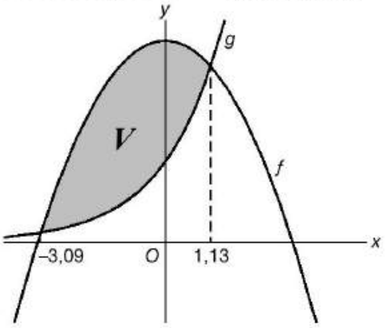
Dus de lijn $y = \frac{1}{4}x$ verdeelt V niet in twee delen met gelijke oppervlakte.

74 Voer in $y_1 = 2\ln(x) - \ln^2(x)$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 1$ en $x = 7{,}389...$



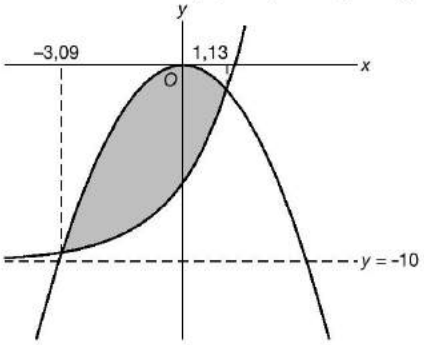
De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) geeft $I(L) = \pi \displaystyle\int_1^{7{,}389...} (f(x))^2\,\mathrm{d}x \approx 9{,}78$.

75 **a** Voer in $y_1 = 10 - x^2$ en $y_2 = 2^{x+2}$.
Intersect geeft $x = -3{,}086...$ en $x = 1{,}126...$



De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft $I(L) = \pi \int_{-3{,}086...}^{1{,}126...} ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx \approx 682{,}59$.

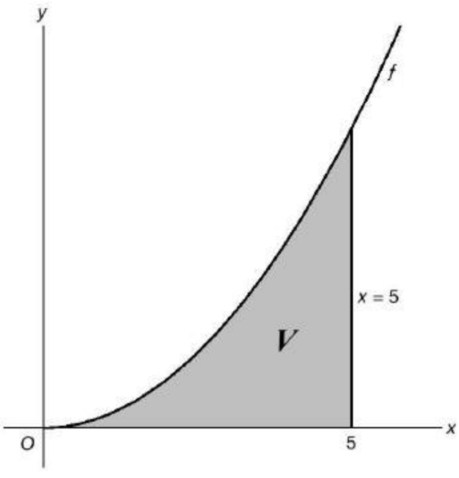
b Pas de translatie (0, −10) toe op de grafieken van f en g en de lijn $y = 10$.



De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft $I(M) = \pi \int_{-3{,}086...}^{1{,}126...} ((g(x) - 10)^2 - (f(x) - 10)^2)\,dx \approx 569{,}80$.

Bladzijde 142

76



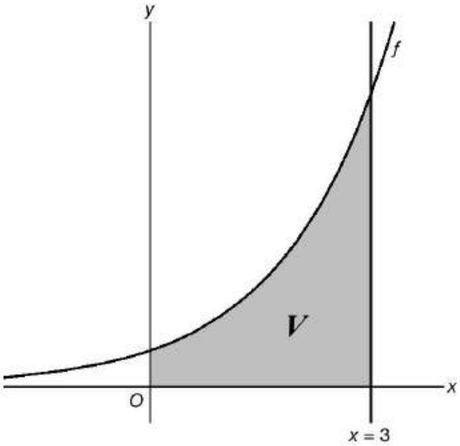
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ geeft $f'(x) = x$

De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft booglengte $= \int_0^5 \sqrt{1 + x^2}\,dx = 13{,}903...$

Dus de omtrek is $5 + \frac{1}{2} \cdot 5^2 + 13{,}903... \approx 31{,}40$.

11

77



$f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$

De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft booglengte $= \int_0^3 \sqrt{1 + (2^x \cdot \ln(2))^2}\, dx = 7{,}792...$

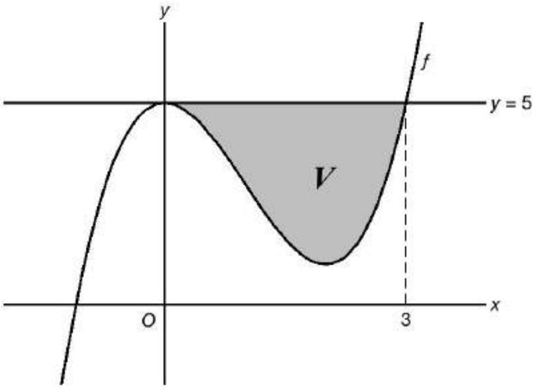
Dus de omtrek is $3 + 2^3 + 7{,}792... + 1 \approx 19{,}79$.

78 $f(x) = 5$ geeft $x^3 - 3x^2 + 5 = 5$

$x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(x - 3) = 0$

$x = 0 \vee x = 3$



$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 6x$

De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft booglengte $= \int_0^3 \sqrt{1 + (3x^2 - 6x)^2}\, dx = 8{,}814...$

Dus de omtrek is $3 + 8{,}814... \approx 11{,}81$.

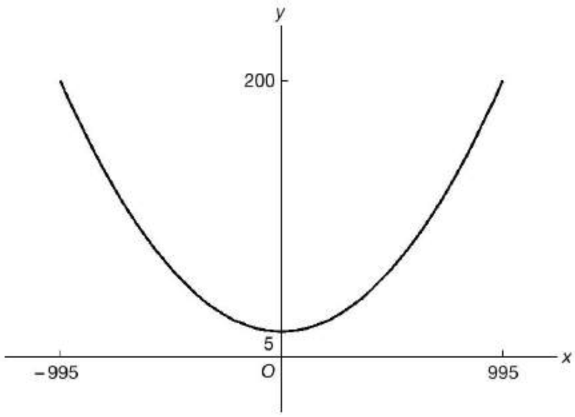
79 De formule van de kabel is van de vorm $y = ax^2 + b$.

(0, 5) op de parabool geeft $b = 5$.

$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + 5 \\ \text{door } (995, 200) \end{array}\right\} a \cdot 995^2 + 5 = 200$

$a \cdot 995^2 = 195$

$a = \frac{195}{995^2} = \frac{39}{198005}$



$y = \frac{39}{198\,005} x^2 + 5$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{78}{198\,005} x$

De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft $\int_{-995}^{995} \sqrt{1 + \left(\frac{78}{198\,005} x\right)^2}\, dx = 2039{,}84...$

Dus de lengte van zo'n kabel is 2040 meter.

11

80 **a** $x = 20$ geeft $y = 4(e^{1,24} + e^{-1,24}) = 14,979...$
Dus de hoogte is 15,0 meter.

b $y = 4(e^{0,062x} + e^{-0,062x})$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 4(0,062\,e^{0,062x} - 0,062\,e^{-0,062x}) = 0,248(e^{0,062x} - e^{-0,062x})$

De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft $\displaystyle\int_{-20}^{20} \sqrt{1 + (0,248(e^{0,062x} - e^{-0,062x}))^2}\, dx = 43,17...$

Dus de lengte van de kabel is 43,2 meter.

c De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft $\displaystyle\int_{-20}^{20} 4(e^{0,062x} + e^{-0,062x})\, dx = 408,54...$

Dus de oppervlakte van het net is 409 m^2.

81 $\dfrac{L(x+h) - L(x)}{h} \approx \dfrac{\sqrt{h^2 + (f(x+h) - f(x))^2}}{h} = \sqrt{\dfrac{h^2 + (f(x+h) - f(x))^2}{h^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{(f(x+h) - f(x))^2}{h^2}} =$

$\sqrt{1 + \left(\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)^2} \approx \sqrt{1 + (f'(x))^2}$

Neem je in de berekening hierboven de limiet voor h naar 0, dan kun je de $\approx$ -tekens vervangen door = -tekens.
Dus $L(x)$ is een primitieve van $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

Diagnostische toets

Bladzijde 144

1 **a** $f(x) = \dfrac{2x + 6}{x^2} = 2 \cdot \dfrac{1}{x} + 6x^{-2}$ geeft $F(x) = 2\ln|x| - 6x^{-1} + c = 2\ln|x| - \dfrac{6}{x} + c$

b $f(x) = 3 \cdot 2^x$ geeft $F(x) = \dfrac{3}{\ln(2)} \cdot 2^x + c$

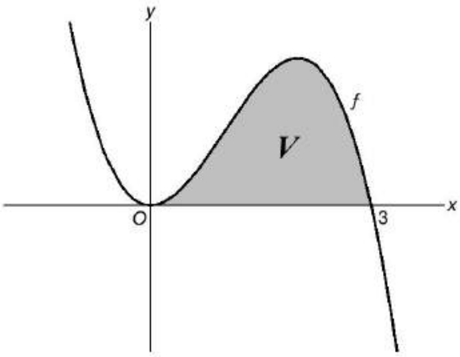
c $f(x) = 6e^x + x^2$ geeft $F(x) = 6e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$

d $f(x) = \ln(x^5) = 5\ln(x)$ geeft $F(x) = 5(x\ln(x) - x) + c = 5x\ln(x) - 5x + c$

e $f(x) = {}^2\log(4x)$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{4}(4x\ln(4x) - 4x) + c = \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot (x\ln(4x) - x) + c$

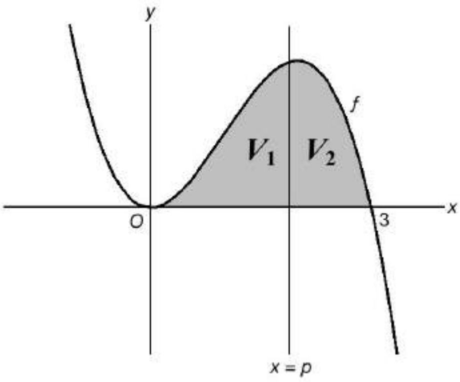
f $f(x) = 3\sin(x) + 2\cos(x)$ geeft $F(x) = -3\cos(x) + 2\sin(x)$

2 **a** $f(x) = 0$ geeft $12x^2 - 4x^3 = 0$
$4x^2(3 - x) = 0$
$x = 0 \vee x = 3$



$O(V) = \displaystyle\int_0^3 (12x^2 - 4x^3)\, dx = \left[4x^3 - x^4\right]_0^3 = 4 \cdot 27 - 81 = 27$

b



$\int_0^p (12x^2 - 4x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 27$

$\left[4x^3 - x^4\right]_0^p = 13\frac{1}{2}$

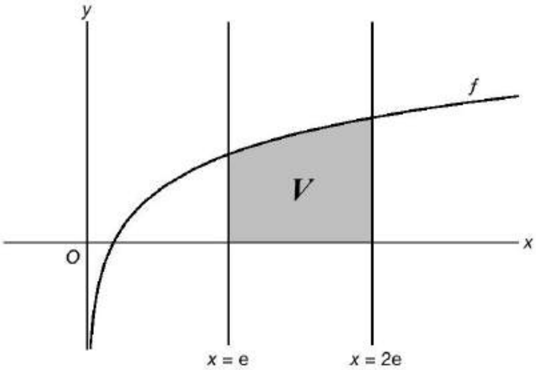
$4p^3 - p^4 = 13\frac{1}{2}$

Voer in $y_1 = 4x^3 - x^4$ en $y_2 = 13\frac{1}{2}$.

Intersect geeft $x = 1{,}842\ldots$ en $x = 3{,}742\ldots$

Dus voor $p \approx 1{,}84$.

3 **a**



$\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \ln(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(2x\ln(2x) - 2x)\right]_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} = \left[x\ln(2x) - x\right]_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} = 2\mathrm{e}\ln(4\mathrm{e}) - 2\mathrm{e} - (\mathrm{e}\ln(2\mathrm{e}) - \mathrm{e})$

$= 2\mathrm{e}\ln(4) + 2\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - 2\mathrm{e} - \mathrm{e}\ln(2) - \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) + \mathrm{e} = 2\mathrm{e}\ln(4) + 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} - \mathrm{e}\ln(2) - \mathrm{e} + \mathrm{e}$

$= \mathrm{e}\ln(16) - \mathrm{e}\ln(2) = \mathrm{e}\ln(8)$

b $O(V) = 5$ geeft $\int_p^{2p} \ln(2x)\mathrm{d}x = 5$

Voer in $y_1 = \int_x^{2x} \ln(2x)\,\mathrm{d}x$ (TI en Casio) of $y_2 = \int_x^{2x} \ln(2p)\,\mathrm{d}p$ (HP) en $y_2 = 5$.

Intersect geeft $x = 2{,}503...$

Dus voor $p \approx 2{,}50$.

4 **a** $f(x) = (2x+6)^5 + \dfrac{10}{(3x-1)^2} = (2x+6)^5 + 10(3x-1)^{-2}$ geeft

$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}(2x+6)^6 - 10 \cdot \frac{1}{3}(3x-1)^{-1} + c = \frac{1}{12}(2x+6)^6 - \dfrac{10}{3(3x-1)} + c$

b $f(x) = (5x+2)^2 \cdot \sqrt{5x+2} = (5x+2)^{2\frac{1}{2}}$ geeft $F(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7}(5x+2)^{3\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{35}(5x+2)^3 \cdot \sqrt{5x+2} + c$

c $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x+3}$ geeft $F(x) = 4 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3} + c = 2\,\mathrm{e}^{2x+3} + c$

d $f(x) = 8 \cdot 2^{2x-1}$ geeft $F(x) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{2x-1} + c = \dfrac{4}{\ln(2)} \cdot 2^{2x-1} + c$

e $f(x) = \ln(2x+3)$ geeft $F(x) = \frac{1}{2}((2x+3)\ln(2x+3) - (2x+3)) + c = \left(x + 1\frac{1}{2}\right)\ln(2x+3) - x - 1\frac{1}{2} + c$

f $f(x) = \dfrac{6}{2x+5}$ geeft $F(x) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln|2x+5| + c = 3\ln|2x+5| + c$

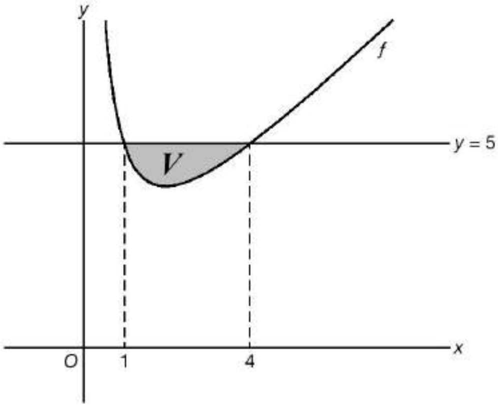
5 **a** $f(x) = 5$ geeft $\frac{x^2 + 4}{x} = 5$

$x^2 + 4 = 5x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x - 1)(x - 4) = 0$

$x = 1 \vee x = 4$

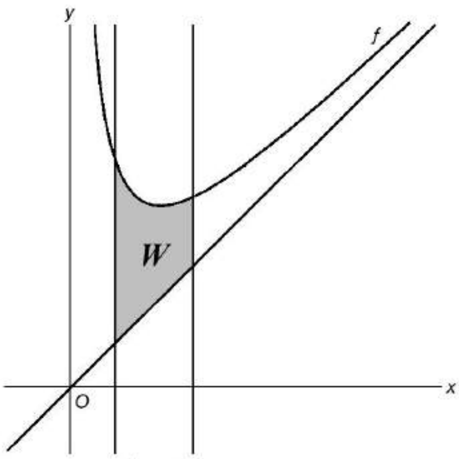


$$O(V) = \int_1^4 \left(5 - \frac{x^2 + 4}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[5x - \tfrac{1}{2}x^2 - 4\ln|x|\right]_1^4 = 20 - 8 - 4\ln(4) - \left(5 - \tfrac{1}{2} - 0\right)$$

$$= 12 - 4\ln(4) - 4\tfrac{1}{2} = 7\tfrac{1}{2} - 4\ln(4)$$

b $O(W) = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{x^2 + 4}{x} - x\right) \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{4}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[4\ln|x|\right]_1^{\mathrm{e}} = 4 - 0 = 4$

c



$O(W) = 3$

$\int_1^p \left(\frac{x^2 + 4}{x} - x\right) \mathrm{d}x = 3$

$\int_1^p \left(\frac{4}{x}\right) \mathrm{d}x = 3$

$\left[4\ln|x|\right]_1^p = 3$

$4\ln(p) = 3$

$\ln(p) = \frac{3}{4}$

$p = \mathrm{e}^{\frac{3}{4}} \approx 2{,}12$

11

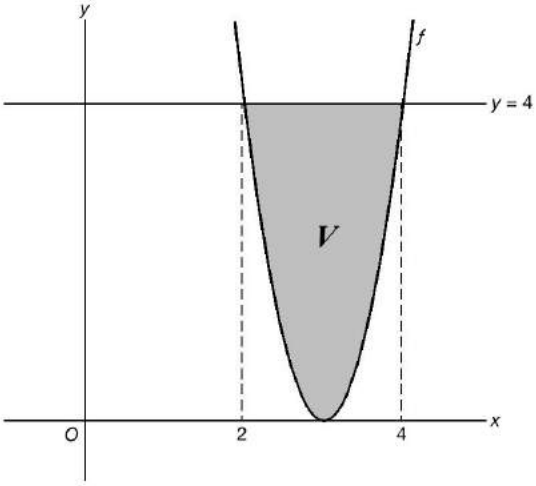
Bladzijde 145

6 **a** $f(x) = 4$ geeft $(2x-6)^2 = 4$

$2x - 6 = 2 \vee 2x - 6 = -2$

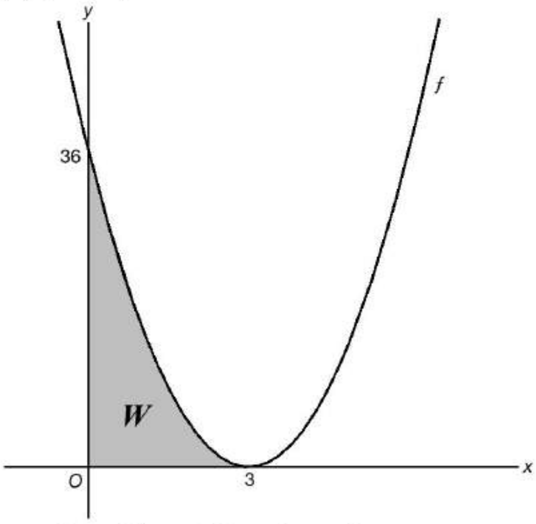
$2x = 8 \vee 2x = 4$

$x = 4 \vee x = 2$



$$I(L) = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \pi \int_2^4 (2x-6)^4 \,dx = 32\pi - \pi\left[\tfrac{1}{10}(2x-6)^5\right]_2^4 = 32\pi - \pi\left(\tfrac{1}{10} \cdot 32 - \tfrac{1}{10} \cdot -32\right) = 32\pi - 6\tfrac{2}{5}\pi = 25\tfrac{3}{5}\pi$$

b $f(0) = (-6)^2 = 36$



$y = (2x-6)^2$ geeft $2x - 6 = -\sqrt{y}$

$2x = -\sqrt{y} + 6$

$x = -\frac{1}{2}\sqrt{y} + 3$

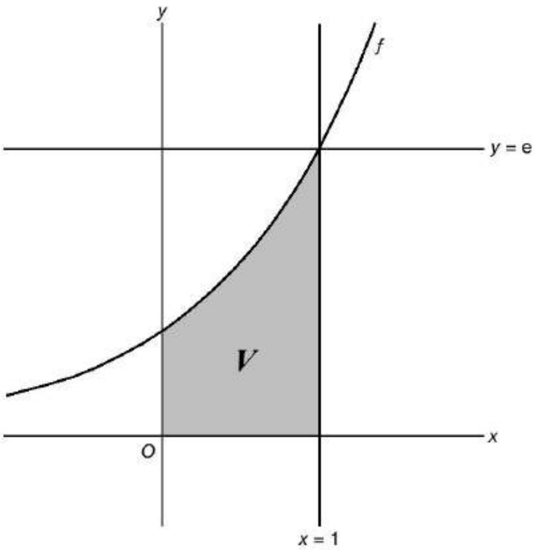
$x^2 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{y} + 3\right)^2$

$x^2 = \frac{1}{4}y - 3\sqrt{y} + 9$

$$I(K) = \pi \int_0^{36} x^2 \,dy = \pi \int_0^{36} \left(\tfrac{1}{4}y - 3y^{\frac{1}{2}} + 9\right) dy = \pi\left[\tfrac{1}{8}y^2 - 3 \cdot \tfrac{2}{3}y^{1\frac{1}{2}} + 9y\right]_0^{36} = \pi\left[\tfrac{1}{8}y^2 - 2y\sqrt{y} + 9y\right]_0^{36}$$

$$= \pi(162 - 432 + 324 - 0) = 54\pi$$

7



$f(x) = \mathrm{e}^x$

$\downarrow$ translatie $(0, -\mathrm{e})$

$y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$

Wentelen om de lijn $y = \mathrm{e}$ geeft dezelfde inhoud als het vlakdeel ingesloten door de y-as, de lijn $x = 1$, de lijn $y = -\mathrm{e}$ en de grafiek van $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$ wentelen om de x-as.

$$I(L) = \pi \int_0^1 ((-\mathrm{e})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e})^2)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (\mathrm{e}^2 - (\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^2))\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (-\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \pi\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}^2 - \left(-\tfrac{1}{2} + 2\mathrm{e}\right)\right) = \left(1\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + \tfrac{1}{2}\right)\pi$$

8 **a** Stel $a(t) = mt + n$ met $m = \dfrac{a(60) - a(0)}{60} = \dfrac{68 - 8}{60} = 1$ and $a(0) = 8$ $\Big\}$ $a(t) = t + 8$

$a(t) = t + 8$ en $v(0) = 0$ geeft $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 8t$

$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 8t$ en $s(0) = 0$ geeft $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + 4t^2$

$s(60) = \frac{1}{6} \cdot 60^3 + 4 \cdot 60^2 = 50\,400$ m

b Vanaf $t = 60$ is $a(t) = -10$, dus $v(t) = -10t + v(60)$ and $v(60) = \frac{1}{2} \cdot 60^2 + 8 \cdot 60 = 2280$ $\Big\}$ $v(t) = -10t + 2280$

$v(t) = -10t + 2280$ en $s(60) = 50\,400$ geeft $s(t) = -5t^2 + 2280t + 50\,400$

De hoogte is maximaal als de snelheid 0 m/s is.

$v(t) = 0$ geeft $-10t + 2280 = 0$

$-10t = -2280$

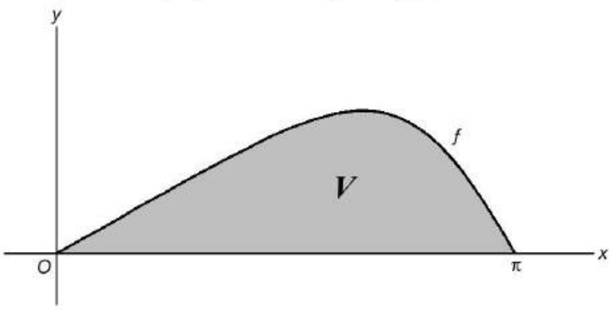
$t = 228$

$s(228) = -5 \cdot 228^2 + 2280 \cdot 288 + 50\,400 = 310\,320$

Dus de maximale hoogte is 310,32 km.

9 **a** Voer in $y_1 = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x) + 2}$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 0 \vee x = \pi$.



De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft $I(L) = \pi \int_0^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x \approx 1{,}53$.

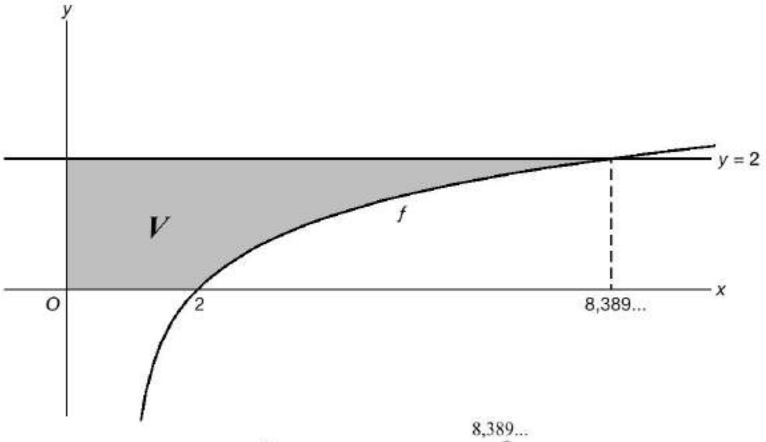
b $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x) + 2}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(\cos(x)+2)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot -\sin(x)}{(\cos(x)+2)^2} = \frac{\cos^2(x) + 2\cos(x) + \sin^2(x)}{(\cos(x)+2)^2} = \frac{2\cos(x)+1}{(\cos(x)+2)^2}$$

De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft booglengte $= \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{2\cos(x)+1}{(\cos(x)+2)^2}\right)^2}\,dx = 3{,}41...$

Dus de omtrek van V is $3{,}41... + \pi \approx 6{,}56$.

10 **a** Voer in $y_1 = \ln(x-1)$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 2$.
Voer in $y_2 = 2$.
Intersect geeft $x = 8{,}389...$



De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft $\pi \displaystyle\int_2^{8{,}389...} (\ln(x-1))^2\,dx = 40{,}143...$

Dus $I(L) = \pi \cdot 2^2 \cdot 8{,}389... - 40{,}143... \approx 65{,}28$.

b $f(x) = \ln(x-1)$
$\downarrow$ translatie $(0, -2)$
$y = -2 + \ln(x-1)$
Wentelen om $y = 2$ geeft dezelfde inhoud als het vlakdeel ingesloten door de x-as, y-as, de lijn $y = -2$ en de grafiek van $y = -2 + \ln(x-1)$ wentelen om de x-as.

De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft $\pi \displaystyle\int_2^{8{,}389...} (-2 + \ln(x-1))^2\,dx = 15{,}01...$

Dus $I(M) = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 + 15{,}01... \approx 40{,}14$.

c $y = \ln(x-1)$ geeft $x - 1 = e^y$

$$x = e^y + 1$$
$$x^2 = (e^y + 1)^2$$
$$x^2 = e^{2y} + 2e^y + 1$$

$$I(N) = \pi\int_0^2 (e^{2y} + 2e^y + 1)\,dy = \pi\left[\tfrac{1}{2}e^{2y} + 2e^y + y\right]_0^2 = \pi\left(\tfrac{1}{2}e^4 + 2e^2 + 2 - \left(\tfrac{1}{2} + 2 + 0\right)\right) = \left(\tfrac{1}{2}e^4 + 2e^2 - \tfrac{1}{2}\right)\pi$$

d $f(x) = \ln(x-1)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

De optie fnInt (TI) of $\int$dx (Casio) geeft booglengte $= \displaystyle\int_2^{8{,}389...} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x-1}\right)^2}\,dx = 6{,}788...$

Dus de omtrek van V is $2 + 2 + 8{,}389... + 6{,}788... \approx 19{,}18$.

11

12 Goniometrische formules

Voorkennis Vergelijkingen, afgeleiden en primitieven bij goniometrie

Bladzijde 149

1 **a** $\sin\left(4x - \frac{1}{6}\pi\right) = 1$

$4x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$4x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

b $\cos^2(3x) = 1$

$\cos(3x) = 1 \vee \cos(3x) = -1$

$3x = k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi + k \cdot 2\pi$

$x = k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Dit kan nog worden samen genomen tot $x = k \cdot \frac{1}{3}\pi$.

c $2\sin\left(4x - \frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{2}$

$\sin\left(4x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$4x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 4x - \frac{1}{6}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$4x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 4x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{5}{48}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{11}{48}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

d $4\cos^2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = 3$

$\cos^2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{3}{4}$

$\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

Dit kan nog worden samengenomen tot $x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$.

e $\sin(2x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

$2x = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - \left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

f $\cos(3x) = \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$

$3x = x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -x + \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee 4x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{24}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

2 **a** $\sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) + 1 = 0$

$\sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = -1$

$x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

b $\cos^2(x) + \cos(x) = 0$

$\cos(x)(\cos(x) + 1) = 0$

$\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = -1$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

c $2\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) + \sqrt{3} = 0$

$2\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$

$\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$2x + \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{3}\pi = \pi - 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$

d $\cos(2x) - \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$

$\cos(2x) = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

$2x = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

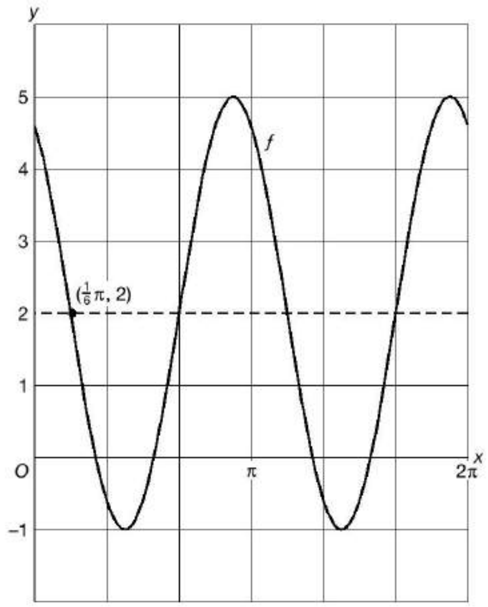
$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi \vee x = 1\frac{3}{4}\pi$

3 **a** $f(x) = 2 - 3\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 2 - 3\sin\left(2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right)$
de evenwichtsstand is 2
de amplitude is 3
de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$
$-3 < 0$, dus de grafiek gaat dalend door het beginpunt $\left(\frac{1}{6}\pi, 2\right)$.

b



c $f(0) = 2 - 3\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = 2 - 3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$f\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 2 - 3\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = 2 - 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 - 3 = -1$

$f\left(\frac{19}{24}\pi\right) = 2 - 3\sin\left(\frac{38}{24}\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = 2 - 3\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = 2 - 3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

12

d $f(x) = \frac{1}{2}$ geeft $2 - 3\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

$$-3\sin\left(2x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = -1\tfrac{1}{2}$$
$$\sin\left(2x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2}$$
$$2x - \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \tfrac{1}{3}\pi = \pi - \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \tfrac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi$.

$f(x) > \frac{1}{2}$ geeft $0 \leq x < \frac{1}{4}\pi \vee \frac{7}{12}\pi < x < 1\frac{1}{4}\pi \vee 1\frac{7}{12}\pi < x \leq 2\pi$

Bladzijde 150

4 **a** $y = a + b\sin(c(x - d))$

$a = \dfrac{3 + 1}{2} = 2$

$b = 3 - 2 = 1$

Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $x = 1$ en $x = 4$, dus $d = 1$ en de periode $= 4 - 1 = 3$, dus $c = \dfrac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

Dus $y = 2 + \sin\left(\frac{2}{3}\pi(x - 1)\right)$.

b $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $a = 2, b = 1$ en $c = \frac{2}{3}\pi$.

Het punt $\left(1 + \frac{1}{4} \cdot 3, 3\right) = \left(1\frac{3}{4}, 3\right)$ is een hoogste punt, dus $d = 1\frac{3}{4}$.

Dus $y = 2 + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\left(x - 1\frac{3}{4}\right)\right)$.

c $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $a = 2, b = -1$ en $c = \frac{2}{3}\pi$.

Het punt $\left(1 - \frac{1}{4} \cdot 3, 1\right) = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ is een laagste punt, dus $d = \frac{1}{4}$.

Dus $y = 2 - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right)$.

5 **a** $f(x) = 3 - 2\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ geeft $f'(x) = 2\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(\pi) = 2\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

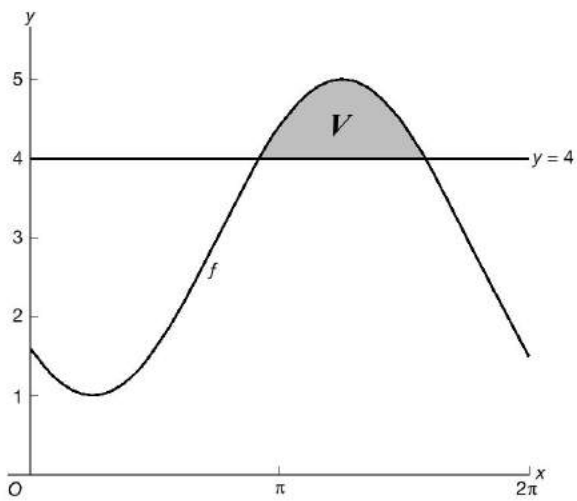
$$\left.\begin{array}{l} y = x\sqrt{2} + b \\ f(\pi) = 3 - 2\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 3 - 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}, \text{ dus } A\left(\pi, 3 + \sqrt{2}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi\sqrt{2} + b = 3 + \sqrt{2} \\ b = 3 + (1 - \pi)\sqrt{2} \end{array}$$

Dus k: $y = x\sqrt{2} + 3 + (1 - \pi)\sqrt{2}$.

b $f(x) = 4$ geeft $3 - 2\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = 4$

$$-2\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right) = 1$$
$$\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}$$
$$x - \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \tfrac{1}{4}\pi = -\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\tfrac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{11}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi$



$$O(V) = \int_{\frac{11}{12}\pi}^{1\frac{7}{12}\pi} (f(x) - 4)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{11}{12}\pi}^{1\frac{7}{12}\pi} \left(-1 - 2\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right)\right)\mathrm{d}x = \left[-x - 2\sin\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right)\right]_{\frac{11}{12}\pi}^{1\frac{7}{12}\pi}$$
$$= -1\tfrac{7}{12}\pi - 2\sin\left(1\tfrac{1}{3}\pi\right) - \left(-\tfrac{11}{12}\pi - 2\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right) = -1\tfrac{7}{12}\pi - 2 \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{11}{12}\pi + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \tfrac{2}{3}\pi$$

6 **a** $f(x) = \dfrac{3\sin(x)}{2-\cos(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(2-\cos(x))\cdot 3\cos(x) - 3\sin(x)\cdot\sin(x)}{(2-\cos(x))^2} = \frac{6\cos(x) - 3\cos^2(x) - 3\sin^2(x)}{(2-\cos(x))^2} = \frac{6\cos(x)-3}{(2-\cos(x))^2}$$

$f'(x) = 0$ geeft $6\cos(x) - 3 = 0$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$, dus $x_A = \frac{1}{3}\pi$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \frac{3\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{2-\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \text{ dus } A\left(\tfrac{1}{3}\pi, \sqrt{3}\right).$$

b $F(x) = 3\ln(2-\cos(x))$ geeft $F'(x) = 3\cdot\dfrac{1}{2-\cos(x)}\cdot\sin(x) = \dfrac{3\sin(x)}{2-\cos(x)}$

Dus $F'(x) = f(x)$ en is $F(x) = 3\ln(2-\cos(x))$ een primitieve van f.

$$O(V) = \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[3\ln(2-\cos(x))\right]_0^{\pi} = 3\ln(2--1) - 3\ln(2-1) = 3\ln(3)$$

12.1 Formules bij vergelijkingen en herleidingen

Bladzijde 151

1 **a** $\sin(2x) + \sin(x) = 0$ geeft $\sin(2x) = -\sin(x)$ en vanwege de formule $-\sin(A) = \sin(A+\pi)$ is deze vergelijking te herleiden tot $\sin(2x) = \sin(x+\pi)$.

b $\sin(2x) = \sin(x+\pi)$

$2x = x + \pi + k\cdot 2\pi \vee 2x = \pi - (x+\pi) + k\cdot 2\pi$

$x = \pi + k\cdot 2\pi \vee 2x = \pi - x - \pi + k\cdot 2\pi$

$x = \pi + k\cdot 2\pi \vee 3x = k\cdot 2\pi$

$x = \pi + k\cdot 2\pi \vee x = k\cdot\frac{2}{3}\pi$

2 $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

$\cos\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(x + 1\frac{1}{3}\pi\right)$

$2x - \frac{5}{6}\pi = x + 1\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \vee 2x - \frac{5}{6}\pi = -x - 1\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = 2\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee 3x = -\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = 2\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

Bladzijde 152

3 **a** $\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2x)$

$\cos(x) = \cos(2x)$

$x = 2x + k\cdot 2\pi \vee x = -2x + k\cdot 2\pi$

$-x = k\cdot 2\pi \vee 3x = k\cdot 2\pi$

$x = k\cdot 2\pi \vee x = k\cdot\frac{2}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi \vee x = 2\pi$

b $\sin(3x) = -\cos(x)$

$\cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(x+\pi)$

$3x - \frac{1}{2}\pi = x + \pi + k\cdot 2\pi \vee 3x - \frac{1}{2}\pi = -(x+\pi) + k\cdot 2\pi$

$2x = 1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \vee 3x - \frac{1}{2}\pi = -x - \pi + k\cdot 2\pi$

$x = \frac{3}{4}\pi + k\cdot\pi \vee 4x = -\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = \frac{3}{4}\pi + k\cdot\pi \vee x = -\frac{1}{8}\pi + k\cdot\frac{1}{2}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{3}{8}\pi \vee x = \frac{7}{8}\pi \vee x = 1\frac{3}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi$

12

c $\sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = 1$

$1 - \cos^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x) - 1 = 0$

$-\cos^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = 0$

$-\cos(x)\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

x op $[\,0, 2\pi\,]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$

d $\cos(x - 1) = -\cos(2x + 1)$
$\cos(x - 1) = \cos(2x + 1 + \pi)$
$x - 1 = 2x + 1 + \pi + k \cdot 2\pi \vee x - 1 = -(2x + 1 + \pi) + k \cdot 2\pi$
$-x = 2 + \pi + k \cdot 2\pi \vee x - 1 = -2x - 1 - \pi + k \cdot 2\pi$
$x = -2 - \pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -2 - \pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
x op $[\,0, 2\pi\,]$ geeft $x = -2 + \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$

e $\sin(2x + \pi) = 1 - 2\sin(2x)$
$-\sin(2x) = 1 - 2\sin(2x)$
$\sin(2x) = 1$
$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
x op $[\,0, 2\pi\,]$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi$

f $2\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0$
$2(1 - \cos^2(x)) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0$
$2 - 2\cos^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0$
$-\cos^2(x) + \cos(x) + 2 = 0$
$\cos^2(x) - \cos(x) - 2 = 0$
$(\cos(x) + 1)(\cos(x) - 2) = 0$
$\cos(x) = -1 \vee \cos(x) = 2$
$x = \pi + k \cdot 2\pi$ geen opl.
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \pi$

4 **a** $\cos(2\pi t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$

$\cos(2\pi t) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)$

$2\pi t = \frac{1}{2}\pi t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2\pi t = -\left(\frac{1}{2}\pi t - \frac{1}{2}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$1\frac{1}{2}\pi t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2\pi t = -\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$1\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2} + k \cdot 2 \vee 2\frac{1}{2}\pi t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = -\frac{1}{3} + k \cdot 1\frac{1}{3} \vee 2\frac{1}{2}t = \frac{1}{2} + k \cdot 2$

$t = -\frac{1}{3} + k \cdot 1\frac{1}{3} \vee t = \frac{1}{5} + k \cdot \frac{4}{5}$

t op $[\,0, 3\,]$ geeft $t = 1 \vee t = 2\frac{1}{3} \vee t = \frac{1}{5} \vee t = 1\frac{4}{5} \vee t = 2\frac{3}{5}$

b $\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = -\cos(\pi t)$

$\cos\left(\frac{1}{6}\pi t - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(\pi t + \pi)$

$\frac{1}{6}\pi t - \frac{1}{2}\pi = \pi t + \pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{6}\pi t - \frac{1}{2}\pi = -(\pi t + \pi) + k \cdot 2\pi$

$-\frac{5}{6}\pi t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{6}\pi t - \frac{1}{2}\pi = -\pi t - \pi + k \cdot 2\pi$

$-\frac{5}{6}t = 1\frac{1}{2} + k \cdot 2 \vee 1\frac{1}{6}\pi t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = -1\frac{4}{5} + k \cdot 2\frac{2}{5} \vee 1\frac{1}{6}t = -\frac{1}{2} + k \cdot 2$

$t = -1\frac{4}{5} + k \cdot 2\frac{2}{5} \vee t = -\frac{3}{7} + k \cdot 1\frac{5}{7}$

t op $[\,0, 3\,]$ geeft $t = \frac{3}{5} \vee t = 1\frac{2}{7} \vee t = 3$

5 **a** $2\sin(x) = \sin(x)$
$\sin(x) = 0$

b $\sin(2x) = \sin(x)$
$2x = x + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - x + k \cdot 2\pi$

c –

d –

e $\sin(2x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$
$2x = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - \left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

f –

6 **a** $y = \cos(x)$

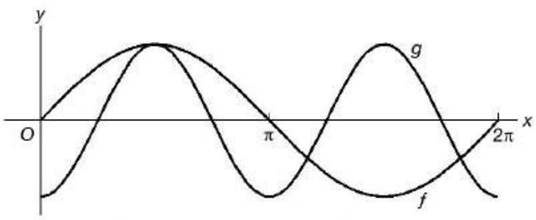
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$

$y = \cos(2x)$

$\downarrow$ verm. x-as, -1

$y = -\cos(2x)$

b



c $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{4}\pi$

d $g(x) = \frac{1}{2}$ geeft $-\cos(2x) = \frac{1}{2}$

$$\cos(2x) = -\frac{1}{2}$$
$$2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$

e $f(x) = g(x)$ geeft $\sin(x) = -\cos(2x)$

$$\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2x + \pi)$$
$$x - \frac{1}{2}\pi = 2x + \pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{2}\pi = -(2x + \pi) + k \cdot 2\pi$$
$$-x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{2}\pi = -2x - \pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

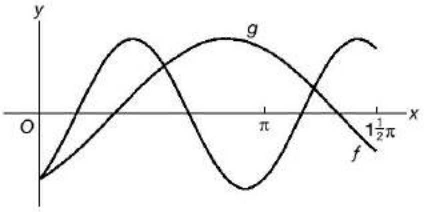
$f(x) \le g(x)$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee 1\frac{1}{6}\pi \le x \le 1\frac{5}{6}\pi$

7 **a** $f(x) = \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right)$
de evenwichtsstand is 0
de amplitude is 1
de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$
stijgend door beginpunt $\left(\frac{1}{6}\pi, 0\right)$

$g(x) = -\cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$
de evenwichtsstand is 0
de amplitude is 1
de periode is $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$
een laagste beginpunt is $\left(-\frac{1}{6}\pi, -1\right)$

12

b



c $f(x) = 0$ geeft $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$

$$2x - \tfrac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$$
$$2x = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

x op $\left[0, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi$

Dus de nulpunten van f zijn $\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi$ en $1\frac{1}{6}\pi$.

$g(x) = 0$ geeft $-\cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) = 0$

$$\cos\left(x + \tfrac{1}{6}\pi\right) = 0$$
$$x + \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

x op $\left[0, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi$.

Dus de nulpunten van g zijn $\frac{1}{3}\pi$ en $1\frac{1}{3}\pi$.

d $f(x) = \frac{1}{2}$ geeft $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

$$2x - \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \tfrac{1}{3}\pi = \pi - \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee 2x = 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \tfrac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

x op $\left[0, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi$

$f(x) > \frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{7}{12}\pi \vee 1\frac{1}{4}\pi < x \leq 1\frac{1}{2}\pi$

e $f(x) = g(x)$ geeft $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$

$$\cos\left(2x - \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \tfrac{1}{6}\pi + \pi\right)$$
$$\cos\left(2x - \tfrac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(x + 1\tfrac{1}{6}\pi\right)$$
$$2x - \tfrac{5}{6}\pi = x + 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \tfrac{5}{6}\pi = -\left(x + 1\tfrac{1}{6}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$
$$x = 2\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \tfrac{5}{6}\pi = -x - 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = k \cdot 2\pi \vee 3x = -\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = k \cdot 2\pi \vee x = -\tfrac{1}{9}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi$$

12

x op $\left[0, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ geeft $x = 0 \vee x = \frac{5}{9}\pi \vee x = 1\frac{2}{9}\pi$

$f(x) < g(x)$ geeft $\frac{5}{9}\pi < x < 1\frac{2}{9}\pi$

Bladzijde 153

8 **a** $AC = y_A - y_B = \sin(\alpha) - \sin(\beta)$

$BC = x_B - x_A = \cos(\beta) - \cos(\alpha)$

b $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= (\sin(\alpha) - \sin(\beta))^2 + (\cos(\beta) - \cos(\alpha))^2$

$= \sin^2(\alpha) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) - 2\cos(\beta)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)$

$= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$

$= 2 - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$

Bladzijde 154

9 **a** $\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$
u vervangen door $-u$ geeft
$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(-u)+\sin(t)\sin(-u)$
$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\cdot -\sin(u)$
$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$

b $\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$
u vervangen door $u-\frac{1}{2}\pi$ geeft
$\cos\left(t+u-\frac{1}{2}\pi\right)=\cos(t)\cos\left(u-\frac{1}{2}\pi\right)-\sin(t)\sin\left(u-\frac{1}{2}\pi\right)$
$\sin(t+u)=\cos(t)\sin(u)-\sin(t)\cdot -\cos(u)$
$\sin(t+u)=\cos(t)\sin(u)+\sin(t)\cos(u)$
$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$

c $\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$
u vervangen door $-u$ geeft
$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(-u)+\cos(t)\sin(-u)$
$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\cdot -\sin(u)$
$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$

10 **a** $\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$
t en u vervangen door A geeft
$\sin(A+A)=\sin(A)\cos(A)+\cos(A)\sin(A)$
$\sin(2A)=2\sin(A)\cos(A)$

$\cos(t+u)=\cos(u)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$
t en u beide vervangen door A geeft
$\cos(A+A)=\cos(A)\cos(A)-\sin(A)\sin(A)$
$\cos(2A)=\cos^2(A)-\sin^2(A)$

b $\cos(2A)=\cos^2(A)-\sin^2(A)$
$\cos(2A)=\cos^2(A)-(1-\cos^2(A))$
$\cos(2A)=\cos^2(A)-1+\cos^2(A)$
$\cos(2A)=2\cos^2(A)-1$

$\cos(2A)=\cos^2(A)-\sin^2(A)$
$\cos(2A)=1-\sin^2(A)-\sin^2(A)$
$\cos(2A)=1-2\sin^2(A)$

Bladzijde 155

11 **a** $\cos(2A)=2\cos^2(A)-1$
$2\cos^2(A)=1+\cos(2A)$
$\cos^2(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2A)$

b $\cos(2A)=1-2\sin^2(A)$
$2\sin^2(A)=1-\cos(2A)$
$\sin^2(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2A)$

12 **a** $2\sin(x)\cos(x)=\sin(x-1)$
$\sin(2x)=\sin(x-1)$
$2x=x-1+k\cdot 2\pi \vee 2x=\pi-(x-1)+k\cdot 2\pi$
$x=-1+k\cdot 2\pi \vee 2x=\pi-x+1+k\cdot 2\pi$
$x=-1+k\cdot 2\pi \vee 3x=\pi+1+k\cdot 2\pi$
$x=-1+k\cdot 2\pi \vee x=\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{3}+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

b $\cos^2(2x)=\cos(4x)+\frac{1}{2}$

$\cos^2(2x)-\frac{1}{2}=\cos(4x)$

$\frac{1}{2}\cos(4x)=\cos(4x)$

$\cos(4x)=0$

$4x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$

$x=\frac{1}{8}\pi+k\cdot\frac{1}{4}\pi$

c $\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos(x) + 1\frac{1}{4}$

$\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) + 1\frac{1}{4}$

$3\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\frac{1}{4}$

$\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{4}$

$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \pi - \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \pi - -\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k\cdot 4\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + k\cdot 4\pi \vee \frac{1}{2}x = 1\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k\cdot 4\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi + k\cdot 4\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + k\cdot 4\pi \vee x = 2\frac{2}{3}\pi + k\cdot 4\pi$

Dit kan nog worden samengenomen tot $x = \frac{2}{3}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$.

d $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1\frac{1}{2}$

$\sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1\frac{1}{2}$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) + \sin(2x) = 1\frac{1}{2}$

$1 + \sin(2x) = 1\frac{1}{2}$

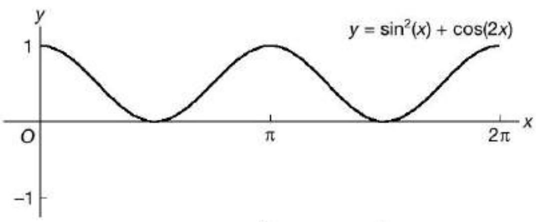
$\sin(2x) = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee 2x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{12}\pi + k\cdot\pi \vee 2x = \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{12}\pi + k\cdot\pi \vee x = \frac{5}{12}\pi + k\cdot\pi$

13 **a**



De evenwichtsstand is $\frac{1}{2}$, dus $a = \frac{1}{2}$.

De amplitude is $\dfrac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$, dus $b = \frac{1}{2}$.

De periode is π, dus $c = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

Een hoogste punt is $(0, 1)$, dus $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

b $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ geeft $2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$ dus $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$

$y = \sin^2(x) + \cos(2x)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \cos(2x)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

14 $\sin(3x) = \sin(2x + x)$
$= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)$
$= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + (1 - 2\sin^2(x))\cdot\sin(x)$
$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$
$= 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$
$= 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$
$= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

15 **a** $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ geeft $2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$ dus $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$
$y = 1 - \cos(x) - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$
$= 1 - \cos(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x)$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(x)$

b $\cos(3x) = \cos(2x + x)$
$= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$
$= (2\cos^2(x) - 1)\cdot\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x)$
$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)$
$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cdot\cos(x)$
$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x)$
$= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

16 **a** $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$

b $\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$

c $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(x)$ ofwel $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$

d $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$ ofwel $\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$

e $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$

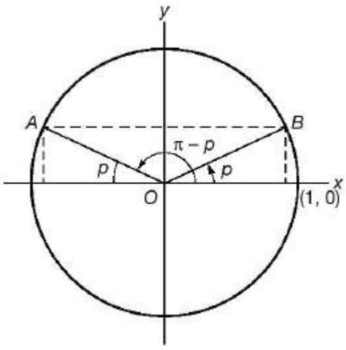
12.2 Goniometrische formules bij symmetrie en primitiveren

Bladzijde 157

17 $x_B = -x_A$ en $y_B = y_A$
$x_C = -x_A$ en $y_C = -y_A$

Bladzijde 158

18



Uit de symmetrie volgt $\sin(\pi - p) = y_A = y_B = \sin(p)$ en $\cos(x - p) = x_A = -x_B = -\cos(p)$.

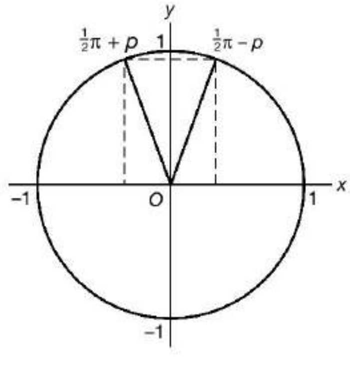
19 **a** $\left.\begin{array}{l} f(p) = p\cos(p) \\ f(-p) = -p\cos(-p) = -p\cos(p) \end{array}\right\} f(p) + f(-p) = p\cos(p) - p\cos(p) = 0$
Dus de grafiek van f is puntsymmetrisch in de oorsprong.

b $\left.\begin{array}{l} g(p) = p\sin(p) \\ g(-p) = -p\sin(-p) = p\sin(p) \end{array}\right\} g(p) = g(-p)$
Dus de grafiek van g is symmetrisch in de y-as.

20 **a** $f(p) = \cos^2(p)\sin(p)$
$f(-p) = \cos^2(-p)\sin(-p) = \cos^2(p)\cdot -\sin(p) = -\cos^2(p)\sin(p)$
Er geldt $f(p) + f(-p) = \cos^2(p)\sin(p) - \cos^2(p)\sin(p) = 0$.
Dus de grafiek van f is puntsymmetrisch in O.

b $f\left(\frac{1}{2}\pi + p\right) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi + p\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi + p\right)$
$= \left(-\cos\left(\frac{1}{2}\pi - p\right)\right)^2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\pi - p\right)$
$= \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi - p\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi - p\right)$
$= f\left(\frac{1}{2}\pi - p\right)$

Er geldt $f\left(\frac{1}{2}\pi + p\right) = f\left(\frac{1}{2}\pi - p\right)$, dus de grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.



21 **a** $f(-\frac{1}{4}\pi - p) = 2\sin(-\frac{1}{4}\pi - p) - 2\cos(-\frac{1}{4}\pi - p)$

$= 2(\sin(-\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \cos(-\frac{1}{4}\pi)\sin(p)) - 2(\cos(-\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \sin(-\frac{1}{4}\pi)\sin(p))$

$= 2(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p)) - 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p))$

$= -\sqrt{2}\cdot\cos(p) - \sqrt{2}\cdot\sin(p) - \sqrt{2}\cdot\cos(p) + \sqrt{2}\cdot\sin(p)$

$= -2\sqrt{2}\cdot\cos(p)$

b $f(-\frac{1}{4}\pi + p) = 2\sin(-\frac{1}{4}\pi + p) - 2\cos(-\frac{1}{4}\pi + p)$

$= 2(\sin(-\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \cos(-\frac{1}{4}\pi)\sin(p)) - 2(\cos(-\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \sin(-\frac{1}{4}\pi)\sin(p))$

$= 2(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p)) - 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p))$

$= -\sqrt{2}\cdot\cos(p) + \sqrt{2}\cdot\sin(p) - \sqrt{2}\cdot\cos(p) - \sqrt{2}\cdot\sin(p)$

$= -2\sqrt{2}\cdot\cos(p)$

Er geldt $f(-\frac{1}{4}\pi - p) = f(-\frac{1}{4}\pi + p)$ dus de grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = -\frac{1}{4}\pi$.

22 **a** $f(\frac{1}{4}\pi + p) = \cos(\frac{1}{4}\pi + p) + \sin(\frac{1}{4}\pi + p) + 1$

$= \cos(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \sin(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) + \sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) + 1$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) + 1$

$= \sqrt{2}\cdot\cos(p) + 1$

$f(\frac{1}{4}\pi - p) = \cos(\frac{1}{4}\pi - p) + \sin(\frac{1}{4}\pi - p) + 1$

$= \cos(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \sin(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) + \sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) + 1$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) + 1$

$= \sqrt{2}\cdot\cos(p) + 1$

Er geldt $f(\frac{1}{4}\pi + p) = f(\frac{1}{4}\pi - p)$ dus de grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$.

Alternatieve uitwerking

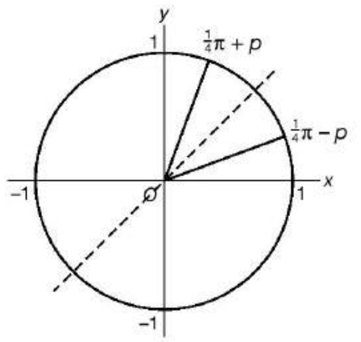
$f(\frac{1}{4}\pi + p) = \cos(\frac{1}{4}\pi + p) + \sin(\frac{1}{4}\pi + p) + 1$

$= \sin(\frac{1}{4}\pi - p) + \cos(\frac{1}{4}\pi - p) + 1$

$= \cos(\frac{1}{4}\pi - p) + \sin(\frac{1}{4}\pi - p) + 1$

$= f(\frac{1}{4}\pi - p)$

Er geldt $f(\frac{1}{4}\pi + p) = f(\frac{1}{4}\pi - p)$, dus de grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$.



b $f(\frac{3}{4}\pi - p) = \cos(\frac{3}{4}\pi - p) + \sin(\frac{3}{4}\pi - p) + 1$

$= \cos(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) + \sin(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) + \sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) + 1$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) + 1$

$= \sqrt{2}\cdot\sin(p) + 1$

$f(\frac{3}{4}\pi + p) = \cos(\frac{3}{4}\pi + p) + \sin(\frac{3}{4}\pi + p) + 1$

$= \cos(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) - \sin(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) + \sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) + 1$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(p) + 1$

$= -\sqrt{2}\cdot\sin(p) + 1$

$f(\frac{3}{4}\pi - p) + f(\frac{3}{4}\pi + p) = \sqrt{2}\cdot\sin(p) + 1 - \sqrt{2}\cdot\sin(p) + 1 = 2$

Dus de grafiek van f is puntsymmetrisch in het punt $(\frac{3}{4}\pi, 1)$.

12

23 **a** $y = \frac{1}{3}\sin^3(x)$ geeft $\left[\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]' = \sin^2(x)\cdot\cos(x)$ en dit is niet $f(x)$, dus $y = \frac{1}{3}\sin^3(x)$ is geen primitieve van f.

b $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
$2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$
$\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$

Dus $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

c $f(x) = \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ geeft $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$

Bladzijde 159

24 **a** $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$2\cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$
$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$

Dus $f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ geeft $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$.

b $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
$2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$
$\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$

Dus $g(x) = \sin^2(3x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(6x)$ geeft $G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin(6x) + c$.

c $\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$
$\sin(A)\cos(A) = \frac{1}{2}\sin(2A)$

Dus $h(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sin(x)$ geeft $H(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + c$.

25 **a** $\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$
$\sin(A)\cos(A) = \frac{1}{2}\sin(2A)$

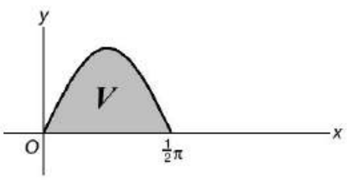
$$\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin(2x)\cos(2x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{2}\sin(4x)\,dx = \left[-\frac{1}{8}\cos(4x)\right]_0^{\frac{1}{6}\pi} = -\frac{1}{8}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{8}\cos(0) = -\frac{1}{8}\cdot -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot 1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

b $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
$2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$
$\frac{1}{2}\sin^2(A) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2A)$

$$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \left(2 - \frac{1}{2}\sin^2(x)\right)dx = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \left(2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2x)\right)dx = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \left(1\tfrac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(2x)\right)dx = \left[1\tfrac{3}{4}x + \frac{1}{8}\sin(2x)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi}$$

$$= 1\tfrac{3}{4}\pi + \frac{1}{8}\sin(2\pi) - \left(1\tfrac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{8}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 1\tfrac{3}{4}\pi + 0 - \left(\frac{7}{12}\pi + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1\tfrac{1}{6}\pi - \frac{1}{16}\sqrt{3}$$

26



$$I(L) = \pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (f(x))^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2(2x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\right)dx = \pi\left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)\right)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= \pi\left(\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{8}\sin(2\pi)\right) - \left(0 - \frac{1}{8}\sin(0)\right)\right) = \frac{1}{4}\pi^2$$

27 **a** $f(x) = 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1$ geeft $f'(x) = 4\sin(x)\cos(x) + \cos(x)$
$f'(x) = 0$ geeft $4\sin(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$
$\cos(x)(4\sin(x) + 1) = 0$
$\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = -\frac{1}{4}$
$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi \vee x = -0{,}252... + k\cdot 2\pi \vee x = \pi - -0{,}252... + k\cdot 2\pi$

Dus $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\tfrac{1}{2}\pi \vee x = 6{,}03... \vee x = 3{,}39...$

12

$x = \frac{1}{2}\pi$ geeft $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - 1 = 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 2$

$x = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft $f\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 2\sin^2\left(1\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) - 1 = 2 \cdot (-1)^2 + -1 - 1 = 0$

$x = 6{,}03...$ geeft $f(6{,}03...) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + -\frac{1}{4} - 1 = -1\frac{1}{8}$

$x = 3{,}39...$ geeft $f(3{,}39...) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + -\frac{1}{4} - 1 = -1\frac{1}{8}$

Dus $B_f = \left[-1\frac{1}{8}, 2\right]$.

b $f(x) = 0$ geeft $2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

Stel $\sin(x) = u$.

$2u^2 + u - 1 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$

$u = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \vee u = \dfrac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

$\sin(x) = -1 \vee \sin(x) = \frac{1}{2}$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

$$O(V) = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (2\sin^2(x) + \sin(x) - 1)\,dx = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (1 - \cos(2x) + \sin(x) - 1)\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (-\cos(2x) + \sin(x))\,dx = \left[-\tfrac{1}{2}\sin(2x) - \cos(x)\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) - \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) - \cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \left(-\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

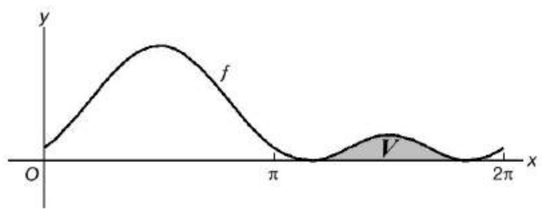
28 $f(x) = 0$ geeft $\sin^2(x) + \sin(x) + \frac{1}{4} = 0$

$\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$



$$O(V) = \int_{1\frac{1}{6}\pi}^{1\frac{5}{6}\pi} \left(\sin^2(x) + \sin(x) + \tfrac{1}{4}\right)dx = \int_{1\frac{1}{6}\pi}^{1\frac{5}{6}\pi} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \sin(x) + \tfrac{1}{4}\right)dx$$

$$= \int_{1\frac{1}{6}\pi}^{1\frac{5}{6}\pi} \left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \sin(x)\right)dx = \left[\tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x) - \cos(x)\right]_{1\frac{1}{6}\pi}^{1\frac{5}{6}\pi}$$

$$= \tfrac{11}{8}\pi - \tfrac{1}{4}\sin\left(3\tfrac{2}{3}\pi\right) - \cos\left(1\tfrac{5}{6}\pi\right) - \left(\tfrac{7}{8}\pi - \tfrac{1}{4}\sin\left(2\tfrac{1}{3}\pi\right) - \cos\left(1\tfrac{1}{6}\pi\right)\right)$$

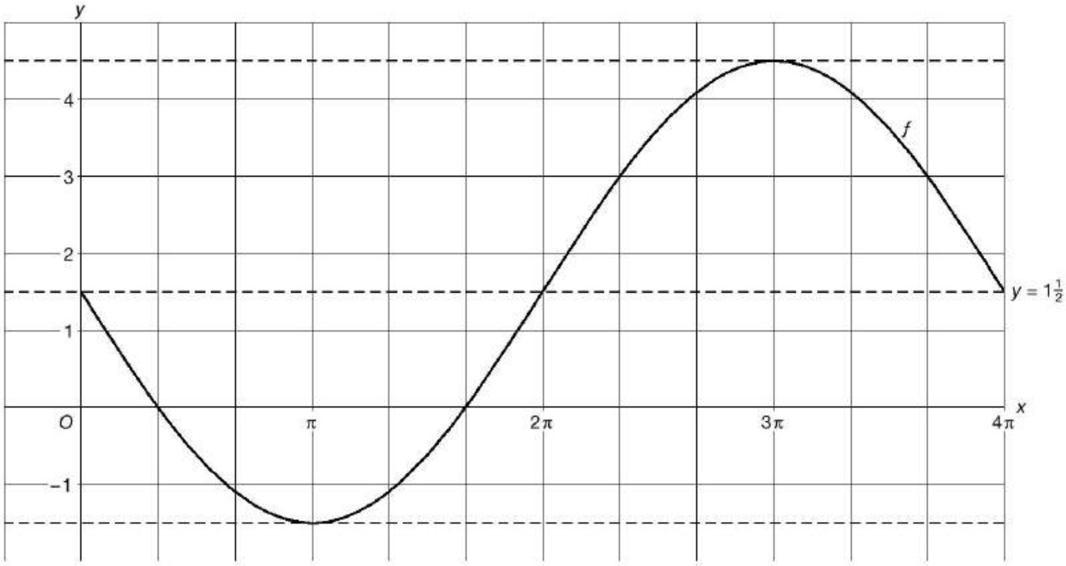
$$= \tfrac{11}{8}\pi - \tfrac{1}{4} \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \left(\tfrac{7}{8}\pi - \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \tfrac{11}{8}\pi + \tfrac{1}{8}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{7}{8}\pi + \tfrac{1}{8}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{3}{4}\sqrt{3}$$

29 **a** De evenwichtsstand is $1\frac{1}{2}$ en de amplitude is 3.

De periode is $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

$-3 < 0$, dus dalend door beginpunt $\left(0, 1\frac{1}{2}\right)$.



b $f(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2} - 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \tfrac{1}{2}x = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = 1\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

x op $[0,4\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$

$$O(V) = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} (0 - f(x))\,dx = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \left(-1\tfrac{1}{2} + 3\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)dx = \left[-1\tfrac{1}{2}x - 6\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi}$$

$$= -2\tfrac{1}{2}\pi - 6\cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\pi - 6\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)\right) = -2\tfrac{1}{2}\pi - 6 \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\pi + 6 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= -2\pi + 6\sqrt{3}$$

c $$I(L) = \pi \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} (f(x))^2\,dx = \pi \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \left(1\tfrac{1}{2} - 3\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \left(2\tfrac{1}{4} - 9\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + 9\sin^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right) dx$$

$$= \pi \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \left(2\tfrac{1}{4} - 9\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + 9\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(x)\right)\right) dx$$

$$= \pi \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \left(2\tfrac{1}{4} - 9\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + 4\tfrac{1}{2} - 4\tfrac{1}{2}\cos(x)\right) dx$$

$$= \pi \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \left(6\tfrac{3}{4} - 9\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) - 4\tfrac{1}{2}\cos(x)\right) dx$$

$$= \pi\left[6\tfrac{3}{4}x + 18\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) - 4\tfrac{1}{2}\sin(x)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \pi\left(\tfrac{45}{4}\pi + 18\cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) - 4\tfrac{1}{2}\sin\left(1\tfrac{2}{3}\pi\right) - \left(\tfrac{9}{4}\pi + 18\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) - 4\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right)\right)$$

$$= \pi\left(\tfrac{45}{4}\pi + 18 \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 4\tfrac{1}{2} \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{9}{4}\pi - 18 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 4\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \pi\left(9\pi - 9\sqrt{3} + 2\tfrac{1}{4}\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 2\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\right)$$

$$= 9\pi^2 - 13\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{3}$$

12

12.3 Cirkelbewegingen en trillingen

Bladzijde 161

30 **a** $y_P = \sin(ct)$ en de periode is 5, dus $c = \frac{2\pi}{5}$.

b formule II

Bladzijde 163

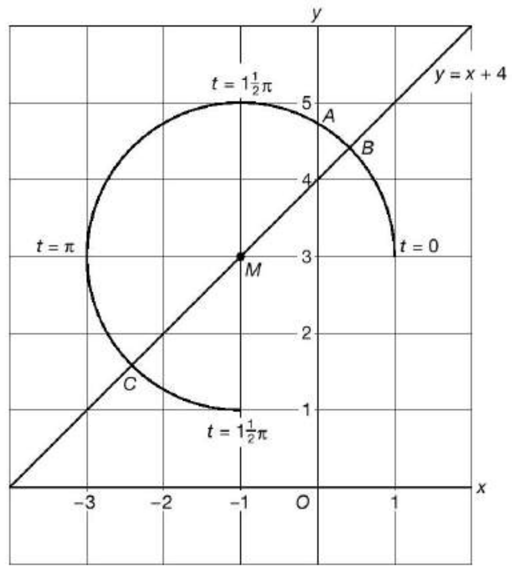
31 rc = -1 dus $\angle MAB = 45°$ en dus is $AB = BM$.

$AM = 4$ geeft $AB = BM = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Dus $x_A = x_M - AB = 2 - 2\sqrt{2}$ en $y_A = y_M + BM = 1 + 2\sqrt{2}$.

Bladzijde 164

32 **a** De baan van P is een driekwartcirkel met middelpunt $(-1, 3)$ en straal 2.
Op $t = 0$ is P in $(1, 3)$.
P draait linksom.



b $x = 0$ geeft $-1 + 2\cos(t) = 0$

$\cos(t) = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

t op $\left[0, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ geeft $t = \frac{1}{3}\pi$

$y_A = 3 + 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$, dus $A\left(0, 3 + \sqrt{3}\right)$.

c Substitutie van $x = -1 + 2\cos(t)$ en $y = 3 + 2\sin(t)$ in $y = x + 4$ geeft

$3 + 2\sin(t) = -1 + 2\cos(t) + 4$

$2\sin(t) = 2\cos(t)$

$\sin(t) = \cos(t)$

$\cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(t)$

$t - \frac{1}{2}\pi = t + k \cdot 2\pi \vee t - \frac{1}{2}\pi = -t + k \cdot 2\pi$

geen opl. $\quad 2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

t op $\left[0, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ geeft $t = \frac{1}{4}\pi \vee t = 1\frac{1}{4}\pi$

$t = \frac{1}{4}\pi$ geeft $x_B = -1 + 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = -1 + \sqrt{2}$ en $y_B = 3 + 2\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$.

$t = 1\frac{1}{4}\pi$ geeft $x_C = -1 + 2\cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -1 + 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -1 - \sqrt{2}$ en $y_C = 3 + 2\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = 3 + 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$.

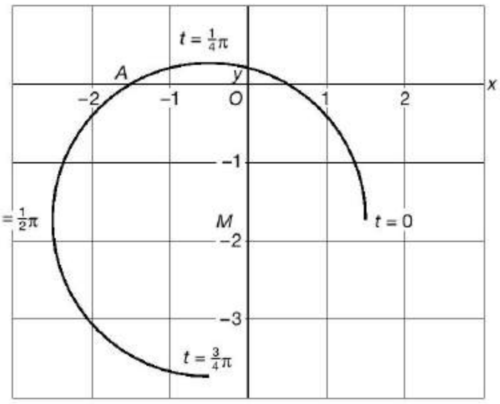
Dus $B\left(-1 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\right)$ en $C\left(-1 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}\right)$.

d Voer in $y_1 = -1 + 2\cos(x)$ en $y_2 = -2$.
Intersect geeft $x \approx 2{,}09$ en $x \approx 4{,}19$.
Dus P links van de lijn $x = -2$ geeft $2{,}09 < t < 4{,}19$.

33 **a** $\begin{cases} x_P = 5 + 3\cos(2t) \\ y_P = 2 + 3\sin(2t) \end{cases}$

b Voer in $y_1 = 2 + 3\sin(2x)$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 1{,}935...$ en $x = 2{,}776...$
$2{,}776... - 1{,}935... \approx 0{,}84$, dus per rondgang bevindt P zich 0,84 seconde onder de x-as.

34 **a** De baan van P is een driekwartcirkel met middelpunt $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$ en straal 2.
Op $t = 0$ is P in $\left(1\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$.
P draait linksom.



b $y = 0$ geeft $-\sqrt{3} + 2\sin(2t) = 0$

$$\sin(2t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$2t = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = \tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$t = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee t = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

t op $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$ geeft $t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi$

Voor A geldt $t = \frac{1}{3}\pi$ en dit geeft $x_A = -\frac{1}{2} + 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$.

Dus $A\left(-1\frac{1}{2}, 0\right)$.

c $x = -1\frac{1}{2}$ geeft $-\frac{1}{2} + 2\cos(2t) = -1\frac{1}{2}$

$$2\cos(2t) = -1$$
$$\cos(2t) = -\tfrac{1}{2}$$
$$2t = \tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$t = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

t op $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$ geeft $t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \frac{2}{3}\pi$

Dus P links van de lijn $x = -1\frac{1}{2}$ voor $\frac{1}{3}\pi < t < \frac{2}{3}\pi$.

d Voer in $y_1 = -\sqrt{3} + \sin(2x)$ en $y_2 = -2$.
Intersect geeft $x \approx 1{,}701$.
Dus P onder de lijn $y = -2$ voor $1{,}71 < t \leq \frac{3}{4}\pi$.

12

35 **a** Substitutie van $x = 2\cos(t)$ en $y = 2\sin(t)$ in $y = x + 1$ geeft $2\sin(t) = 2\cos(t) + 1$.
Voer in $y_1 = 2\sin(x)$ en $y_2 = 2\cos(x) + 1$.
Intersect geeft $x \approx 1{,}15$ en $y \approx 1{,}82$ en $x \approx 3{,}57$ en $y \approx -0{,}82$.
Voor $t \approx 1{,}15$ is $y \approx 1{,}82$ en $x = y - 1 \approx 0{,}82$.
Voor $t \approx 3{,}57$ is $y \approx -0{,}82$ en $x = y - 1 \approx -1{,}82$.
Dit geeft de snijpunten $(0{,}82; 1{,}82)$ en $(-1{,}82; -0{,}82)$.

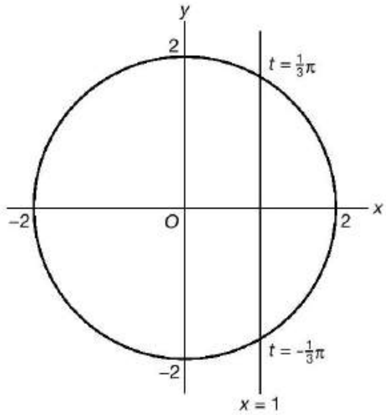
b $x = 1$ geeft $2\cos(t) = 1$

$\cos(t) = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

De baan ligt rechts van de lijn $x = 1$ als $2\cos(t) > 1$, dus als $\cos(t) > \frac{1}{2}$ en dit geeft $-\frac{1}{3}\pi < t < \frac{1}{3}\pi$.

De baan is de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 2.



Dus ligt $\dfrac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{1}{3}$ deel van de cirkel rechts van de lijn $x = 1$.

De lengte van dit deel is $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = 1\frac{1}{3}\pi$.

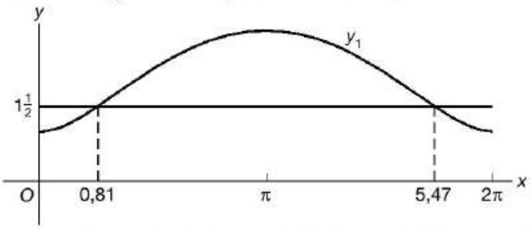
c $P(2\cos(t), 2\sin(t))$ en $Q(\cos(2t), \sin(2t))$ geeft

$$\begin{aligned}
PQ^2 &= (2\cos(t) - \cos(2t))^2 + (2\sin(t) - \sin(2t))^2 \\
&= 4\cos^2(t) - 4\cos(t)\cos(2t) + \cos^2(2t) + 4\sin^2(t) - 4\sin(t)\sin(2t) + \sin^2(2t) \\
&= 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) + \cos^2(2t) + \sin^2(2t) - 4\cos(t)\cos(2t) - 4\sin(t)\sin(2t) \\
&= 4 + 1 - 4\cos(t)\cos(2t) - 4\sin(t) \cdot 2\sin(t)\cos(t) \\
&= 5 - 4\cos(t)(\cos(2t) + 2\sin^2(t)) \\
&= 5 - 4\cos(t)(1 - 2\sin^2(t) + 2\sin^2(t)) \\
&= 5 - 4\cos(t)
\end{aligned}$$

Dus $PQ = \sqrt{5 - 4\cos(t)}$.

d Voer in $y_1 = \sqrt{5 - 4\cos(x)}$ en $y_2 = 1{,}5$.

Intersect geeft $x = 0{,}812...$ en $x \approx 5{,}470...$



Dus gedurende $5{,}47... - 0{,}812... \approx 4{,}66$ seconde per rondgang.

Bladzijde 165

36 **a** $x_P = r\cos(ct)$, $r = 3$ en de periode is 5, dus $c = \dfrac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

$y_P = r\sin(ct)$, $r = 3$ en de periode is 5, dus $c = \dfrac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

b $\left.\begin{array}{l} y_{P'} = y_P \\ y_P = 3\sin\left(\frac{2}{5}\pi t\right) \end{array}\right\} y_{P'} = 3\sin\left(\frac{2}{5}\pi t\right)$

Bladzijde 166

37 **a** De frequentie is $\dfrac{50\pi}{2\pi} = 25$ Hz.

b Per trilling is de afgelegde afstand $4 \cdot 5 = 20$ cm.

Er zijn 25 trillingen per seconde, dus per kwartier zijn er $60 \cdot 15 \cdot 25 = 22\,500$ trillingen.

De afgelegde afstand in één kwartier is $22\,500 \cdot 20 = 450\,000$ cm $= 4{,}5$ km.

Bladzijde 167

38 amplitude = 10 geeft $b = 10$

frequentie = 3 Hz geeft $c = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$

Op $t = \frac{1}{30}$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $\left.\begin{array}{r} \frac{1}{30}c - d = 0 \\ c = 6\pi \end{array}\right\} \frac{1}{30} \cdot 6\pi - d = 0$

$-d = -\frac{1}{5}\pi$

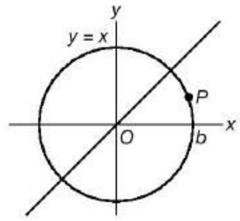
$d = \frac{1}{5}\pi$

Dus $u = 10\sin\left(6\pi t - \frac{1}{5}\pi\right)$.

39 **a** $x_{P''} = x_P = b\cos(ct) = b\sin\left(ct + \frac{1}{2}\pi\right) = b\sin\left(c\left(t + \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{c}\right)\right) = b\sin\left(c\left(t + \dfrac{1}{2c}\pi\right)\right)$,

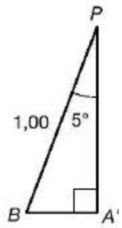
dus P'' voert een harmonische trilling uit.

b Door de figuur een achtste slag te draaien, zie je dat de projectie van P op de lijn $y = x$ op hetzelfde neerkomt als de projectie van een eenparige cirkelbeweging op de y-as of x-as.
Dus de projectie van P op de lijn $y = x$ voert ook een harmonische trilling uit.



40 **a** De omtrek van de cirkel met middelpunt P en straal 1,00 m is $2\pi \cdot 1 = 2\pi$ m.
De lengte van boog BC is $\frac{10}{360} \cdot 2\pi \approx 0{,}1745$ m.

b $\sin(5°) = \frac{A'B}{1}$, dus $A'B = \sin(5°)$
$BC = 2A'B = 2\sin(5°) \approx 0{,}1743$ m.



c $b = A'B = \sin(5°) \approx 0{,}09$

$$c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{1}} \approx 3{,}13$$

d $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} \approx 2{,}01$ s, dus de klok geeft ongeveer 1 tik per seconde.

Bladzijde 168

41 Voer in $y_1 = 3\sin(2x) + 4\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right)$.
De optie maximum geeft $x \approx 0{,}94$ en $y \approx 6{,}77$, dus $b \approx 6{,}77$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0{,}15$, dus $d \approx 0{,}15$.

42 **a** $c = 500\pi$
Voer in $y_1 = 3\sin(500\pi x) + 4\sin\left(500\pi x - \frac{2}{5}\pi\right)$.
De optie maximum geeft $x \approx 0{,}0015$ en $y \approx 5{,}69$, dus $b \approx 5{,}69$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0{,}000466$.
Dus $u = 5{,}69\sin(500\pi(t - 0{,}000466)) \approx 5{,}69\sin(500\pi t - 0{,}73)$.
Dus $u = 5{,}69\sin(500\pi t - 0{,}73)$.

b De frequentie is $\frac{500\pi}{2\pi} = 250$ Hz.
Het punt legt in 1 seconde $250 \cdot 4 \cdot 5{,}69 = 5690$ mm $= 5{,}69$ m af.

c $\frac{du}{dt} = 3 \cdot 500\pi\cos(500\pi t) + 4 \cdot 500\pi\cos\left(500\pi t - \frac{2}{5}\pi\right) = 1500\pi\cos(500\pi t) + 2000\pi\cos\left(500\pi t - \frac{2}{5}\pi\right)$

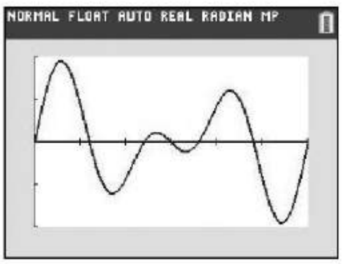
$$\left[\frac{du}{dt}\right]_{t=0} = 1500\pi\cos(0) + 2000\pi\cos\left(-\tfrac{2}{5}\pi\right) \approx 6654$$

De snelheid op $t = 0$ is 6654 mm/s $= 6654 \cdot \frac{3600}{1\,000\,000}$ km/uur ≈ 24 km/uur.

Bladzijde 169

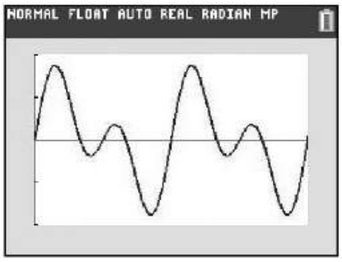
43 Voer in $y_1 = \sin(x) + 2\cos(x)$.
De optie maximum geeft $x \approx 0{,}46$ en $y \approx 2{,}24$, dus $b \approx 2{,}24$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 5{,}18$, dus $d \approx 5{,}18$.
Dus $u_2 = 2{,}24\sin(t - 5{,}18)$.

44 **a**



De periode van $u = \sin(2t)$ is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en de periode van $u = \sin(3t)$ is $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.
Het kleinste getal waar een geheel aantal keer π en $\frac{2}{3}\pi$ in past is 2π.
Dus de periode van u_1 is 2π.

b



De periode van $u = \sin(2t) = \frac{2\pi}{2} = \pi$ en de periode van $u = \sin(4t)$ is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
Het kleinste getal waar een geheel aantal keer π en $\frac{1}{2}\pi$ in past is π,
dus de periode van u_2 is π.

Bladzijde 170

45 **a**

	$u_1 = \sin(100\pi t)$	$u_2 = \sin(101\pi t)$
in $[0, 2\pi]$	100π periodes	101π periodes
in $[0, 2]$	100 periodes	101 periodes

Dus de periode van u is 2 seconden.

b

	$u_1 = \sin(100t)$	$u_2 = \sin(101t)$
in $[0, 2\pi]$	100 periodes	101 periodes

Dus de periode van u is 2π seconden.

c

	$u_1 = 5\sin(100\pi t)$	$u_2 = \sin(105\pi t)$
in $[0, 2\pi]$	100π periodes	105π periodes
in $[0, \frac{2}{5}]$	20 periodes	21 periodes

Dus de periode van u is $\frac{2}{5}$ seconden.

d

	$u_1 = 3\sin\left(\frac{1}{4}\pi t\right)$	$u_2 = 6\sin\left(\frac{1}{5}\pi t\right)$
in $[0, 2\pi]$	$\frac{1}{4}\pi$ periodes	$\frac{1}{5}\pi$ periodes
in $[0, 40]$	5 periodes	4 periodes

Dus de periode van u is 40 seconden.

46

	$u_1 = \sin(660\pi t)$	$u_2 = \sin(661\pi t)$
in $[0, 2\pi]$	660π periodes	661π periodes
in $[0, 2]$	660 periodes	661 periodes

Dus de periode van de zweving is 2 seconden.

47 **a** $u_2 = 0{,}2\sin(1400\pi)$ $\quad f = \frac{1400\pi}{2\pi} = 700\text{ Hz}$

$u_3 = 0{,}3\sin(2100\pi t)$ $\quad f = \frac{2100\pi}{2\pi} = 1050\text{ Hz}$

$u_4 = 0{,}1\sin(2800\pi t)$ $\quad f = \frac{2800\pi}{2\pi} = 1400\text{ Hz}$

De frequenties van de boventonen zijn 700 Hz, 1050 Hz en 1400 Hz.

b

	$u_1 = 1{,}5\sin(700\pi t)$	$u_2 = 0{,}2\sin(1400\pi t)$	$u_3 = 0{,}3\sin(2100\pi t)$	$u_4 = 0{,}1\sin(2800\pi t)$
in $[0, 2\pi]$	700π	1400π	2100π	2800π
in $[0, \frac{1}{350}]$	1	2	3	4

De periode van u is $\frac{1}{350}$ seconde.

48 **a**

	$u_1 = 0{,}6\sin(500\pi t)$	$u_2 = 0{,}6\sin(550\pi t)$
in $[0, 2\pi]$	500π periodes	550π periodes
in $[0, \frac{1}{25}]$	10 periodes	11 periodes

De periode van u_4 is $\frac{1}{25}$ seconde.

b Op het GR scherm zie je $1\frac{1}{2}$ periode van de zweving, dus Xmax $= 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} = 0{,}06$.

c Voer in $y_1 = 0{,}6\sin(500\pi x) + 0{,}6\sin(500\pi x - 0{,}5\pi)$. Neem Xmin = 0 en bijvoorbeeld Xmax = 0,01. De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft opeenvolgend $x = 0{,}0005$ en $x = 0{,}0025$, dus de periode is 0,004.

Dit geeft $c = \dfrac{2\pi}{0{,}004} = 500\pi$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{c} = 0{,}0005\\ c = 500\pi\end{array}\right\} d = 0{,}0005 \cdot 500\pi = 0{,}25\pi$$

De optie maximum geeft $x = 0{,}0015$ en $y = 0{,}848...$ dus $b \approx 0{,}85$.

Dus $u = 0{,}85\sin(500\pi t - 0{,}25\pi)$.

12.4 Bewegingsvergelijkingen

Bladzijde 172

49 **a** Snijden met de x-as, dus $y = 0$.

$y = 0$ geeft $\sin(4t) = 0$

$4t = k \cdot \pi$

$t = k \cdot \frac{1}{4}\pi$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t = 0$, $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{3}{4}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{1}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{2}\pi$, $t = 1\frac{3}{4}\pi$ en $t = 2\pi$.

Het punt P gaat door de oorsprong voor $t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$

en snijdt de x-as in $(-1, 0)$ voor $t = 1\frac{1}{2}\pi$ en in $(1, 0)$ voor $t = \frac{1}{2}\pi$.

$t = \frac{1}{4}\pi$ en $t = \frac{3}{4}\pi$ geven $x = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $x_B = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$t = 1\frac{1}{4}\pi$ en $t = 1\frac{3}{4}\pi$ geven $x = \sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $x_A = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b C is een top, dus $y_C = 1$.

$y = 1$ geeft $\sin(4t) = 1$

$4t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$t = \frac{1}{8}\pi$ geeft $x = \sin\left(\frac{1}{8}\pi\right) = 0{,}3826...$, dus $x_C \approx 0{,}383$.

Bladzijde 174

50 **a** $y = \frac{1}{2}$ geeft $\sin(t) = \frac{1}{2}$

$$t = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$.

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $x = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $x_D = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft $x = \sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $x_C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$CD = x_D - x_C = \frac{1}{2}\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$

b De baansnelheid is

$$\left|\vec{v}\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)\right| = \sqrt{\left(2\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)\right)^2} = \sqrt{\left(2 \cdot \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{7}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{7}$$

c $\vec{v}\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$ en $\vec{r}_{y=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{1 \cdot 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 0}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{1\frac{3}{4}}}$$

Dus $\varphi \approx 40{,}9°$.

12

d $x(t) = 0$ geeft $\sin(2t) = 0$

$2t = k \cdot \pi$

$t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$y(t) = 0$ geeft $\sin(t) = 0$

$t = k \cdot \pi$

Dus de baan gaat op $[0, 2\pi]$ door de oorsprong voor $t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$.

$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 2\cos(0) \\ \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}(\pi) = \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi) \\ \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot -1|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

Dus $\varphi \approx 53{,}1°$.

51 **a** $y = 1$ geeft $\sin(3t) = 1$

$3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft $A\left(\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right), \sin\left(2\frac{1}{2}\pi\right)\right) = A\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1\right)$

$x = -1$ geeft $\sin(2t) = -1$

$2t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$

$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft $B\left(\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right), \sin\left(2\frac{1}{4}\pi\right)\right) = B\left(-1, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

b $x(t) = \sin(2t)$ en $y(t) = \sin(3t)$ substitueren in $y = x$ geeft

$\sin(3t) = \sin(2t)$

$3t = 2t + k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi - 2t + k \cdot 2\pi$

$t = k \cdot 2\pi \vee 5t = \pi + k \cdot 2\pi$

$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{5}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t = 0 \vee t = \frac{1}{5}\pi \vee t = \frac{3}{5}\pi \vee t = \pi \vee t = 1\frac{2}{5}\pi \vee t = 1\frac{4}{5}\pi \vee t = 2\pi$.

Bij de oorsprong horen $t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$.

Bij de andere punten horen $t = \frac{1}{5}\pi$, $t = \frac{3}{5}\pi$, $t = 1\frac{2}{5}\pi$ en $t = 1\frac{4}{5}\pi$.

c $x(t) = \frac{1}{2}$ geeft $\sin(2t) = \frac{1}{2}$

$2t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee t = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{1}{12}\pi \vee t = 1\frac{1}{12}\pi \vee t = \frac{5}{12}\pi \vee t = 1\frac{5}{12}\pi$

$y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\sin(3t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$3t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{1}{12}\pi \vee t = \frac{3}{4}\pi \vee t = 1\frac{5}{12}\pi \vee t = \frac{1}{4}\pi \vee t = \frac{11}{12}\pi \vee t = 1\frac{7}{12}\pi$

Dus voor $t = \frac{1}{12}\pi$ en $t = 1\frac{5}{12}\pi$ passeert P het punt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$,
dus de baan snijdt zichzelf in $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

d $x(t) = \sin(2t)$ geeft $x'(t) = 2\cos(2t)$

$y(t) = \sin(3t)$ geeft $y'(t) = 3\cos(3t)$

$\left|\vec{v}\left(\frac{1}{12}\pi\right)\right| = \sqrt{\left(2\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right)^2 + \left(3\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)^2} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3 + 4\frac{1}{2}} = \sqrt{7\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{30}$

e $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 2\cos(0) \\ 3\cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}(\pi) = \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi) \\ 3\cos(3\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|4 - 9|}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{5}{13}$$

Dus $\varphi \approx 67{,}4°$.

12

52 **a** $x(t)=\sin\left(t-\frac{1}{6}\pi\right)$ geeft $x'(t)=\cos\left(t-\frac{1}{6}\pi\right)$
$y(t)=\sin(2t)$ geeft $y'(t)=2\cos(2t)$
De raaklijn is verticaal, dus $x'(t)=0 \wedge y'(t)\neq 0$.
Dus $\cos\left(t-\frac{1}{6}\pi\right)=0 \wedge 2\cos(2t)\neq 0$

$$t-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{1}{2}\pi+k\cdot\pi \wedge \cos(2t)\neq 0$$
$$t=\tfrac{2}{3}\pi+k\cdot\pi \wedge 2t\neq\tfrac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$$
$$t=\tfrac{2}{3}\pi+k\cdot\pi \wedge t\neq\tfrac{1}{4}\pi+k\cdot\pi$$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t=\frac{2}{3}\pi \vee t=1\frac{2}{3}\pi$.

$t=\frac{2}{3}\pi$ geeft $x=\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)=1$ en $y=\sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $A\left(1,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

b $x=\frac{1}{2}$ geeft $\sin\left(t-\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$$t-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee t-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$$
$$t=\tfrac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee t=\pi+k\cdot 2\pi$$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t=\frac{1}{3}\pi \vee t=\pi$.

$y\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$y(\pi)=\sin(2\pi)=0$ geeft $C\left(\frac{1}{2},0\right)$

Dus $BC=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

c $x(t)=\sin\left(t-\frac{1}{6}\pi\right)$ en $y(t)=\sin(2t)$ substitueren in $y=x$ geeft

$\sin(2t)=\sin\left(t-\frac{1}{6}\pi\right)$

$2t=t-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2t=\pi-\left(t-\frac{1}{6}\pi\right)+k\cdot 2\pi$

$t=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2t=\pi-t+\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$t=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3t=1\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$t=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee t=\frac{7}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t=1\frac{5}{6}\pi \vee t=\frac{7}{18}\pi \vee t=1\frac{1}{18}\pi \vee t=1\frac{13}{18}\pi$.

d $x(t)=0$ geeft $\sin\left(t-\frac{1}{6}\pi\right)=0$

$$t-\tfrac{1}{6}\pi=k\cdot\pi$$
$$t=\tfrac{1}{6}\pi+k\cdot\pi$$

Dus de baan snijdt zichzelf voor $t=\frac{1}{6}\pi \vee t=1\frac{1}{6}\pi$ in $\left(0,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

$\vec{v}\left(\frac{1}{2}\pi\right)=\begin{pmatrix}\cos(0)\\2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en $\vec{v}\left(1\frac{1}{6}\pi\right)=\begin{pmatrix}\cos(\pi)\\2\cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0$, dus de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt is 90°.

e $\left|\vec{v}\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right|=\sqrt{\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right)^2+\left(2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(2\cdot-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+1}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{7}$

12

Bladzijde 175

53 **a** $x=0$ geeft $\sin(2t)=0$

$$2t=k\cdot\pi$$
$$t=k\cdot\tfrac{1}{2}\pi$$

$t=0$ geeft $y=\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$t=\frac{1}{2}\pi$ geeft $y=\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$t=\pi$ geeft $y=\sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$t=1\frac{1}{2}\pi$ geeft $y=\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}$

$t=2\pi$ geeft $y=\sin\left(2\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dus $A\left(0,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $C\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ en $D\left(0,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

b $x = -\frac{1}{2}$ geeft $\sin(2t) = -\frac{1}{2}$

$$2t = -\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi + \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = -\tfrac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee t = \tfrac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{7}{12}\pi \vee t = \frac{11}{12}\pi \vee t = 1\frac{7}{12}\pi \vee t = 1\frac{11}{12}\pi$

$t = \frac{7}{12}\pi$ geeft $y = \sin\left(\frac{11}{12}\pi\right) \approx 0{,}26$

$t = \frac{11}{12}\pi$ geeft $y = \sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$t = 1\frac{7}{12}\pi$ geeft $y = \sin\left(1\frac{11}{12}\pi\right) \approx -0{,}26$

$t = 1\frac{11}{12}\pi$ geeft $y = \sin\left(2\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Dus $E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ en $H\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ en dit geeft $EH = \frac{1}{2}\sqrt{2} - -\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

c $x(t) = \sin(2t)$ geeft $x'(t) = 2\cos(2t)$
$y(t) = \sin(t + \frac{1}{3}\pi)$ geeft $y'(t) = \cos(t + \frac{1}{3}\pi)$

$$\vec{v}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} x'\left(\frac{1}{2}\pi\right) \\ y'\left(\frac{1}{2}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\pi) \\ \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ en } \vec{r}_{y\text{-as}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{4 + \frac{3}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{4\frac{3}{4}}}$$

Dus $\varphi \approx 67°$.

d $\left|\vec{v}\left(1\frac{11}{12}\pi\right)\right| = \sqrt{\left(2\cos\left(3\frac{5}{6}\pi\right)\right)^2 + \left(\cos\left(2\frac{1}{4}\pi\right)\right)^2} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$

e $t = a$ geeft $x = \sin(2a)$ en $y = \sin\left(a + \frac{1}{3}\pi\right)$, dus $T\left(\sin(2a), \sin\left(a + \frac{1}{3}\pi\right)\right)$.

$t = a + \pi$ geeft $x = \sin(2(a + \pi)) = \sin(2a + 2\pi) = \sin(2a)$ en $y = \sin\left(a + \pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(a + 1\frac{1}{3}\pi\right)$, dus $U\left(\sin(2a), \sin\left(a + 1\frac{1}{3}\pi\right)\right)$.

$TU = |y_T - y_U| = \left|\sin\left(a + \frac{1}{3}\pi\right) - \sin\left(a + 1\frac{1}{3}\pi\right)\right| = \left|\sin\left(a + \frac{1}{3}\pi\right) - -\sin\left(a + \frac{1}{3}\pi\right)\right| = \left|2\sin\left(a + \frac{1}{3}\pi\right)\right|$

54 **a**

t	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$
x	1	0	-1
y	1	-1	1

b $\left.\begin{array}{l} y = px^2 + q \\ \text{door } (0, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} p \cdot 0^2 + q = -1 \\ q = -1 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} \text{Dus } y = px^2 - 1 \\ \text{door } (1, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} p \cdot 1^2 - 1 = 1 \\ p = 2 \end{array}$

Dus $p = 2$ en $q = -1$.

12

Bladzijde 177

55 Substitutie van $x = \sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right)$ en $y = \sin(2t)$ in $y = -2x^2 + 1$ geeft

$\sin(2t) = -2\sin^2\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) + 1$

$\sin(2t) = 1 - 2\sin^2\left(t - \frac{1}{4}\pi\right)$

$\sin(2t) = \cos\left(2\left(t - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

$\sin(2t) = \cos\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right)$

$\sin(2t) = \sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$

$\sin(2t) = \sin(2t)$

$\left.\begin{array}{l} \text{Dit klopt voor elke } t. \\ x = \sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \\ -1 \le \sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \le 1 \end{array}\right\}$ Bij de parametervoorstelling hoort de formule $y = -2x^2 + 1$ met $-1 \le x \le 1$.

56 **a** $-2 \le 2\sin(t) \le 2$, dus $-2 \le x \le 2$.
$-1 \le \sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right) \le 1$, dus $-1 \le y \le 1$.
Dus de keerpunten zijn $(-2, 1)$ en $(2, 1)$.

b Stel K: $y = ax^2 + b$.
$x = 0$ voor $t = 0$ geeft $y = \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -1$, dus door $(0, -1)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + b \\ \text{door } (0, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 0^2 + b = -1 \\ b = -1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 - 1 \\ \text{door } (2, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 2^2 - 1 = 1 \\ 4a = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}$$

Vermoedelijk hoort bij K de formule $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ met $-2 \le x \le 2$.

Substitutie van $x = 2\sin(t)$ en $y = \sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right)$ in $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ geeft

$\sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}(2\sin(t))^2 - 1$

$\cos\left(2t - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2} \cdot 4\sin^2(t) - 1$
$\cos(2t - \pi) = 2\sin^2(t) - 1$
$\cos(2t + \pi) = -1 + 2\sin^2(t)$
$-\cos(2t) = -(1 - 2\sin^2(t))$
$\cos(2t) = \cos(2t)$
Dit klopt voor elke t, dus bij K hoort de formule $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ met $-2 \le x \le 2$.

57 Substitutie van $x = \sin(t)$ en $y = \sin(2t)$ in $y^2 = 4x^2 - 4x^4$ geeft
$\sin^2(2t) = 4\sin^2(t) - 4\sin^4(t)$
$(2\sin(t)\cos(t))^2 = 4\sin^2(t)(1 - \sin^2(t))$
$4\sin^2(t)\cos^2(t) = 4\sin^2(t)\cos^2(t)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dit klopt voor elke } t. \\ x = \sin(t) \\ -1 \le \sin(t) \le 1 \end{array}\right\} \text{Bij de baan van } P \text{ hoort de formule } y^2 = 4x^2 - 4x^2 \text{ met } -1 \le x \le 1.$$

58 **a** $-1 \le \sin(t) \le 1$, dus $-1 \le x \le 1$
$-1 \le \sin(3t) \le 1$, dus $-1 \le y \le 1$
Dus de keerpunten van K zijn $(-1, 1)$ en $(1, -1)$.

b Substitutie van $x = \sin(t)$ en $y = \sin(3t)$ in $y = 3x - 4x^3$ geeft
$\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$
$\sin(t + 2t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$
$\sin(t)\cos(2t) + \cos(t)\sin(2t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$
$\sin(t)(1 - 2\sin^2(t)) + \cos(t) \cdot 2\sin(t)\cos(t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$
$\sin(t) - 2\sin^3(t) + 2\sin(t)\cos^2(t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$
$\sin(t) - 2\sin^3(t) + 2\sin(t) \cdot (1 - \sin^2(t)) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$
$\sin(t) - 2\sin^3(t) + 2\sin(t) - 2\sin^3(t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$
$3\sin(t) - 4\sin^3(t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$
Dit klopt voor elke t, dus alle punten van K liggen op de grafiek van $y = 3x - 4x^3$.

59 $-2 \le 2\cos(t) \le 2$, dus $-2 \le x \le 2$ en dit geeft $c = -2$ en $d = 2$.
$-1 \le \cos(3t) \le 1$, dus $-1 \le y \le 1$
Dus de keerpunten zijn $(-2, -1)$ en $(2, 1)$.
$t = \frac{1}{3}\pi$ geeft $x = 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ en $y = \cos(\pi) = -1$, dus door $(1, -1)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^3 + bx \\ \text{door } (2, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 2^3 + b \cdot 2 = 1 \\ 8a + 2b = 1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^3 + bx \\ \text{door } (1, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = -1 \\ a + b = -1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 8a + 2b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 8a + 2b = 1 \\ 2a + 2b = -2 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{l} 6a = 3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ a + b = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} + b = -1 \\ b = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

Vermoedelijk hoort bij de baan van P de formule $y = \frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x$ met $-2 \le x \le 2$.

12

Substitutie van $x = 2\cos(t)$ en $y = \cos(3t)$ in $y = \frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x$ geeft

$\cos(3t) = \frac{1}{2}(2\cos(t))^3 - 1\frac{1}{2} \cdot 2\cos(t)$

$\cos(2t + t) = \frac{1}{2} \cdot 8\cos^3(t) - 3\cos(t)$
$\cos(2t)\cos(t) - \sin(2t)\sin(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$
$(2\cos^2(t) - 1)\cos(t) - 2\sin(t)\cos(t)\sin(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$
$2\cos^3(t) - \cos(t) - 2\sin^2(t)\cos(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$
$2\cos^3(t) - \cos(t) - 2(1 - \cos^2(t))\cos(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$
$2\cos^3(t) - \cos(t) - 2\cos(t) + 2\cos^3(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$
$4\cos^3(t) - 3\cos(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$
Dit klopt voor elke t, dus bij de baan van P hoort de formule $y = \frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x$ met $-2 \leq x \leq 2$.

60 Noem M het midden van OP.
Er geldt $MS \perp OP$ en $MS = OM = \frac{1}{2}OP$

Dus $\vec{s} = \vec{m} + \overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{m}_L = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p}_L$.

Bladzijde 179

61 **a** $\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p}_R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) + \sin(2t) \\ \sin(2t) - \sin(t) \end{pmatrix}$

Dus $\begin{cases} x_T(t) = \sin(t) + \sin(2t) \\ y_T(t) = \sin(2t) - \sin(t) \end{cases}$

b $\vec{q} = \vec{a} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}_R$

$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) - 2 \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP}_R = \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ 2 - 2\sin(t) \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(t) - 2 \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ 2 - 2\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \sin(t) - 1 + \sin(2t) \\ \sin(2t) + 1 - \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) + \sin(t) + 1 \\ \sin(2t) - \sin(t) + 1 \end{pmatrix}$

Dus $\begin{cases} x_Q(t) = \sin(2t) + \sin(t) + 1 \\ y_Q(t) = \sin(2t) - \sin(t) + 1 \end{cases}$

c $\vec{r} = \vec{a} + \overrightarrow{AR} = \vec{a} + \overrightarrow{AP}_R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ 2 - 2\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\sin(2t) \\ 2 - 2\sin(t) \end{pmatrix}$

Dus $\begin{cases} x_R(t) = 2 + 2\sin(2t) \\ y_R(t) = 2 - 2\sin(t) \end{cases}$

d $y = 1$ geeft $2 - 2\sin(t) = 1$
$-2\sin(t) = -1$
$\sin(t) = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $x = 2 + 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft $x = 2 + 2\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = 2 + 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

Dus de snijpunten zijn $(2 + \sqrt{3}, 1)$ en $(2 - \sqrt{3}, 1)$.

12

62 **a** $\vec{q} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}_R$

$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}\begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) - 4 \\ 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP}_R = \begin{pmatrix} 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \\ -2\sin(t) + 4 \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin(t) - 4 \\ 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \\ -2\sin(t) + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) + 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \\ 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) - 2\sin(t) + 4 \end{pmatrix}$

Dus $\begin{cases} x_Q(t) = 2\sin(t) + 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \\ y_Q(t) = 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) - 2\sin(t) + 4 \end{cases}$

b Voer in $y_1 = 2\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - 2\sin(x) + 4$.
De optie minimum geeft $x = 0{,}392...$ en $y = 2{,}469...$
Het maximum van $y_P(t) = 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right)$ is 2.
Dus het laagste punt van de baan van Q ligt hoger dan het hoogste punt van de baan van P.

Bladzijde 180

63 **a** $\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p}_R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ 2\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) + \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \\ \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) - \sin(2t) \end{pmatrix}$

Dus $\begin{cases} x_Q(t) = \sin(2t) + \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \\ y_Q(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) - \sin(2t) \end{cases}$

b $x_P(t) = 2\sin(2t)$ en $y_P(t) = 2\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ substitueren in $y = -x$ geeft

$2\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) = -2\sin(2t)$

$\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) = -\sin(2t)$

$\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) = \sin(2t + \pi)$

$t + \frac{1}{4}\pi = 2t + \pi + k \cdot 2\pi \vee t + \frac{1}{4}\pi = \pi - (2t + \pi) + k \cdot 2\pi$

$-t = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee t + \frac{1}{4}\pi = \pi - 2t - \pi + k \cdot 2\pi$

$t = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

t op $\left[\frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi\right]$ geeft $t = \frac{7}{12}\pi \vee t = 1\frac{1}{4}\pi$.

$t = \frac{7}{12}\pi$ geeft $x_P = 2\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$ en $y_P = 2\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$t = 1\frac{1}{4}\pi$ geeft $x_P = 2\sin\left(2\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot 1 = 2$ en $y_P = 2\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot -1 = -2$

$x_Q(t) = \sin(2t) + \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $y_Q(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) - \sin(2t)$ substitueren in $y = -x$ geeft

$\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) - \sin(2t) = -\sin(2t) - \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$

$2\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) = 0$

$\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) = 0$

$t + \frac{1}{4}\pi = k \cdot \pi$

$t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

t op $\left[\frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi\right]$ geeft $t = \frac{3}{4}\pi$.

$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft $x_Q = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) + \sin(\pi) = -1 + 0 = -1$ en $y_Q = \sin(\pi) - \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 0 - -1 = 1$
Dus het punt $(-1, 1)$ ligt op beide banen.
$x_P(t) = 2\sin(2t)$ geeft $x_P'(t) = 4\cos(2t)$

$y_P(t) = 2\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ geeft $y_P'(t) = 2\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$

$\vec{v}_P\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \begin{pmatrix} 4\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right) \\ 2\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$x_Q(t) = \sin(2t) + \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ geeft $x_Q'(t) = 2\cos(2t) + \cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$

$y_Q(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) - \sin(2t)$ geeft $y_Q'(t) = \cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) - 2\cos(2t)$

$\vec{v}_Q\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} 2\cos\left(1\frac{1}{2}\pi\right) + \cos(\pi) \\ \cos(\pi) - 2\cos\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + -1 \\ -1 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ is niet evenwijdig met $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus de banen raken elkaar niet in het punt $(-1, 1)$.

12

64 **a** $\vec{s} = \vec{a} + \overrightarrow{AS} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}_{\text{R}}$

$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4\cos(t) \\ 6\sin(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos(t) - 4 \\ 6\sin(t) \end{pmatrix}$ geeft $\overrightarrow{AP}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} 6\sin(t) \\ 4 - 4\cos(t) \end{pmatrix}$

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4\cos(t) - 4 \\ 6\sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6\sin(t) \\ 4 - 4\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2\cos(t) - 2 + 3\sin(t) \\ 3\sin(t) + 2 - 2\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3\sin(t) + 2\cos(t) \\ 2 + 3\sin(t) - 2\cos(t) \end{pmatrix}$

Dus $\begin{cases} x_S(t) = 2 + 3\sin(t) + 2\cos(t) \\ y_S(t) = 2 + 3\sin(t) - 2\cos(t) \end{cases}$

b Substitueren van $x = 4\cos(t)$ en $y = 6\sin(t)$ in $9x^2 + 4y^2 = 144$ geeft
$9 \cdot (4\cos(t))^2 + 4 \cdot (6\sin(t))^2 = 144$
$9 \cdot 16\cos^2(t) + 4 \cdot 36\sin^2(t) = 144$
$144\cos^2(t) + 144\sin^2(t) = 144$
$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$
Dit klopt voor elke t, dus bij de baan van P hoort de formule $9x^2 + 4y^2 = 144$.

c $x = 2 + 3\sin(t) + 2\cos(t)$ en $y = 2 + 3\sin(t) - 2\cos(t)$ substitueren in $9x^2 + 4y^2 = 144$ geeft
$9(2 + 3\sin(t) + 2\cos(t))^2 + 4(2 + 3\sin(t) - 2\cos(t))^2 = 144$.
Voer in $y_1 = 9(2 + 3\sin(x) + 2\cos(x))^2 + 4(2 + 3\sin(x) - 2\cos(x))^2$ en $y_2 = 144$.
Intersect geeft $x = 2{,}583...$
$t = 2{,}583...$ geeft $x = 2 + 3\sin(2{,}583...) + 2\cos(2{,}5683...) \approx 1{,}89$ en
$y = 2 + 3\sin(2{,}583...) - 2\cos(2{,}583...) \approx 5{,}29$.
Dus $B(1{,}89; 5{,}29)$.

Diagnostische toets

Bladzijde 182

1 **a** $\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(2x)$

$\cos\left(3x - \frac{3}{4}\pi\right) = \cos(2x)$

$3x - \frac{3}{4}\pi = 2x + k \cdot 2\pi \vee 3x - \frac{3}{4}\pi = -2x + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 5x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{20}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

x op $[0, \pi]$ geeft $x = \frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{3}{20}\pi \vee x = \frac{11}{20}\pi \vee x = \frac{19}{20}\pi$

b $2\sin^2(2x) = \sin(2x) + 1$

$-\sin(2x) = 1 - 2\sin^2(2x)$

$\sin(2x + \pi) = \cos(4x)$

$\cos\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(4x)$

$2x + \frac{1}{2}\pi = 4x + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{2}\pi = -4x + k \cdot 2\pi$

$-2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 6x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi \vee x = 1\frac{11}{12}\pi$

c $\cos\left(\frac{2}{5}\pi t\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$

$\cos\left(\frac{2}{5}\pi t\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi t + \pi\right)$

$\cos\left(\frac{2}{5}\pi t\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)$

$\frac{2}{5}\pi t = \frac{1}{6}\pi t + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{5}\pi t = -\frac{1}{6}\pi t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{7}{30}\pi t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{17}{30}\pi t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = 2\frac{1}{7} + k \cdot 8\frac{4}{7} \vee t = -\frac{15}{17} + k \cdot 3\frac{9}{17}$

t op $[0, 10]$ geeft $t = 2\frac{1}{7} \vee t = 2\frac{11}{17} \vee t = 6\frac{3}{17} \vee t = 9\frac{12}{17}$

12

2 **a** $\sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)=2\sin(2x)\cdot\cos(2x)$

$\sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)=\sin(4x)$

$x+\frac{1}{3}\pi=4x+k\cdot 2\pi \vee x+\frac{1}{3}\pi=\pi-4x+k\cdot 2\pi$

$-3x=-\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee 5x=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=\frac{1}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi \vee x=\frac{2}{15}\pi+k\cdot\frac{2}{5}\pi$

b $\sin^2(2x)+\frac{1}{4}=\cos(4x)$

$\sin^2(2x)+\frac{1}{4}=1-2\sin^2(2x)$

$3\sin^2(2x)=\frac{3}{4}$

$\sin^2(2x)=\frac{1}{4}$

$\sin(2x)=\frac{1}{2} \vee \sin(2x)=-\frac{1}{2}$

$2x=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2x=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2x=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2x=1\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

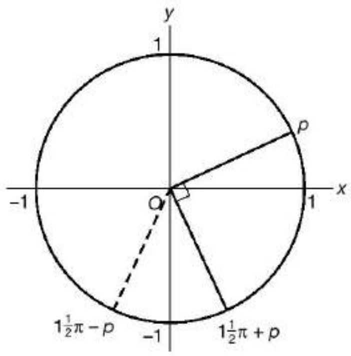
$x=\frac{1}{12}\pi+k\cdot\pi \vee x=\frac{5}{12}\pi+k\cdot\pi \vee x=-\frac{1}{12}\pi+k\cdot\pi \vee x=\frac{7}{12}\pi+k\cdot\pi$

3 $f\left(1\frac{1}{2}\pi+p\right)=\sin(3\pi+2p)+\cos\left(1\frac{1}{2}\pi+p\right)=-\sin(2p)+\sin(p)$

$f\left(1\frac{1}{2}\pi-p\right)=\sin(3\pi-2p)+\cos\left(1\frac{1}{2}\pi-p\right)=\sin(2p)-\sin(p)$

Er geldt $f\left(1\frac{1}{2}\pi+p\right)+f\left(1\frac{1}{2}\pi-p\right)=-\sin(2p)+\sin(p)+\sin(2p)-\sin(p)=0$.

Dus de grafiek van f is puntsymmetrisch in $\left(1\frac{1}{2}\pi, 0\right)$.



4 $I(L)=\pi\int_0^{\pi}(2\sin(x))^2\,dx=\pi\int_0^{\pi}4\sin^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\pi}4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx=\pi\int_0^{\pi}(2-2\cos(2x))\,dx$

$=\pi\left[2x-\sin(2x)\right]_0^{\pi}=\pi(2\pi-0-(0-0))=2\pi^2$

5 **a** $f(x)=1-2\cos^2(x)-\cos(x)$ geeft

$f'(x)=-2\cdot 2\cos(x)\cdot -\sin(x)+\sin(x)=4\sin(x)\cos(x)+\sin(x)$

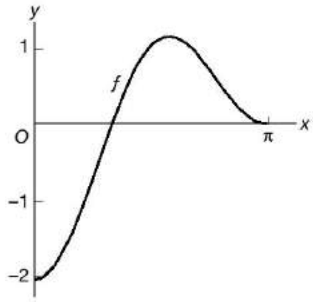
$f'(x)=0$ geeft $4\sin(x)\cos(x)+\sin(x)=0$

$\sin(x)(4\cos(x)+1)=0$

$\sin(x)=0 \vee \cos(x)=-\frac{1}{4}$

$x=k\cdot\pi \vee \cos(x)=-\frac{1}{4}$

x op $[0, \pi]$ geeft $x=0 \vee x=\pi \vee \cos(x)=-\frac{1}{4}$



min. is $f(0)=1-2-1=-2$

$\cos(x)=-\frac{1}{4}$ geeft het maximum van $1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2--\frac{1}{4}=1-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=1\frac{1}{8}$.

min. is $f(\pi)=1-2+1=0$

Dus $B_f=\left[-2, 1\frac{1}{8}\right]$.

b $f(x) = 0$ geeft $1 - 2\cos^2(x) - \cos(x) = 0$

Stel $\cos(x) = u$.

$1 - 2u^2 - u = 0$

$2u^2 + u - 1 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$

$u = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \vee u = \dfrac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos(x) = -1 \vee \cos(x) = \frac{1}{2}$

$x = \pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

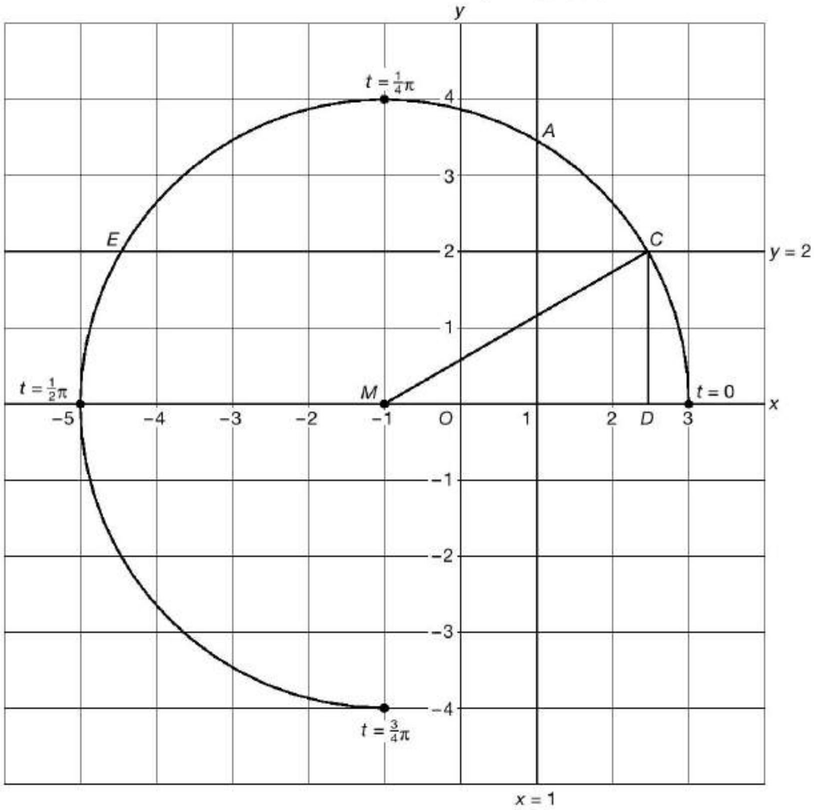
x op $[0, \pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \pi$

$$O(V) = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} (1 - 2\cos^2(x) - \cos(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} (-\cos(2x) - \cos(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}\sin(2x) - \sin(x)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} = -\tfrac{1}{2}\sin(2\pi) - \sin(\pi) - \left(-\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right)$$

$$= 0 - 0 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{3}{4}\sqrt{3}$$

6 **a** De baan is een driekwartcirkel met middelpunt $(-1, 0)$ en straal 4.



b $x = 1$ geeft $-1 + 4\cos(2t) = 1$

$4\cos(2t) = 2$

$\cos(2t) = \frac{1}{2}$

$2t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $y_A = 4\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Dus $A\left(1, 2\sqrt{3}\right)$.

c In $\triangle MCD$ geldt $\sin(\angle M) = \frac{1}{2}$, dus $\angle M = \frac{1}{6}\pi$.

Dus $\angle CME = \pi - 2 \cdot \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$.

Hieruit volgt dat $\dfrac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot 4 = 2\frac{2}{3}\pi$ de lengte van de baan boven de lijn $y = 2$ is.

Bladzijde 183

7 **a** $u_Q = 3\sin\left(\frac{1}{3}\pi(t-2)\right)$

b De frequentie is $\frac{1}{6}$ Hz.

Het punt P legt in 1 minuut $\dfrac{4 \cdot 3}{6} \cdot 60 = 120$ dm $= 12$ m af.

c $u_P = u_Q$ geeft $3\sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right) = 3\sin\left(\frac{1}{3}\pi(t-2)\right)$

$$\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi t\right) = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi t - \tfrac{2}{3}\pi\right)$$

$$\tfrac{1}{3}\pi t = \tfrac{1}{3}\pi t - \tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \tfrac{1}{3}\pi t = \pi - \left(\tfrac{1}{3}\pi t - \tfrac{2}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$\text{geen opl.} \qquad \tfrac{1}{3}\pi t = \pi - \tfrac{1}{3}\pi t + \tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\tfrac{2}{3}\pi t = 1\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = 2\tfrac{1}{2} + k \cdot 3$$

De kleinste waarde van t waarvoor $u_P = u_Q$ is $t = 2\frac{1}{2}$.

8 u_1 en u_2 hebben dezelfde frequentie, dus $c = 8\pi$.
Voer in $y_1 = 0{,}4\sin(8\pi x) + 0{,}2\sin(8\pi x - 0{,}4\pi)$.
De optie maximum geeft $x \approx 0{,}08$ en $y \approx 0{,}50$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0{,}016$.
Dus $u_3 = 0{,}50\sin(8\pi(t - 0{,}016)) = 0{,}50\sin(8\pi t - 0{,}39)$.

9 **a**

	$u_1 = \sin(10t)$	$u_2 = \sin(15t)$
in $[0, 2\pi]$	10 periodes	15 periodes
in $[0, \frac{2}{5}\pi]$	2 periodes	3 periodes

De periode van u is $\frac{2}{5}\pi$ seconden.

b

	$u_1 = 2\sin(450\pi t)$	$u_2 = \sin(400\pi t)$
in $[0, 2\pi]$	450π periodes	400π periodes
in $[0; 0{,}04]$	9 periodes	8 periodes

De periode van u is 0,04 seconden.

10 **a** $y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $\cos\left(2t - \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$2t - \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t - \tfrac{1}{3}\pi = -\tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2t = 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \tfrac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

t op $[0, 1\frac{1}{2}\pi]$ geeft $t = \frac{7}{12}\pi \vee t = \frac{3}{4}\pi$

$t = \frac{7}{12}\pi$ geeft $x = \sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft $x = \sin\left(2\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Dus $AB = \frac{1}{2}\sqrt{2} - -\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

b $-1 \leq \sin(3t) \leq 1$, dus $-1 \leq x \leq 1$
$-1 \leq \cos\left(2t - \frac{1}{3}\pi\right) \leq 1$, dus $-1 \leq y \leq 1$
Dus de keerpunten van K zijn $(-1, 1)$ en $(1, 1)$.

12

c $x = 0$ geeft $\sin(3t) = 0$

$$3t = k \cdot \pi$$

$$t = k \cdot \tfrac{1}{3}\pi$$

t op $\left[0, 1\tfrac{1}{2}\pi\right]$ geeft $t = 0 \vee t = \tfrac{1}{3}\pi \vee t = \tfrac{2}{3}\pi \vee t = \pi \vee t = 1\tfrac{1}{3}\pi$

$t = 0$ geeft $y = \cos\left(-\tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2}$

$t = \tfrac{1}{3}\pi$ geeft $y = \cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2}$

$t = \tfrac{2}{3}\pi$ geeft $y = \cos(\pi) = -1$

$t = \pi$ geeft $y = \cos\left(1\tfrac{2}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2}$

$t = 1\tfrac{1}{3}\pi$ geeft $y = \cos\left(2\tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2}$

$x(t) = \sin(3t)$ geeft $x'(t) = 3\cos(3t)$

$y(t) = \cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right)$ geeft $y'(t) = -2\sin\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right)$

$$\vec{v}\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} x'\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) \\ y'\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot -1 \\ -2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ en } \vec{v}(\pi) = \begin{pmatrix} x'(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot -1 \\ -2 \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right|} = \frac{|9 - 3|}{\sqrt{(-3)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{6}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} = \frac{6}{12} = \tfrac{1}{2}$$

Dus $\varphi = 60°$.

d $\vec{v}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} x'\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) \\ y'\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft $\left|\vec{v}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right| = 3$

Dus de baansnelheid is 3.

e $\vec{q} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \vec{p}_L = \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ \cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(3t) - \cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) \\ \cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) + \sin(3t) \end{pmatrix}$

Dus $\begin{cases} x_Q(t) = \sin(3t) - \cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) \\ y_Q(t) = \cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) + \sin(3t) \end{cases}$

$y = 0$ geeft $\cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) + \sin(3t) = 0$

$$\cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) = -\sin(3t)$$

$$\cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(3t - \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$\cos\left(2t - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(3t + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$2t - \tfrac{1}{3}\pi = 3t + \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t - \tfrac{1}{3}\pi = -3t - \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$-t = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 5t = -\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = -\tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\tfrac{1}{30}\pi + k \cdot \tfrac{2}{5}\pi$$

t op $\left[0, 1\tfrac{1}{2}\pi\right]$ geeft $t = 1\tfrac{1}{6}\pi \vee t = \tfrac{11}{30}\pi \vee t = \tfrac{23}{30}\pi$

$t = \tfrac{11}{30}\pi$ geeft $x = \sin\left(1\tfrac{1}{10}\pi\right) = -0{,}309...$

$t = \tfrac{23}{30}\pi$ geeft $x = \sin\left(2\tfrac{3}{10}\pi\right) = 0{,}809...$

Dus de kleinste waarde is $t = \tfrac{23}{30}\pi$.

12

K Voortgezette integraalrekening

Voorkennis Afgeleiden en primitieven

Bladzijde 186

1 **a** $f(x) = \sqrt{6x+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{6x+1}} \cdot 6 = \dfrac{3}{\sqrt{6x+1}}$

b $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2x-1}} = 4(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 4(2x-1)^{-1\frac{1}{2}} \cdot 2 = -\dfrac{4}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$

c $f(x) = \ln(x^2+2x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+2x} \cdot (2x+2) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x}$

d $f(x) = 2^{4x-1}$ geeft $f'(x) = 2^{4x-1} \cdot \ln(2) \cdot 4 = 4\ln(2) \cdot 2^{4x-1}$

e $f(x) = \sin(x^2-x)$ geeft $f'(x) = \cos(x^2-x) \cdot (2x-1) = (2x-1)\cos(x^2-x)$

f $f(x) = \tan\left(4x - \frac{1}{3}\pi\right)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(4x-\frac{1}{3}\pi\right)} \cdot 4 = \dfrac{4}{\cos^2\left(4x-\frac{1}{3}\pi\right)}$

2 **a** $f(x) = e^x\sin(2x)$ geeft $f'(x) = e^x\sin(2x) + e^x \cdot 2\cos(2x) = (\sin(2x) + 2\cos(2x))e^x$

b $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot\frac{1}{x} - \ln(x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2\ln(x)}{x(x^2+1)^2}$

c $f(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x)$ geeft $f'(x) = x\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x\ln(x) + \frac{1}{2}x$

d $f(x) = \dfrac{2^x+1}{2^x} = 1 + 2^{-x}$ geeft $f'(x) = 2^{-x} \cdot \ln(2) \cdot -1 = -\ln(2) \cdot \dfrac{1}{2^x} = -\dfrac{\ln(2)}{2^x}$

e $f(x) = 2x\tan(x)$ geeft $f'(x) = 2\tan(x) + 2x \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 2\tan(x) + \dfrac{2x}{\cos^2(x)}$

f $f(x) = \dfrac{4x+2}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{2(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} = 2\sqrt{2x+1}$ geeft $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$

Bladzijde 187

3 **a** $f(x) = x^2 + \sin(x)$ geeft $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \cos(x) + c$

b $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3} = \dfrac{1}{x} - 2x^{-3}$ geeft $F(x) = \ln|x| + x^{-2} + c = \ln|x| + \dfrac{1}{x^2} + c$

c $f(x) = 4 \cdot 3^x$ geeft $F(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x + c = \dfrac{4 \cdot 3^x}{\ln(3)} + c$

d $f(x) = \ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) = \ln(2) - \ln\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(x)$ geeft

$F(x) = x\ln(2) + \frac{1}{2}(x\ln(x) - x) + c = x\ln(2) + \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{2}x + c$

e $f(x) = 6\log(3x) = 6(\log(3) + \log(x)) = 6\log(3) + 6\log(x)$ geeft

$F(x) = 6\log(3) \cdot x + \dfrac{6}{\ln(10)}(x\ln(x) - x) + c = 6x\log(3) + \dfrac{6x\ln(x) - 6x}{\ln(10)} + c$

f $f(x) = \dfrac{4^x - 2^x + 1}{2^x} = 2^x - 1 + 2^{-x}$ geeft $F(x) = \dfrac{2^x}{\ln(2)} - x - \dfrac{2^{-x}}{\ln(2)} + c = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{\ln(2)} - x + c$

4 **a** $f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1}$ geeft $F(x) = 2e^{\frac{1}{2}x-1} + c$

b $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$ geeft $F(x) = 3 \cdot \frac{1}{2}\ln|2x-1| + c = 1\frac{1}{2}\ln|2x-1| + c$

c $f(x) = 4\sin(\pi x)$ geeft $F(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{\pi} \cdot -\cos(\pi x) + c = -\dfrac{4\cos(\pi x)}{\pi} + c$

d $f(x) = \dfrac{4x+1}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1} = \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x+1)^{1\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{12}(4x+1)\sqrt{4x+1} + c$

e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} + c = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + c = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + c$

f $f(x) = 4\ln(x-1)$ geeft $F(x) = 4((x-1)\ln(x-1) - (x-1)) + c = 4(x-1)\ln(x-1) - 4(x-1) + c$

5 **a** $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin(2x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b $\int_1^4 \frac{6}{2x-1}\,dx = \left[6\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_1^4 = 3\ln(7) - 3\ln(1) = 3\ln(7)$

c $\int_e^{e^2} 10\ln\left(\sqrt[4]{x}\right)dx = \int_e^{e^2} 10\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)dx = \int_e^{e^2} 2\tfrac{1}{2}\ln(x)\,dx = \left[2\tfrac{1}{2}(x\ln(x) - x)\right]_e^{e^2} =$

$2\tfrac{1}{2}(e^2\ln(e^2) - e^2 - (e\ln(e) - e)) = 2\tfrac{1}{2}(e^2\cdot 2 - e^2 - (e\cdot 1 - e)) = 2\tfrac{1}{2}e^2$

d $\int_0^4 6e^{\frac{1}{2}x-3}\,dx = \left[6\cdot 2e^{\frac{1}{2}x-3}\right]_0^4 = 12e^{-1} - 12e^{-3} = \frac{12}{e} - \frac{12}{e^3}$

K.1 De substitutiemethode

Bladzijde 188

1 **a** $f(x) = \sin(x^2 + x)$ geeft $f'(x) = \cos(x^2 + x)\cdot(2x + 1) = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$
b $G'(x) = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$, dus $G(x) = \sin(x^2 + x) + 3$ is een primitieve van $g(x) = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$.

Bladzijde 189

2 **a** Omdat $[x^2 + 1]' = 2x$ en $6x = 3\cdot 2x$ lukt het primitiveren van $f(x)$ wel op deze manier.
Omdat $[x^3 + 1]' = 3x^2$ en $6x$ niet geschreven kan worden als het product van een constante en $3x^2$ lukt het primitiveren van $h(x)$ niet op deze manier.
b Omdat $[x^4 + 7]' = 4x^3$ en $10x^3 = 2\frac{1}{2}\cdot 4x^3$ lukt het primitiveren van $g(x)$ wel op deze manier.
Omdat $[x^4 + x]' = 4x^3 + 1$ en $10x^3$ niet geschreven kan worden als het product van een constante en $4x^3 + 1$ lukt het primitiveren van $k(x)$ niet op deze manier.
c $[x^4 + x]' = 4x^3 + 1$
$10x^3 + a = 2\frac{1}{2}\left(4x^3 + \frac{2}{5}a\right)$ moet gelijk zijn aan $2\frac{1}{2}(4x^3 + 1)$, dus $\frac{2}{5}a = 1$ en dit geeft $a = 2\frac{1}{2}$.

3 **a** $3x^2\,dx = d(x^3 + 5)$
b $5x^4\,dx = d(x^5 - 3)$
c $\cos(2x)\,dx = d\left(\frac{1}{2}\sin(2x) + \pi\right)$
d $\frac{1}{x}dx = d\ln(x)$
e $(5 - 2x)\,dx = d(5x - x^2)$
f $2\cos(4x)\,dx = d\frac{1}{2}\sin(4x)$

4 **a** $F(x) = \int 2x(x^2 + 4)^3\,dx = \int (x^2 + 4)^3\cdot 2x\,dx = \int (x^2 + 4)^3\,d(x^2 + 4)$
$= \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}(x^2 + 4)^4 + c$
b $G(x) = \int 6x\sqrt{x^2 + 1}\,dx = \int 3\sqrt{x^2 + 1}\cdot 2x\,dx = \int 3\sqrt{x^2 + 1}\,d(x^2 + 1) = \int 3u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{3}{1\frac{1}{2}}u^{1\frac{1}{2}} + c$
$= 2(x^2 + 1)^{1\frac{1}{2}} + c = 2(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} + c$
c $H(x) = \int 6x^2(x^3 - 1)^4\,dx = \int 2(x^3 - 1)^4\cdot 3x^2\,dx = \int 2(x^3 - 1)^4\,d(x^3 - 1) = \int 2u^4\,du = \frac{2}{5}u^5 + c$
$= \frac{2}{5}(x^3 - 1)^5 + c$
d $J(x) = \int 3x^2\sin(x^3 - 1)\,dx = \int \sin(x^3 - 1)\cdot 3x^2\,dx = \int \sin(x^3 - 1)\,d(x^3 - 1) = \int \sin(u)\,du$
$= -\cos(u) + c = -\cos(x^3 - 1) + c$

5 **a** $F(x) = \int (3x - 4)^3\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot(3x - 4)^4 + c = \frac{1}{12}(3x - 4)^4 + c$
b $F(x) = \int (2x - 3)\sqrt{2x - 3}\,dx = \int (2x - 3)^{1\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x - 3)^{2\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{5}(2x - 3)^2\cdot\sqrt{2x - 3} + c$
c $F(x) = \int \frac{2}{\sqrt{1 - x}}\,dx = \int -4\cdot -1\cdot\frac{1}{2\sqrt{1 - x}}\,dx = -4\sqrt{1 - x} + c$

d $F(x) = \int \frac{6x}{3x^2+2}\,dx = \int 6x \cdot \frac{1}{3x^2+2}\,dx = \ln|3x^2+2| + c$

e $F(x) = \int \ln(4x+1)\,dx = \frac{1}{4}((4x+1)\ln(4x+1) - (4x+1)) + c$

f $F(x) = \int x\ln(x^2+1)\,dx = \int \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\cdot 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(u)\,du$

$= \frac{1}{2}(u\ln(u) - u) + c = \frac{1}{2}((x^2+1)\ln(x^2+1) - (x^2+1)) + c$

Bladzijde 190

6 **a** $F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int \ln(x)\,d\ln(x) = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}\ln^2(x) + c$

b $G(x) = \int x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot -2x\,dx = \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot d(-x^2) = \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u}\,du = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u} + c = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + c$

c $H(x) = \int x\sqrt{5-x^2}\,dx = \int -\frac{1}{2}\sqrt{5-x^2}\cdot -2x\,dx = \int -\frac{1}{2}\sqrt{5-x^2}\,d(5-x^2) = \int -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\frac{1}{2}}u^{1\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{3}(5-x^2)\sqrt{5-x^2} + c$

d $J(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\,d(x^2+1) = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + c = \sqrt{x^2+1} + c$

7 **a** $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}\cdot\sin(x)$

b $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \int -1\cdot\frac{1}{\cos(x)}\cdot -\sin(x)\cdot dx = \int \frac{-1}{\cos(x)}\,d\cos(x)$

Bladzijde 191

8 **a** $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \tan(2x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)|\right]_0^{\frac{1}{6}\pi} = -\frac{1}{2}\ln|\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)| + \frac{1}{2}\ln|\cos(0)| = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(1) = -\frac{1}{2}\ln(2^{-1}) + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}\ln(2)$

b $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin^3(x)\,dx = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin^2(x)\cdot\sin(x)\,dx = \int_{=\frac{1}{4}\pi}^{=\frac{1}{3}\pi} -(1-\cos^2(x))\cdot -\sin(x)\,dx$

$= \int_{x=\frac{1}{4}\pi}^{x=\frac{1}{3}\pi} -(1-\cos^2(x))\cdot d\cos(x) = \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} (-1+u^2)\cdot du = \left[-u + \frac{1}{3}u^3\right]_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{12}\sqrt{2} = -\frac{11}{24} + \frac{5}{12}\sqrt{2}$

c $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} -\frac{1}{\cos^3(x)}\cdot -\sin(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{6}\pi} -\frac{1}{\cos^3(x)}\,d\cos(x) = \int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} -\frac{1}{u^3}\,du = \int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} -u^{-3}\,du$

$= \left[\frac{1}{2}u^{-2}\right]_1^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \left[\frac{1}{2u^2}\right]_1^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}} - \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

9 **a** $x = 0$ geeft $u = \sqrt{0+4} = 2$
$x = 5$ geeft $u = \sqrt{5+4} = 3$

b $\sqrt{x+4} = u$
kwadrateren geeft
$x + 4 = u^2$
$x = u^2 - 4$

c $\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx = \int_{u=2}^{u=3} (u^2-4)\cdot u\,d(u^2-4) = \int_2^3 (u^2-4)\cdot u\cdot 2u\,du = \int_2^3 (2u^4 - 8u^2)\,du = \left[\frac{2}{5}u^5 - \frac{8}{3}u^3\right]_2^3$

$= \frac{2}{5}\cdot 3^5 - \frac{8}{3}\cdot 3^3 - \frac{2}{5}\cdot 2^5 + \frac{8}{3}\cdot 2^3 = 97\frac{1}{5} - 72 - 12\frac{4}{5} + 21\frac{1}{3} = 33\frac{11}{15}$

10 **a** $\sqrt{x+1} = u$

kwadrateren geeft

$x + 1 = u^2$

$x = u^2 - 1$

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{u=1}^{u=2} (u^2-1)\cdot u\,\mathrm{d}(u^2-1) = \int_1^2 (u^2-1)\cdot u \cdot 2u\,\mathrm{d}u = \int_1^2 (2u^4 - 2u^2)\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{2}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3\right]_1^2$$

$$= \tfrac{2}{5}\cdot 2^5 - \tfrac{2}{3}\cdot 2^3 - \left(\tfrac{2}{5}\cdot 1^5 - \tfrac{2}{3}\cdot 1^3\right) = 12\tfrac{4}{5} - 5\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3} = 7\tfrac{11}{15}$$

b $\sqrt{x+9} = u$

kwadrateren geeft

$x + 9 = u^2$

$x = u^2 - 9$

$$\int_0^7 \frac{5x}{\sqrt{x+9}}\,\mathrm{d}x = \int_{u=3}^{u=4} \frac{5(u^2-9)}{u}\,\mathrm{d}(u^2-9) = \int_3^4 \frac{5(u^2-9)}{u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u = \int_3^4 (10u^2 - 90)\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{10}{3}u^3 - 90u\right]_3^4$$

$$= \tfrac{10}{3}\cdot 4^3 - 90\cdot 4 - \left(\tfrac{10}{3}\cdot 3^3 - 90\cdot 3\right) = 213\tfrac{1}{3} - 360 - 90 + 270 = 33\tfrac{1}{3}$$

Bladzijde 192

11 **a** $$\int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \ln^2(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=1}^{x=2} \ln^2(x)\,\mathrm{d}\ln(x) = \int_0^{\ln(2)} u^2\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{3}u^3\right]_0^{\ln(2)} = \tfrac{1}{3}\ln^3(2)$$

b $$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=\mathrm{e}}^{x=\mathrm{e}^2} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}\ln(x) = \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = [\ln|u|]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

c $$\int_0^1 \frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x^3}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -\tfrac{1}{6}\cdot \mathrm{e}^{-2x^3}\cdot -6x^2\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=1} -\tfrac{1}{6}\cdot \mathrm{e}^{-2x^3}\,\mathrm{d}\,{-2x^3} = \int_0^{-2} -\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \left[-\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^u\right]_0^{-2} = -\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{6}\mathrm{e}^0$$

$$= -\frac{1}{6\mathrm{e}^2} + \tfrac{1}{6} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{6\mathrm{e}^2}$$

12 **a** $$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2(x)}\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}\sin(x) = \int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -u^{-1} + c = -\frac{1}{u} + c$$

$$= -\frac{1}{\sin(x)} + c$$

$f(x) = \cos(x) - \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ geeft $F(x) = \sin(x) + \dfrac{1}{\sin(x)} + c$

b $$G(x) = \int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x = \int -\sin^4(x)\cdot -\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int -(\sin^2(x))^2\,\mathrm{d}\cos(x) = \int -(1 - \cos^2(x))^2\,\mathrm{d}\cos(x)$$

$$= \int -(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u = \int -(1 - 2u^2 + u^4)\,\mathrm{d}u = \int (-1 + 2u^2 - u^4)\,\mathrm{d}u = -u + \tfrac{2}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5 + c$$

$$= -\tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{2}{3}u^3 - u + c = -\tfrac{1}{5}\cos^5(x) + \tfrac{2}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + c$$

13 **a** $f(x) = 0$ geeft $\dfrac{2 + \ln(x)}{x} = 0$

$2 + \ln(x) = 0$

$\ln(x) = -2$

$x = \mathrm{e}^{-2}$

$$O(V) = \int_{\mathrm{e}^{-2}}^{\mathrm{e}} \frac{2 + \ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}^{-2}}^{\mathrm{e}} (2 + \ln(x))\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=\mathrm{e}^{-2}}^{x=\mathrm{e}} (2 + \ln(x))\,\mathrm{d}\ln(x) = \int_{-2}^{1} (2 + u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \left[2u + \tfrac{1}{2}u^2\right]_{-2}^{1} = 2 + \tfrac{1}{2} - (-4 + 2) = 4\tfrac{1}{2}$$

b $\int_1^p \frac{2+\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^p (2+\ln(x))\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int_{x=1}^{x=p} (2+\ln(x))\,d\ln(x) = \int_0^{\ln(p)} (2+u)\,du = \left[2u+\tfrac{1}{2}u^2\right]_0^{\ln(p)} =$

$2\ln(p)+\frac{1}{2}\ln^2(p)$

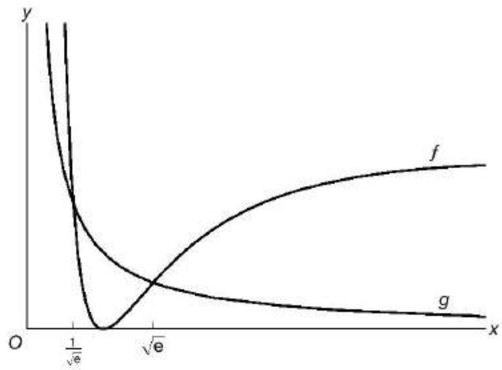
$\int_1^p f(x)\,dx = 6$ geeft $2\ln(p)+\frac{1}{2}\ln^2(p) = 6$

$\ln^2(p)+4\ln(p)-12=0$
$(\ln(p)-2)(\ln(p)+6)=0$
$\ln(p)=2 \vee \ln(p)=-6$
$p=e^2 \vee p=e^{-6}$
vold. vold. niet

Dus $p=e^2$.

14 **a** $f(x)=g(x)$ geeft $\frac{4\ln^2(x)}{x}=\frac{1}{x}$

$4\ln^2(x)=1$
$\ln^2(x)=\frac{1}{4}$
$\ln(x)=\frac{1}{2} \vee \ln(x)=-\frac{1}{2}$
$x=e^{\frac{1}{2}} \vee x=e^{-\frac{1}{2}}$
$x=\sqrt{e} \vee x=\frac{1}{\sqrt{e}}$



$f(x)\le g(x)$ geeft $\frac{1}{\sqrt{e}}\le x\le\sqrt{e}$

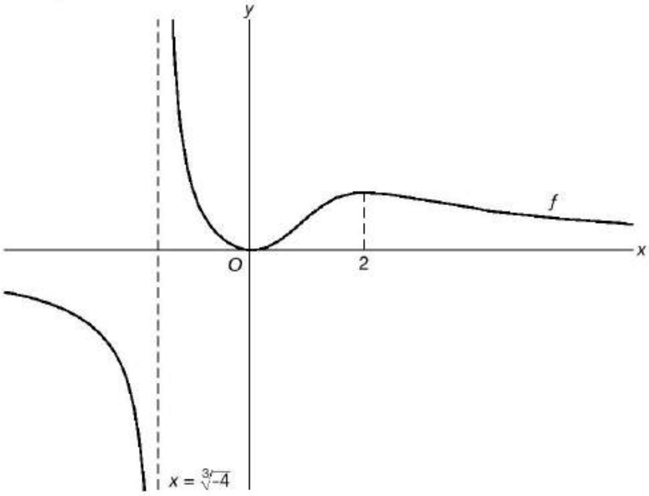
b $O(V)=\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} (g(x)-f(x))\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x}-\frac{4\ln^2(x)}{x}\right)dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} (1-4\ln^2(x))\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \int_{x=\frac{1}{\sqrt{e}}}^{x=\sqrt{e}} (1-4\ln^2(x))\,d\ln(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-4u^2)\,du = \left[u-\tfrac{4}{3}u^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\cdot -\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

15 **a** $f(x)=\frac{3x^2}{x^3+4}$ geeft $f'(x)=\frac{(x^3+4)\cdot 6x-3x^2\cdot 3x^2}{(x^3+4)^2}=\frac{6x^4+24x-9x^4}{(x^3+4)^2}=\frac{-3x^4+24x}{(x^3+4)^2}$

$f'(x)=0$ geeft $-3x^4+24x=0$
$-3x(x^3-8)=0$
$x=0 \vee x^3=8$
$x=0 \vee x=2$

$x^3+4=0$
$x^3=-4$
$x=\sqrt[3]{-4}$



min. is $f(0)=0$
max. is $f(2)=1$
$f(x)=p$ heeft drie oplossingen voor $0<p<1$.

b $\int_0^p \frac{3x^2}{x^3+4}\,dx = \int_0^p \frac{1}{x^3+4} \cdot 3x^2\,dx = \int_{x=0}^{x=p} \frac{1}{x^3+4}\,d(x^3+4) = \int_4^{p^3+4} \frac{1}{u}\,du = [\ln|u|]_4^{p^3+4} = \ln(p^3+4) - \ln(4)$

$\int_0^p f(x)\,dx = 2$ geeft $\ln(p^3+4) - \ln(4) = 2$

$$\ln\left(\frac{p^3+4}{4}\right) = 2$$
$$\frac{p^3+4}{4} = e^2$$
$$p^3 + 4 = 4e^2$$
$$p^3 = 4e^2 - 4$$
$$p = \sqrt[3]{4e^2 - 4}$$

Bladzijde 193

16 **a** $h(t) = \frac{a\ln(bt+1)}{bt+1}$ geeft $h'(t) = \frac{(bt+1)\cdot a \cdot \frac{1}{bt+1} \cdot b - a\ln(bt+1)\cdot b}{(bt+1)^2} = \frac{ab - ab\ln(bt+1)}{(bt+1)^2}$

$h'(2) = 0$ geeft $\frac{ab - ab\ln(2b+1)}{(2b+1)^2} = 0$

$$ab - ab\ln(2b+1) = 0$$
$$ab(1 - \ln(2b+1)) = 0$$
$$ab = 0 \ \vee \ 1 - \ln(2b+1) = 0$$
vold. niet $\ln(2b+1) = 1$
$$2b + 1 = e$$
$$2b = e - 1$$
$$b = \frac{e-1}{2} = 0{,}859...$$

Dus $b \approx 0{,}86$.

b $b = 0{,}86$ geeft $h(t) = \frac{a\ln(0{,}86t+1)}{0{,}86t+1}$

$H(4) = \int_0^4 h(t)\,dt = \int_0^4 \frac{a\ln(0{,}86t+1)}{0{,}86t+1}\,dt = \int_0^4 a\ln(0{,}86t+1) \cdot \frac{1}{0{,}86t+1}\,dt =$

$\int_{t=0}^{t=4} a \cdot \frac{1}{0{,}86} \cdot \ln(0{,}86t+1)\,d\ln(0{,}86t+1) = \int_0^{\ln(4{,}44)} \frac{a}{0{,}86} \cdot u\,du =$

$\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{0{,}86} \cdot u^2\right]_0^{\ln(4{,}44)} = \frac{a}{1{,}72} \cdot \ln^2(4{,}44) - 0 = 1{,}291...a$

$H(4) = 230\,000$ geeft $1{,}291...a = 230\,000$
$$a \approx 178\,000$$

c Het maximale debiet is $h(2) = \frac{178\,000\ln(0{,}86 \cdot 2 + 1)}{0{,}86 \cdot 2 + 1} \approx 65\,500\ \text{m}^3/\text{uur}$.

d $H(1) = \int_0^1 h(t)\,dt = \int_0^1 \frac{178\,000\ln(0{,}86t+1)}{0{,}86t+1}\,dt = \int_{t=0}^{t=1} \frac{178\,000}{0{,}86} \cdot \ln(0{,}86t+1)\,d\ln(0{,}86t+1)$

$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{178\,000}{0{,}86} \cdot u^2\right]_0^{\ln(1{,}86)} = \frac{89\,000}{0{,}86}\ln^2(1{,}86) - 0 = 39\,854{,}9...$

Dus er is $40\,000\ \text{m}^3$ weggestroomd.

K.2 Partieel integreren

Bladzijde 195

17 **a** $k(x) = (2x+3)\sin(x)$ differentiëren met de productregel geeft $k'(x) = 2\sin(x) + (2x+3)\cos(x)$.
Dus is k geen primitieve van h.

b Het linker- en rechterlid van de vergelijking $(2x+3)\cos(x) = k'(x) - 2\sin(x)$ integreren geeft

$$\int (2x+3)\cos(x)\,dx = \int (k'(x) - 2\sin(x))\,dx$$
$$\int (2x+3)\cos(x)\,dx = (2x+3)\sin(x) - \int 2\sin(x)\,dx.$$

c $H(x) = \int (2x+3)\cos(x)\,dx = (2x+3)\sin(x) - \int 2\sin(x)\,dx = (2x+3)\sin(x) + 2\cos(x) + c$

Bladzijde 197

18 $\int x\sin(x)\,dx = \int \sin(x)\,d\tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}x^2\sin(x) - \int \tfrac{1}{2}x^2\cos(x)\,dx = ...$

Het wordt op deze manier alleen maar ingewikkelder.

19 **a** $F(x) = \int x e^{2x}\,dx = \int x\,d\tfrac{1}{2}e^{2x} = x\cdot\tfrac{1}{2}e^{2x} - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x} + c$

b $F(x) = \int 2x\cos(x)\,dx = \int 2x\,d\sin(x) = 2x\sin(x) - \int \sin(x)\,d2x = 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\,dx$
$= 2x\sin(x) + 2\cos(x) + c$

c $F(x) = \int x\ln(x)\,dx = \int \ln(x)\,d\tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \tfrac{1}{2}x^2\,d\ln(x) = \tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \tfrac{1}{2}x^2\dfrac{1}{x}\,dx$
$= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \tfrac{1}{2}x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2 + c$

d $\int x^3\ln(x)\,dx = \int \ln(x)\,d\tfrac{1}{4}x^4 = \tfrac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \tfrac{1}{4}x^4\,d\ln(x) = \tfrac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \tfrac{1}{4}x^4\cdot\dfrac{1}{x}\,dx =$
$\tfrac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \tfrac{1}{4}x^3\,dx = \tfrac{1}{4}x^4\ln(x) - \tfrac{1}{16}x^4 + c$
Dus $F(x) = \int (x^3\ln(x) + 3)\,dx = \tfrac{1}{4}x^4\ln(x) - \tfrac{1}{16}x^4 + 3x + c$.

20 **a** $\int 2xe^{x+1}\,dx = \int 2x\,de^{x+1} = 2xe^{x+1} - \int e^{x+1}\,d2x = 2xe^{x+1} - \int e^{x+1}\cdot 2\,dx = 2xe^{x+1} - 2e^{x+1} + c$

$$\int_0^1 2xe^{x+1}\,dx = \left[2xe^{x+1} - 2e^{x+1}\right]_0^1 = 2e^2 - 2e^2 - (0 - 2e) = 2e$$

b $\int (3x+1)\sin(x)\,dx = \int -(3x+1)\,d\cos(x) = -(3x+1)\cos(x) - \int -\cos(x)\,d(3x+1) =$
$-(3x+1)\cos(x) + \int 3\cos(x)\,dx = -(3x+1)\cos(x) + 3\sin(x) + c$

$$\int_0^{\pi} (3x+1)\sin(x)\,dx = \left[-(3x+1)\cos(x) + 3\sin(x)\right]_0^{\pi} =$$
$-(3\pi+1)\cos(\pi) + 3\sin(\pi) - (-\cos(0) + 3\sin(0)) = 3\pi + 1 + 1 = 3\pi + 2$

21 $F(x) = \int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x\,d\ln(x) = x\ln(x) - \int x\cdot\dfrac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x + c$

22 **a** $f(x) = x^2\ln(x)$ geeft $f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\cdot\dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$

$f'(x) = 0$ geeft $2x\ln(x) + x = 0$
$x(2\ln(x) + 1) = 0$
$x = 0 \vee 2\ln(x) + 1 = 0$
$x = 0 \vee \ln(x) = -\tfrac{1}{2}$
$x = 0 \vee \quad x = e^{-\frac{1}{2}}$
vold. niet vold.

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\cdot -\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}e^{-1}$

Dus $A = \left(e^{-\frac{1}{2}}, -\tfrac{1}{2}e^{-1}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}, -\dfrac{1}{2e}\right)$.

b $O(V) = \displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)\,dx = \int_{x=1}^{x=e} \ln(x)\,d\tfrac{1}{3}x^3 = \left[\tfrac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e - \int_{x=1}^{x=e} \tfrac{1}{3}x^3\,d\ln(x) = \left[\tfrac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{3}x^3\cdot\dfrac{1}{x}\,dx$
$= \left[\tfrac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \tfrac{1}{3}x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e - \left[\tfrac{1}{9}x^3\right]_1^e = \left[\tfrac{1}{3}x^3\ln(x) - \tfrac{1}{9}x^3\right]_1^e$
$= \tfrac{1}{3}e^3\ln(e) - \tfrac{1}{9}e^3 - \left(\tfrac{1}{3}\ln(1) - \tfrac{1}{9}\right) = \tfrac{2}{9}e^3 + \tfrac{1}{9}$

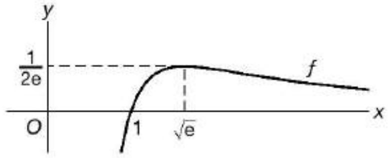
23 **a** $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ geeft $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$

$f'(x) = 0$ geeft $1 - 2\ln(x) = 0$

$$\ln(x) = \tfrac{1}{2}$$

$$x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{\mathrm{e}}$$



max. is $f(\sqrt{\mathrm{e}}) = \dfrac{\frac{1}{2}}{(\sqrt{\mathrm{e}})^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}}$

$\mathrm{B}_f = \left\langle \leftarrow, \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}} \right]$

b $O(V) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x) \cdot x^{-2}\,\mathrm{d}x = \int_{x=1}^{x=\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}(-x^{-1}) = [-x^{-1}\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_{x=1}^{x=\mathrm{e}} -x^{-1}\,\mathrm{d}\ln(x)$

$= \displaystyle\left[-\frac{1}{x}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + [-x^{-1}]_1^{\mathrm{e}} = \left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}$

$= -\dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} - (0 - 1) = -\dfrac{2}{\mathrm{e}} + 1$

Bladzijde 198

24 **a** $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x^2 = x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

b $\int 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}2x = 2x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \cdot 2\,\mathrm{d}x = 2x\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + c$

c $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - (2x\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + c) = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x + c$

$= (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x + c$

Bladzijde 199

25 $\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\sin(x) = \mathrm{e}^x\sin(x) - \int \mathrm{e}^x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \int \cos(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x$

$= \mathrm{e}^x\sin(x) - (\mathrm{e}^x\cos(x) - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\cos(x)) = \mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x) - \int \mathrm{e}^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x$

Uit $\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x) - \int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ volgt $2\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x)$

dus $\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sin(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos(x)$.

De primitieven zijn $G(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x) - \cos(x)) + c$.

26 **a** $F(x) = \int \frac{1}{4}x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{d}\sin(x) = \frac{1}{4}x^2\sin(x) - \int \sin(x)\,\mathrm{d}\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2\sin(x) - \int \frac{1}{2}x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}x^2\sin(x) + \int \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}\cos(x) = \frac{1}{4}x^2\sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) - \int \cos(x)\,\mathrm{d}\frac{1}{2}x$

$= \frac{1}{4}x^2\sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) - \int \frac{1}{2}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2\sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + c$

b $\int e^{-x}\cos(x)\,dx = \int -\cos(x)\,de^{-x} = -\cos(x)e^{-x} + \int e^{-x}\,d\cos(x) = -\cos(x)e^{-x} - \int e^{-x}\sin(x)\,dx$

$= -\cos(x)e^{-x} + \int \sin(x)\,de^{-x} = -\cos(x)e^{-x} + \sin(x)e^{-x} - \int e^{-x}d\sin(x)$

$= -\cos(x)e^{-x} + \sin(x)e^{-x} - \int e^{-x}\cos(x)\,dx$

Uit $\int e^{-x}\cos(x)\,dx = -\cos(x)e^{-x} + \sin(x)e^{-x} - \int e^{-x}\cos(x)\,dx$ volgt

$2\int e^{-x}\cos(x)\,dx = -\cos(x)e^{-x} + \sin(x)e^{-x}$ dus $\int e^{-x}\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) - \cos(x))$.

De primitieven zijn $G(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)) + c$.

c $\int e^{2x}\sin(x)\,dx = \int e^{2x}\,d(-\cos(x)) = -\cos(x)e^{2x} + \int \cos(x)\,de^{2x} = -\cos(x)e^{2x} + \int \cos(x)\cdot 2e^{2x}\,dx$

$= -\cos(x)e^{2x} + \int 2e^{2x}\,d\sin(x) = -\cos(x)e^{2x} + 2e^{2x}\sin(x) - \int \sin(x)\,d2e^{2x}$

$= -\cos(x)e^{2x} + 2e^{2x}\sin(x) - \int 4e^{2x}\sin(x)\,dx = -\cos(x)e^{2x} + 2e^{2x}\sin(x) - 4\int e^{2x}\sin(x)\,dx$

Uit $\int e^{2x}\sin(x)\,dx = -\cos(x)e^{2x} + 2e^{2x}\sin(x) - 4\int e^{2x}\sin(x)\,dx$ volgt

$5\int e^{2x}\sin(x)\,dx = -\cos(x)e^{2x} + 2e^{2x}\sin(x)$ dus $\int e^{2x}\sin(x)\,dx = -\frac{1}{5}\cos(x)e^{2x} + \frac{2}{5}e^{2x}\sin(x)$.

De primitieven zijn $H(x) = \frac{2}{5}e^{2x}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)e^{2x} + c = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin(x) - \cos(x)) + c$.

d $K(x) = \int \ln^2(x)\,dx = x\ln^2(x) - \int x\,d\ln^2(x) = x\ln^2(x) - \int x\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln^2(x) - \int 2\ln(x)\,dx$

$= x\ln^2(x) - 2(x\ln(x) - x) + c = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + c$

27 **a** $\int (x^2 - x)e^x\,dx = \int (x^2 - x)\,de^x = (x^2 - x)e^x - \int e^x\,d(x^2 - x) = (x^2 - x)e^x - \int (2x - 1)e^x\,dx =$

$(x^2 - x)e^x - \int (2x - 1)\,de^x = (x^2 - x)e^x - (2x - 1)e^x + \int e^x\,d(2x - 1) =$

$(x^2 - x)e^x - (2x - 1)e^x + \int 2e^x\,dx = (x^2 - x)e^x - (2x - 1)e^x + 2e^x = (x^2 - 3x + 3)e^x + c$

$\int_1^3 (x^2 - x)e^x\,dx = [(x^2 - 3x + 3)e^x]_1^3 = (9 - 9 + 3)e^3 - (1 - 3 + 3)e^1 = 3e^3 - e$

b $\int x\ln^2(x)\,dx = \int \ln^2(x)\,d\tfrac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \int \frac{1}{2}x^2\,d\ln^2(x) = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \int \frac{1}{2}x^2\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \int x\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \int \ln(x)\,d\tfrac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \int \frac{1}{2}x^2\,d\ln(x)$

$= \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{4}x^2 + c$

$\int_1^e x\ln^2(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2\ln^2(e) - \frac{1}{2}e^2\ln(e) + \frac{1}{4}e^2 - \left(\frac{1}{2}\ln^2(1) - \frac{1}{2}\ln(1) + \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$

28 **a** $f(x) = (2x^2 + x - 1)e^x$ geeft $f'(x) = (4x + 1)e^x + (2x^2 + x - 1)e^x = (2x^2 + 5x)e^x$

$f'(x) = 0$ geeft $(2x^2 + 5x)e^x = 0$

$2x^2 + 5x = 0$

$x(2x + 5) = 0$

$x = 0 \vee x = -2\frac{1}{2}$

max. is $f\left(-2\frac{1}{2}\right) = \left(2\cdot 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} - 1\right)e^{-2\frac{1}{2}} = \dfrac{9}{e^2\sqrt{e}}$

min. is $f(0) = -1$

b $f(x) = 0$ geeft $(2x^2 + x - 1)e^x = 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$D = 1 - 4\cdot 2\cdot -1 = 9$

$x = \dfrac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \dfrac{-1 - 3}{4} = -1$

$\int (2x^2 + x - 1)e^x\,dx = \int (2x^2 + x - 1)\,de^x = (2x^2 + x - 1)e^x - \int e^x\,d(2x^2 + x - 1) =$

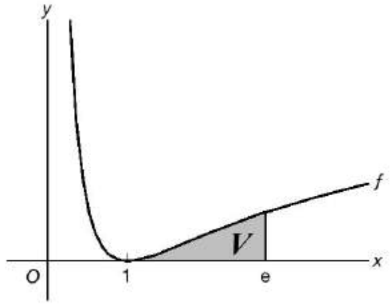
$(2x^2 + x - 1)e^x - \int (4x + 1)e^x\,dx = (2x^2 + x - 1)e^x - \int (4x + 1)\,de^x =$

$(2x^2 + x - 1)e^x - (4x + 1)e^x + \int e^x\,d(4x + 1) = (2x^2 + x - 1)e^x - (4x + 1)e^x + \int 4e^x\,dx =$

$(2x^2 + x - 1)e^x - (4x + 1)e^x + 4e^x = (2x^2 - 3x - 2)e^x + c$

$O(V) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x^2 + x - 1)e^x\,dx = [(2x^2 - 3x + 2)e^x]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} + 2\right)e^{\frac{1}{2}} - (2 + 3 + 2)e^{-1} = \sqrt{e} - \dfrac{7}{e}$

29 **a** $f(x) = 0$ geeft $\ln^2(x) = 0$
$\ln(x) = 0$
$x = 1$



$$\int \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2\ln^2(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \int 2\ln^2(x)\,d\sqrt{x} = 2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - \int \sqrt{x}\,d\,2\ln^2(x)$$
$$= 2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - \int \sqrt{x}\cdot 4\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - \int 4\ln(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - \int 8\ln(x)\,dx^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - 8\ln(x)\sqrt{x} + \int x^{\frac{1}{2}}\,d\,8\ln(x) = 2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - 8\ln(x)\sqrt{x} + \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{8}{x}\,dx$$
$$= 2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - 8\ln(x)\sqrt{x} + \int 8x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - 8\ln(x)\sqrt{x} + 16x^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - 8\ln(x)\sqrt{x} + 16\sqrt{x} + c$$

$$O(V) = \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\ln^2(x)\cdot\sqrt{x} - 8\ln(x)\sqrt{x} + 16\sqrt{x}\right]_1^e$$
$$= 2\ln^2(e)\cdot\sqrt{e} - 8\ln(e)\sqrt{e} + 16\sqrt{e} - (2\ln^2(1) - 8\ln(1) + 16) = 2\sqrt{e} - 8\sqrt{e} + 16\sqrt{e} - 16 = 10\sqrt{e} - 16$$

b $$I(L) = \pi\int_1^e \frac{\ln^4(x)}{x}\,dx = \pi\int_1^e \ln^4(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \pi\int_{x=1}^{x=e} \ln^4(x)\,d\ln(x) = \pi\int_{u=0}^{u=1} u^4\,du = \pi\left[\tfrac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \tfrac{1}{5}\pi$$

K.3 Cyclometrische functies

Bladzijde 201

30 $$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\tan^2(t)+1}\,d\tan(t) = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\tan^2(t)+1}\cdot(\tan^2(t)+1)\,dt = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} 1\,dt = [\,t\,]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{4}\pi$$

Bladzijde 203

31 **a** Het bereik van $f(x) = \arctan(x)$ is $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$.

$1\frac{1}{6}\pi$ zit niet in het bereik, dus $\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \neq 1\frac{1}{6}\pi$.

b $\sqrt{3} > \frac{1}{2}\pi$, dus de vergelijking $\arctan(x) = \sqrt{3}$ heeft geen oplossing.

32

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$

33 **a** $\arctan(x) = \frac{1}{3}\pi$
$x = \tan\left(\frac{1}{3}\pi\right)$
$x = \sqrt{3}$

b $\arctan(x-2) = -\frac{1}{4}\pi$
$x - 2 = \tan\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$
$x - 2 = -1$
$x = 1$

c $\arctan(x^2-1) = \frac{1}{4}\pi$
$x^2 - 1 = \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)$
$x^2 - 1 = 1$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

d $\arctan(x) = \frac{2}{3}\pi$
geen oplossing, want $\frac{2}{3}\pi > \frac{1}{2}\pi$

d $\arctan(x) = \frac{2}{3}\pi$

geen oplossing, want $\frac{2}{3}\pi > \frac{1}{2}\pi$

e $\arctan(x) = \sqrt{2}$

$x = \tan(\sqrt{2})$

$x \approx 6{,}334$

f $\arctan(x^2 - 1) = 1$

$x^2 - 1 = \tan(1)$

$x^2 - 1 = 1{,}557...$

$x^2 = 2{,}557...$

$x = \sqrt{2{,}557...} \vee x = -\sqrt{2{,}557...}$

$x \approx 1{,}599 \vee x = -1{,}599$

34 **a** $f(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{2}x\right)$ geeft $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{2} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}x^2 + 1} = \dfrac{4}{x^2 + 4}$

b $g(x) = \arctan(x - 2)$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2 + 1} = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 4 + 1} = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$

c $h(x) = \arctan(x^2)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{(x^2)^2 + 1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^4 + 1}$

Bladzijde 204

35 **a** $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan(x)]_{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \tfrac{1}{3}\pi - -\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\pi$

b $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = [\arctan(x+1)]_{-2}^{-1} = \arctan(0) - \arctan(-1) = 0 - -\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{4}\pi$

c $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{3}{9x^2+1}\,dx = \int_{0}^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{3}{(3x)^2+1}\,dx = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{1}{(3x)^2+1}\,d\,3x = [\arctan(3x)]_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(0) = \tfrac{1}{3}\pi - 0 = \tfrac{1}{3}\pi$

36 **a** $f(x) = \dfrac{10}{x^2+4} = \dfrac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}x^2+1} = \dfrac{2\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1}$

Dus $a = 2\frac{1}{2}$ en $b = \frac{1}{2}$.

b $F(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \cdot 2\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + c = 5\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + c$

Bladzijde 205

37 **a** $F(x) = \displaystyle\int \frac{12}{16x^2+1}\,dx = \int \frac{12}{(4x)^2+1}\,dx = \tfrac{1}{4} \cdot 12 \cdot \arctan(4x) + c = 3\arctan(4x) + c$

b $G(x) = \displaystyle\int \frac{4}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{4}x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1}\,dx = 2\arctan\left(\tfrac{1}{2}x\right) + c$

c $H(x) = \displaystyle\int \frac{5}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{5}{(x+3)^2-9+10}\,dx = \int \frac{5}{(x+3)^2+1}\,dx = 5\arctan(x+3) + c$

d $J(x) = \displaystyle\int \frac{3}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{3}{(x+2)^2-4+13}\,dx = \int \frac{3}{(x+2)^2+9}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{\frac{(x+2)^2}{9}+1}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}(x+2)\right)^2+1}\,dx = \arctan\left(\tfrac{1}{3}(x+2)\right) + c = \arctan\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}\right) + c$

38 **a** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^2+3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{3}x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \left[\sqrt{3} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$

$\displaystyle = \sqrt{3} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3} \cdot \arctan\left(\frac{0}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} \cdot \arctan\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \arctan(0) = \sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{6}\pi - 0 = \tfrac{1}{6}\pi\sqrt{3}$

b $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}\,dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{(x^2)^2+1}\,dx^2 = [\arctan(x^2)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \tfrac{1}{4}\pi$

c $\displaystyle\int_3^6 \frac{5}{x^2-6x+18}\,dx = \int_3^6 \frac{5}{(x-3)^2-9+18}\,dx = \int_3^6 \frac{5}{(x-3)^2+9}\,dx = \int_3^6 \frac{\frac{5}{9}}{\frac{1}{9}(x-3)^2+1}\,dx =$

$\displaystyle\int_3^6 \frac{\frac{5}{9}}{\left(\frac{1}{3}(x-3)\right)^2+1}\,dx = \left[3 \cdot \tfrac{5}{9} \cdot \arctan\left(\tfrac{1}{3}(x-3)\right)\right]_3^6 = \tfrac{5}{3} \cdot \arctan(1) - \tfrac{5}{3} \cdot \arctan(0) = \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{12}\pi$

d $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \arctan(x)\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\sqrt{3}} \arctan(x)\,\mathrm{d}\arctan(x) = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} u\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^2\right]_0^{\frac{1}{3}\pi} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{9}\pi^2 - 0 = \tfrac{1}{18}\pi^2$

39 **a** $\displaystyle\int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{2}{4x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{9}}{(\frac{2}{3}x)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{9}\cdot\tfrac{3}{2}\arctan\left(\tfrac{2}{3}x\right)\right]_0^{1\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}\arctan(1) - \tfrac{1}{3}\arctan(0) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{12}\pi$

b $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{(\mathrm{e}^x)^2+1}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\arctan(u)\right]_1^{\sqrt{3}} = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(0) = \tfrac{1}{3}\pi$

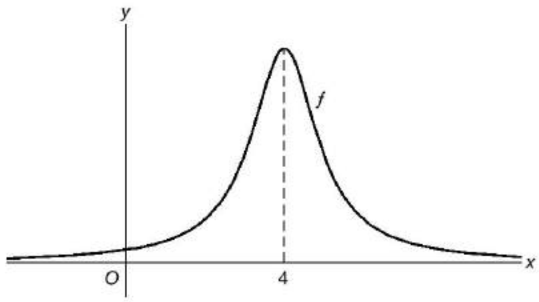
c $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4x^2-4x+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{4x^2-4x+1+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(2x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}\arctan(2x-1)\right]_0^1 =$

$\tfrac{1}{2}\arctan(1) - \tfrac{1}{2}\arctan(-1) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\cdot -\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{4}\pi$

d $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)+1}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} -\frac{1}{\cos^2(x)+1}\,\mathrm{d}\cos(x) = \int_1^0 -\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[-\arctan(u)\right]_1^0 = -\arctan(0) + \arctan(1) = \tfrac{1}{4}\pi$

40 **a** $f(x) = \dfrac{10}{x^2-8x+17}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2-8x+17)\cdot 0 - 10(2x-8)}{(x^2-8x+17)^2} = \dfrac{-20x+80}{(x^2-8x+17)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $-20x + 80 = 0$
$-20x = -80$
$x = 4$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, dus de lijn $y = 0$ is een horizontale asymptoot.

max. is $f(4) = \dfrac{10}{16-32+17} = 10$, dus $B_f = \langle 0, 10]$.

b $\displaystyle O(V) = \int_4^5 \frac{10}{x^2-8x+17}\,\mathrm{d}x = \int_4^5 \frac{10}{(x-4)^2-16+17}\,\mathrm{d}x = \int_4^5 \frac{10}{(x-4)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[10\arctan(x-4)\right]_4^5$

$= 10\arctan(1) - 10\arctan(0) = 10\cdot\tfrac{1}{4}\pi = 2\tfrac{1}{2}\pi$

c $O(W) = 10$ geeft $\displaystyle\int_4^p f(x)\,\mathrm{d}x = 10$

$\left[10\arctan(x-4)\right]_4^p = 10$
$10\arctan(p-4) - 10\arctan(0) = 10$
$\arctan(p-4) = 1$
$p - 4 = \tan(1)$
$p = 4 + \tan(1)$
$p \approx 5{,}557$

41 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}\sin(t) = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)}}\cdot\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{\cos(t)}\cdot\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} 1\,\mathrm{d}t = \left[t\right]_0^{\frac{1}{6}\pi} = \tfrac{1}{6}\pi$

Bladzijde 207

42

x	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$

43 **a** $\arcsin(x) = \frac{1}{2}\pi$

$x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

$x = 1$

b $\arcsin(x) = -\frac{1}{6}\pi$

$x = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$

$x = -\frac{1}{2}$

c $\arcsin(x) = 2$

Geen oplossing, want $2 > \frac{1}{2}\pi$.

d $3\arcsin\left(x - \sqrt{3}\right) = \pi$

$\arcsin\left(x - \sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\pi$

$x - \sqrt{3} = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$

$x - \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

44 **a** $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}\arcsin(3x)\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \tfrac{1}{3}\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{9}\pi - \frac{1}{18}\pi = \frac{1}{18}\pi$

b $\displaystyle\int_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\arcsin\left(\tfrac{1}{3}x\right)\right]_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

$= \arcsin\left(\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{3}\cdot -1\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\pi - -\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$

c $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\sqrt{2}} \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,\mathrm{d}x^2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}\arcsin(u)\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arcsin(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\pi - 0 = \frac{1}{12}\pi$

d $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^4}}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=1} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}}\,\mathrm{d}\tfrac{1}{2}x^2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}\arcsin(u)\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arcsin(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\pi - 0 = \frac{1}{12}\pi$

45 **a** $F(x) = \displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \int x\,\mathrm{d}\arctan(x) = x\arctan(x) - \int x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

$= x\arctan(x) - \displaystyle\int \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1) = x\arctan(x) - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$

b $G(x) = \displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(x) - \int x\,\mathrm{d}\arcsin(x) = x\arcsin(x) - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$= x\arcsin(x) - \displaystyle\int -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}(1-x^2) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$

46 **a** $25 - x^4 > 0$

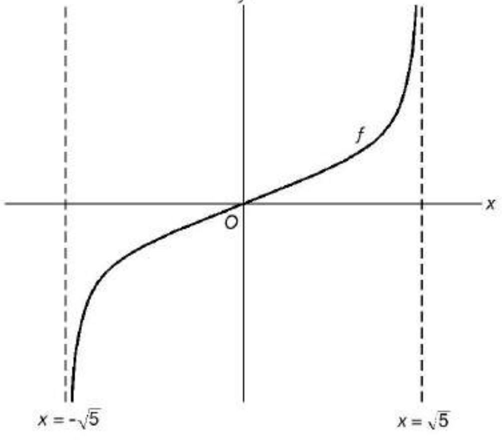
$x^4 < 25$

$-5 < x^2 < 5$

$x^2 < 5$

$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

Dus $D_f = \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5}\rangle$.



b $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{25-x^4}}$ geeft $f'(x) = \dfrac{\sqrt{25-x^4}\cdot 1 - x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{25-x^4}}\cdot -4x^3}{25-x^4} = \dfrac{\sqrt{25-x^4}+\dfrac{2x^4}{\sqrt{25-x^4}}}{25-x^4}$

$$= \frac{25-x^4+2x^4}{(25-x^4)\sqrt{25-x^4}} = \frac{x^4+25}{(25-x^4)\sqrt{25-x^4}}$$

Stel $k{:}\ y = ax + b$ met $a = f'\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{9+25}{(25-9)\sqrt{25-9}} = \dfrac{34}{64} = \frac{17}{32}$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{17}{32}x + b \\ f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{25-9}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}, \text{dus } A\left(\sqrt{3}, \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{17}{32}\sqrt{3} + b = \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ b = -\frac{9}{32}\sqrt{3} \end{array}$$

Dus $k{:}\ y = \frac{17}{32}x - \frac{9}{32}\sqrt{3}$.

c $O(V) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{10}} \frac{x}{\sqrt{25-x^4}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{10}} \frac{\frac{1}{5}x}{\sqrt{1-\frac{1}{25}x^4}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{10}} \frac{\frac{1}{5}x}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}x^2\right)^2}}\,dx = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\sqrt{10}} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}x^2\right)^2}}\,d\tfrac{1}{5}x^2$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \left[\tfrac{1}{2}\arcsin(u)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\arcsin(0) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{12}\pi$$

47 **a** $F(x) = \displaystyle\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \arcsin(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \arcsin(x)\,d\arcsin(x) = \tfrac{1}{2}\arcsin^2(x) + c$

b $G(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(x)}}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,d\ln(x) = \arcsin(\ln(x)) + c$

K.4 Breuksplitsen

Bladzijde 209

48 **a** $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) = \ln(x^2+1)$

$G(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)$

b Uitdelen geeft $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1} = f(x) + g(x)$.

Dus $H(x) = \ln(x^2+1) + \arctan(x) + c$.

49 **a** Uitdelen geeft $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+1} = \dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{5}{x+1}$.

f is zo niet te primitiveren, want er is geen primitieve te geven van $\dfrac{2x}{x+1}$.

b $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2x+2}{x+1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2x+2+3}{x+1} = \dfrac{2x+5}{x+1}$

Dus de splitsing is correct.

$F(x) = \displaystyle\int \left(2 + \frac{3}{x+1}\right)dx = 2x + 3\ln|x+1| + c$

Bladzijde 211

50 **a** $x+1\,/\,2x+1\,\backslash\,2$

$\underline{2x+2}$ $-$

-1

Dus $\dfrac{2x+1}{x+1}=2-\dfrac{1}{x+1}$.

$F(x)=\displaystyle\int\frac{2x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(2-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=2x-\ln|x+1|+c$

b $x+1\,/\,x\quad\backslash\,1$

$\underline{x+1}$ $-$

-1

Dus $\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$.

$F(x)=\displaystyle\int\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+c$

c $2x+1\,/\,x+1\,\backslash\,\frac{1}{2}$

$\underline{x+\frac{1}{2}}$ $-$

$\frac{1}{2}$

Dus $\dfrac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{2x+1}$.

$F(x)=\displaystyle\int\frac{x+1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln|2x+1|+c$

d $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}=\dfrac{-x+2}{x+1}$

$x+1\,/\,-x+2\,\backslash\,-1$

$\underline{-x-1}$ $-$

3

Dus $\dfrac{2-x}{x+1}=-1+\dfrac{3}{x+1}$.

$F(x)=\displaystyle\int\frac{2-x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(-1+\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x=-x+3\ln|x+1|+c$

e $f(x)=\dfrac{3-4x}{2x+1}=\dfrac{-4x+3}{2x+1}$

$2x+1\,/\,-4x+3\,\backslash\,-2$

$\underline{-4x-2}$ $-$

5

Dus $\dfrac{3-4x}{2x+1}=-2+\dfrac{5}{2x+1}$.

$F(x)=\displaystyle\int\frac{3-4x}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(-2+\frac{5}{2x+1}\right)\mathrm{d}x=-2x+2\tfrac{1}{2}\ln|2x+1|+c$

f $f(x)=\dfrac{6x-1}{1-2x}=\dfrac{6x-1}{-2x+1}$

$-2x+1\,/\,6x-1\,\backslash\,-3$

$\underline{6x-3}$ $-$

2

Dus $\dfrac{6x-1}{1-2x}=-3+\dfrac{2}{1-2x}$.

$F(x)=\displaystyle\int\frac{6x-1}{1-2x}\,\mathrm{d}x=\int\left(-3+\frac{2}{1-2x}\right)\mathrm{d}x=-3x-\ln|1-2x|+c$

51 **a** $x - 1 \,/\, x^2 - 2x + 3 \setminus x - 1$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2 - \;x} \; - \\ \quad -x + 3 \\ \quad \underline{-x + 1} \; - \\ \qquad\quad 2 \end{array}$$

Dus $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{2}{x - 1}$.

$$\int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(x - 1 + \frac{2}{x - 1}\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + 2\ln|x - 1|\right]_2^3$$

$$= 4\tfrac{1}{2} - 3 + 2\ln(2) - (2 - 2 + 2\ln(1)) = 1\tfrac{1}{2} + 2\ln(2)$$

b $x + 1 \,/\, -2x^2 - \;x \quad \setminus -2x + 1$

$$\begin{array}{l} \underline{-2x^2 - 2x} \; - \\ \qquad\quad x \\ \qquad\quad \underline{x + 1} \; - \\ \qquad\qquad -1 \end{array}$$

Dus $\dfrac{-2x^2 - x}{x + 1} = -2x + 1 - \dfrac{1}{x + 1}$.

$$\int_{-4}^{-2} \frac{-2x^2 - x}{x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{-2} \left(-2x + 1 - \frac{1}{x + 1}\right)\mathrm{d}x = \left[-x^2 + x - \ln|x + 1|\right]_{-4}^{-2}$$

$$= -4 - 2 - \ln(1) - (-16 - 4 - \ln(3)) = 14 + \ln(3)$$

52 **a** $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x + 1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x + 1)(3x^2 + 1) - (x^3 + x) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{3x^3 + x + 3x^2 + 1 - x^3 - x}{(x + 1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{(x + 1)^2}$$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = \dfrac{6}{4} = 1\tfrac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1\tfrac{1}{2}x + b \\ f(1) = \dfrac{2}{2} = 1, \text{ dus } A(1, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\tfrac{1}{2} + b = 1 \\ b = -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

Dus k: $y = 1\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}$.

b $x + 1 \,/\, x^3 \qquad + x \quad \setminus x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 + x^2} \; - \\ \quad -x^2 + x \\ \quad \underline{-x^2 - x} \; - \\ \qquad\quad 2x \\ \qquad\quad \underline{2x + 2} \; - \\ \qquad\qquad -2 \end{array}$$

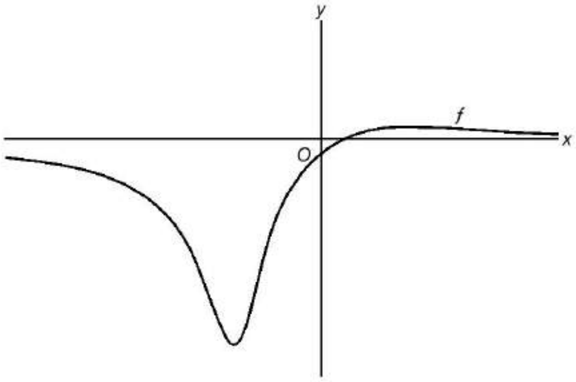
Dus $\dfrac{x^3 + x}{x + 1} = x^2 - x + 2 - \dfrac{2}{x + 1}$.

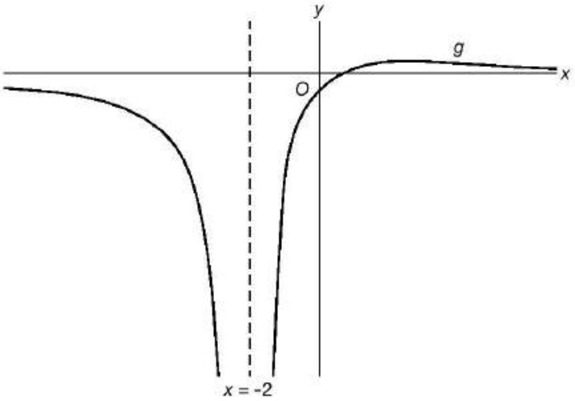
$$O(V) = \int_0^2 \frac{x^3 + x}{x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(x^2 - x + 2 - \frac{2}{x + 1}\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x + 1|\right]_0^2$$

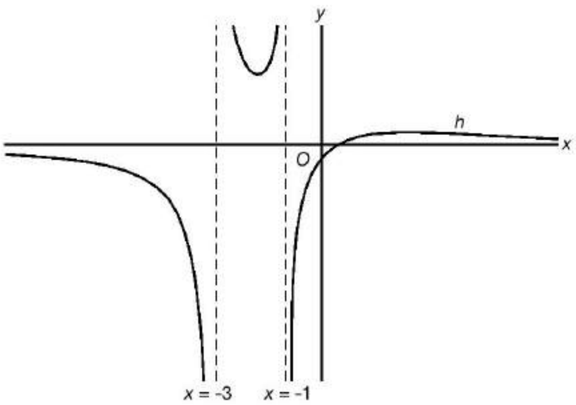
$$= \tfrac{8}{3} - 2 + 4 - 2\ln(3) - (0 - 0 + 0 - 2\ln(1)) = 4\tfrac{2}{3} - 2\ln(3)$$

Bladzijde 212

53 **a**







$f(x)$ is voor elke x gedefinieerd, want de noemer $x^2 + 4x + 5$ heeft geen nulpunten.
$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ heeft één nulpunt, namelijk -2, dus de grafiek van g heeft één verticale asymptoot.
$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$ heeft twee nulpunten, namelijk -1 en -3, dus de grafiek van h heeft twee verticale asymptoten.

b $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} - \dfrac{5}{x^2 + 4x + 5} = \dfrac{2x + 4 - 5}{x^2 + 4x + 5} = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 5}$

$g(x) = \dfrac{2}{x + 2} - \dfrac{5}{(x + 2)^2} = \dfrac{2(x + 2)}{(x + 2)^2} - \dfrac{5}{(x + 2)^2} = \dfrac{2x + 4 - 5}{(x + 2)^2} = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 4}$

$h(x) = -\dfrac{1\frac{1}{2}}{x + 1} + \dfrac{3\frac{1}{2}}{x + 3} = -\dfrac{1\frac{1}{2}(x + 3)}{(x + 1)(x + 3)} + \dfrac{3\frac{1}{2}(x + 1)}{(x + 3)(x + 1)} = \dfrac{-1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}}{(x + 3)(x + 1)} = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 3}$

Bladzijde 214

54 **a** $x^2 + 1 \,/\, x^4 \qquad + 1 \,\backslash\, x^2 - 1$

$$\begin{array}{l} \underline{x^4 + x^2} \\ \quad -x^2 + 1 \\ \quad \underline{-x^2 - 1} \; - \\ \qquad\quad 2 \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}\right)dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x + 2\arctan(x)\right]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{3} - 1 + 2\arctan(1) - (0 - 0 + 2\arctan(0)) = -\tfrac{2}{3} + 2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\pi$$

b $x^2 + 2x + 1 \,/\, x^4 \qquad\qquad + 1 \,\backslash\, x^2 - 2x + 3$

$$\begin{array}{l} \underline{x^4 + 2x^3 + x^2} \; - \\ \quad -2x^3 - x^2 \\ \quad \underline{-2x^3 - 4x^2 - 2x} \; - \\ \qquad\qquad 3x^2 + 2x + 1 \\ \qquad\qquad \underline{3x^2 + 6x + 3} \; - \\ \qquad\qquad\quad -4x - 2 \end{array}$$

Dus $\dfrac{x^4+1}{x^2+2x+1} = x^2 - 2x + 3 - \dfrac{4x+2}{x^2+2x+1} = x^2 - 2x + 3 - \dfrac{4x+2}{(x+1)^2} = x^2 - 2x + 3 - \dfrac{4(x+1)-2}{(x+1)^2}$

$$= x^2 - 2x + 3 - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4}{x+1} + 2(x+1)^{-2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+2x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{4}{x+1} + 2(x+1)^{-2}\right)dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4\ln|x+1| - 2(x+1)^{-1}\right]_0^1 = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4\ln|x+1| - \frac{2}{x+1}\right]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{3} - 1 + 3 - 4\ln(2) - 1 - (0 - 0 + 0 - 4\ln(1) - 2) = 1\tfrac{1}{3} - 4\ln(2) + 2 = 3\tfrac{1}{3} - 4\ln(2)$$

c $x^2 + 4x + 3 \,/\, x^4 \qquad\qquad \backslash\, x^2 - 4x + 13$

$$\begin{array}{l} \underline{x^4 + 4x^3 + 3x^2} \; - \\ \quad -4x^3 - 3x^2 \\ \quad \underline{-4x^3 - 16x^2 - 12x} \; - \\ \qquad\qquad 13x^2 + 12x \\ \qquad\qquad \underline{13x^2 + 52x + 39} \; - \\ \qquad\qquad\quad -40x - 39 \end{array}$$

$$\frac{-40x-39}{x^2+4x+3} = \frac{-40x-39}{(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3} = \frac{a(x+3)+b(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{ax+3a+bx+b}{(x+1)(x+3)} = \frac{(a+b)x+3a+b}{(x+1)(x+3)}$$

$$\begin{cases} a + b = -40 \\ 3a + b = -39 \end{cases} \; -$$

$$-2a = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \tfrac{1}{2} \\ a + b = -40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \tfrac{1}{2} + b = -40 \\ b = -40\tfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\int_0^2 \frac{x^4}{x^2+4x+3}\,dx = \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 13 + \frac{\tfrac{1}{2}}{x+1} - \frac{40\tfrac{1}{2}}{x+3}\right)dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 13x + \tfrac{1}{2}\ln|x+1| - 40\tfrac{1}{2}\ln|x+3|\right]_0^2$$

$$= \tfrac{8}{3} - 8 + 26 + \tfrac{1}{2}\ln(3) - 40\tfrac{1}{2}\ln(5) - (0 - 0 + 0 + \tfrac{1}{2}\ln(1) - 40\tfrac{1}{2}\ln(3))$$

$$= 20\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\ln(3) - 40\tfrac{1}{2}\ln(5) + 40\tfrac{1}{2}\ln(3) = 20\tfrac{2}{3} + 41\ln(3) - 40\tfrac{1}{2}\ln(5)$$

55 **a** $x^2 + 1 \,/\, x^2 + x \quad \backslash\, 1$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2 \qquad + 1} \; - \\ \qquad x - 1 \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+1} = 1 + \dfrac{x-1}{x^2+1} = 1 + \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1} = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 2x \cdot \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1}$ geeft

$F(x) = x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x) + c$

b $x^2 - 6x + 9\,/\,x^2 - 6x + 8 \backslash\ 1$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{-1} -$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 9} = 1 - \frac{1}{x^2 - 6x + 9} = 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = 1 - (x-3)^{-2} \text{ geeft}$$

$$F(x) = x + (x-3)^{-1} + c = x + \frac{1}{x-3} + c$$

c $x^2 + 2x - 3\,/\,x^3 \qquad \backslash\ x - 2$

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{-2x^2 + 3x} -$$

$$\frac{-2x^2 - 4x + 6}{7x - 6} -$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3} = x - 2 + \frac{7x - 6}{x^2 + 2x - 3} = x - 2 + \frac{7x - 6}{(x-1)(x+3)} = x - 2 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$$

$$= x - 2 + \frac{a(x-3) + b(x-1)}{(x-1)(x+3)} = x - 2 + \frac{ax - 3a + bx - b}{(x-1)(x+3)} = x - 2 + \frac{(a+b)x - 3a - b}{(x-1)(x+3)}$$

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ -3a - b = -6 \end{cases}$$

$$\overline{-2a \qquad = 1} \ +$$

$$\left.\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ a + b = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} + b = 7 \\ b = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $f(x) = x - 2 - \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} + \dfrac{7\frac{1}{2}}{x+3}$.

Dit geeft $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + 7\frac{1}{2}\ln|x+3| + c$.

56 **a** $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2 + 1} = x$ geeft $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$

b $x^2 - 6x + 9\,/\,x^3 \qquad + x \qquad \backslash\ x + 6$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{6x^2 - 8x} -$$

$$\frac{6x^2 - 36x + 54}{28x - 54} -$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 6x + 9} = x + 6 + \frac{28x - 54}{x^2 - 6x + 9} = x + 6 + \frac{28(x-3) + 84 - 54}{(x-3)^2} = x + 6 + \frac{28}{x-3} + \frac{30}{(x-3)^2}$$

$$= x + 6 + \frac{28}{x-3} + 30(x-3)^{-2}$$

Dit geeft $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 28\ln|x-3| - 30(x-3)^{-1} + c = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 28\ln|x-3| - \dfrac{30}{x-3} + c$.

c $2x^2 + x\,/\,2x^3 + \qquad 1 \backslash\ x - \frac{1}{2}$

$$\frac{2x^3 + x^2}{-x^2} -$$

$$\frac{-x^2 - \frac{1}{2}x + 1}{\frac{1}{2}x + 1} -$$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 1}{2x^2 + x} = x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}x + 1}{2x^2 + x} = x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}x + 1}{x(2x+1)} = x - \frac{1}{2} + \frac{a}{x} + \frac{b}{2x+1} = x - \frac{1}{2} + \frac{a(2x+1) + bx}{x(2x+1)}$$

$$= x - \frac{1}{2} + \frac{2ax + a + bx}{x(2x+1)} = x - \frac{1}{2} + \frac{(2a+b)x + a}{x(2x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + b = \frac{1}{2} \\ b = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $f(x) = x - \frac{1}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1\frac{1}{2}}{2x+1}$.

Dit geeft $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \ln|x| - \frac{3}{4}\ln|2x+1| + c$.

57 **a** $x^2+4\,/\,x^3 \quad \backslash x$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3+4x} \; - \\ \quad -4x \end{array}$$

Dus $\dfrac{x^3}{x^2+4}=x-\dfrac{4x}{x^2+4}$.

$$\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x-\frac{4x}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x-2\cdot 2x\cdot\frac{1}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x=\left[\tfrac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)\right]_0^2$$

$$=2-2\ln(8)-(0-2\ln(4))=2-2\ln(8)+2\ln(4)=2-2(\ln(8)-\ln(4))=2-2\ln(2)$$

b $x^2+4x+4\,/\,x^3 \quad \backslash x-4$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3+4x^2+4x} \; - \\ \quad -4x^2-4x \\ \quad \underline{-4x^2-16x-16} \; - \\ \qquad 12x+16 \end{array}$$

Dus $\dfrac{x^3}{x^2+4x+4}=x-4+\dfrac{12x+16}{x^2+4x+4}=x-4+\dfrac{12x+16}{(x+2)^2}=x-4+\dfrac{12(x+2)-8}{(x+2)^2}$

$$=x-4+\frac{12}{x+2}-\frac{8}{(x+2)^2}=x-4+\frac{12}{x+2}-8(x+2)^{-2}$$

$$\int_0^8 \frac{x^3}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x=\int_0^8\left(x-4+\frac{12}{x+2}-8(x+2)^{-2}\right)\mathrm{d}x=\left[\tfrac{1}{2}x^2-4x+12\ln|x+2|+8(x+2)^{-1}\right]_0^8$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}x^2-4x+12\ln|x+2|+\frac{8}{x+2}\right]_0^8=32-32+12\ln(10)+\tfrac{4}{5}-(0-0+12\ln(2)+4)$$

$$=12\ln(10)+\tfrac{4}{5}-12\ln(2)-4=12\ln(5)-3\tfrac{1}{5}$$

c $\dfrac{4x-8}{x^2-4x-5}=\dfrac{4x-8}{(x+1)(x-5)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-5}=\dfrac{a(x-5)+b(x+1)}{(x+1)(x-5)}=\dfrac{ax-5a+bx+b}{(x+1)(x-5)}=\dfrac{(a+b)x-5a+b}{(x+1)(x-5)}$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ -5a+b=-8 \end{cases} \; -$$

$$6a \quad =12$$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ a+b=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2+b=4 \\ b=2 \end{array}$$

$$\int_0^2 \frac{4x-8}{x^2-4x-5}\,\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-5}\right)\mathrm{d}x=\left[2\ln|x+1|+2\ln|x-5|\right]_0^2$$

$$=2\ln(3)+2\ln(3)-(2\ln(1)+2\ln(5))=4\ln(3)-2\ln(5)$$

58 I $\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}=\dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x-3}=\dfrac{a(x-3)+b(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{ax-3a+bx-2b}{(x-2)(x-3)}=$

$$\frac{(a+b)x-3a-2b}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ -3a-2b=-5 \end{cases} \left|\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right| \text{ geeft } \begin{cases} 2a+2b=4 \\ -3a-2b=-5 \end{cases} \; +$$

$$-a \quad =-1$$

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ a+b=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1+b=2 \\ b=1 \end{array}$$

$f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$ geeft $F(x)=\ln|x-2|+\ln|x-3|+c$

II $F(x)=\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}(x^2-5x+6)=\ln|x^2-5x+6|+c$

$\ln|x-2|+\ln|x-3|=\ln|(x-2)(x-3)|=\ln|x^2-5x+6|$

Dus de primitieven komen op hetzelfde neer.

Bladzijde 215

59 **a** $f(x) = \dfrac{10x + 5}{4x^2 - 4x + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(4x^2 - 4x + 1) \cdot 10 - (10x + 5)(8x - 4)}{(4x^2 - 4x + 1)^2} =$

$\dfrac{40x^2 - 40x + 10 - (80x^2 - 40x + 40x - 20)}{(2x - 1)^4} = \dfrac{40x^2 - 40x + 10 - 80x^2 + 20}{(2x - 1)^4} = \dfrac{-40x^2 - 40x + 30}{(2x - 1)^4}$

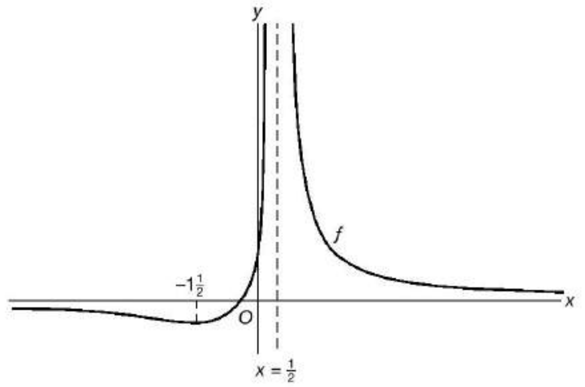
$f'(x) = 0$ geeft $-40x^2 - 40x + 30 = 0$

$4x^2 + 4x - 3 = 0$

$D = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot -3 = 64$

$x = \dfrac{-4 + 8}{8} = \frac{1}{2} \vee x = \dfrac{-4 - 8}{8} = -1\frac{1}{2}$

vold. niet voldoet



min. is $f\left(-1\frac{1}{2}\right) = \dfrac{-15 + 5}{9 + 6 + 1} = \dfrac{-10}{16} = -\frac{5}{8}$

Dus $B_f = [-\frac{5}{8}, \rightarrow\rangle$.

b $O(V) = \displaystyle\int_1^3 \frac{10x + 5}{4x^2 - 4x + 1}\,dx = \int_1^3 \frac{5(2x - 1) + 10}{(2x - 1)^2}\,dx = \int_1^3 \left(\frac{5}{2x - 1} + \frac{10}{(2x - 1)^2}\right) dx =$

$\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{5}{2x - 1} + 10(2x - 1)^{-2}\right) dx = \left[\tfrac{5}{2}\ln|2x - 1| - 5(2x - 1)^{-1}\right]_1^3 = \left[2\tfrac{1}{2}\ln|2x - 1| - \frac{5}{2x - 1}\right]_1^3 =$

$2\frac{1}{2}\ln(5) - \dfrac{5}{5} - \left(2\frac{1}{2}\ln(1) - \dfrac{5}{1}\right) = 2\frac{1}{2}\ln(5) - 1 + 5 = 4 + 2\frac{1}{2}\ln(5)$

60 **a** $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 5x + 4}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 5x + 4) \cdot 2x - (x^2 + 4) \cdot (2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} =$

$\dfrac{2x^3 + 10x^2 + 8x - (2x^3 + 5x^2 + 8x + 20)}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \dfrac{2x^3 + 10x^2 + 8x - 2x^3 - 5x^2 - 8x - 20}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \dfrac{5x^2 - 20}{(x^2 + 5x + 4)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $5x^2 - 20 = 0$

$5x^2 = 20$

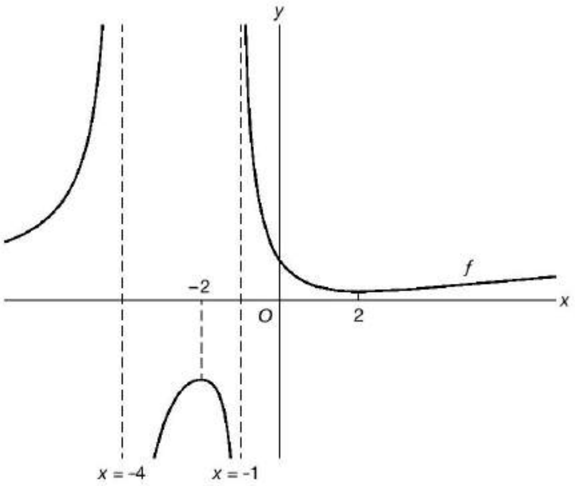
$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x + 1)(x + 4) = 0$

$x = -1 \vee x = -4$



max. is $f(-2) = -4$
min. is $f(2) = \frac{4}{9}$

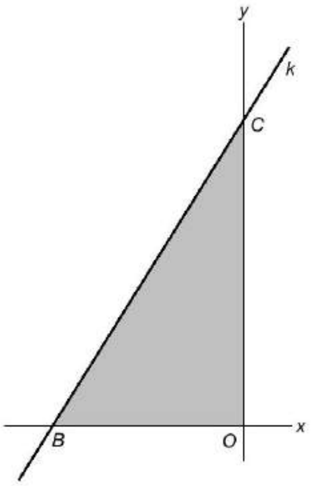
b Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(-6) = \dfrac{160}{100} = 1\frac{3}{5}$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{3}{5}x + b \\ f(-6) = 4, \text{ dus door } A(-6, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{3}{5} \cdot -6 + b = 4 \\ -9\frac{3}{5} + b = 4 \\ b = 13\frac{3}{5} \end{array}$$

Dus k: $y = 1\frac{3}{5}x + 13\frac{3}{5}$.

$y = 0$ geeft $1\frac{3}{5}x + 13\frac{3}{5} = 0$
$8x = -68$
$x = -8\frac{1}{2}$

Dus $B\left(-8\frac{1}{2}, 0\right)$.
$x = 0$ geeft $y = 13\frac{3}{5}$, dus $C\left(0, 13\frac{3}{5}\right)$.



$O(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{2} \cdot 13\frac{3}{5} = 57\frac{4}{5}$

c $x^2 + 5x + 4 \,/\, x^2 \quad + 4 \setminus 1$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2 + 5x + 4} \; - \\ \quad -5x \end{array}$$

$$f(x) = 1 - \frac{5x}{x^2 + 5x + 4} = 1 - \frac{5x}{(x+1)(x+4)} = 1 - \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+4}\right) = 1 - \frac{a(x+4) + b(x+1)}{(x+1)(x+4)}$$

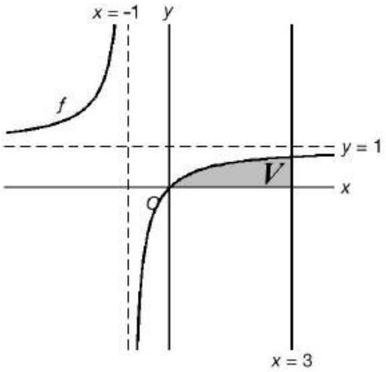
$$= 1 - \frac{ax + 4a + bx + b}{(x+1)(x+4)} = 1 - \frac{(a+b)x + 4a + b}{(x+1)(x+4)}$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \; -$$
$$-3a \quad = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} a = -1\frac{2}{3} \\ a + b = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{2}{3} + b = 5 \\ b = 6\frac{2}{3} \end{array}$$

$$O(V) = \int_0^6 \left(1 - \frac{5x}{x^2 + 5x + 4}\right) dx = \int_0^6 \left(1 + \frac{1\frac{2}{3}}{x+1} - \frac{6\frac{2}{3}}{x+4}\right) dx = \left[x + 1\tfrac{2}{3}\ln|x+1| - 6\tfrac{2}{3}\ln|x+4|\right]_0^6$$
$$= 6 + 1\tfrac{2}{3}\ln(7) - 6\tfrac{2}{3}\ln(10) - (0 + 1\tfrac{2}{3}\ln(1) - 6\tfrac{2}{3}\ln(4)) = 6 + 1\tfrac{2}{3}\ln(7) - 6\tfrac{2}{3}\ln(10) + 6\tfrac{2}{3}\ln(4)$$
$$= 6 + 1\tfrac{2}{3}\ln(7) + 6\tfrac{2}{3}\ln\left(\tfrac{2}{5}\right)$$

61 **a**



$$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$
$$O(V) = \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = [x - \ln|x+1|]_0^3 = 3 - \ln(4) - (0 - \ln(1)) = 3 - \ln(4)$$

b $I(L) = \pi\int_0^3 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx = \pi\int_0^3 \frac{x^2}{(x+1)^2} dx = \pi\int_0^3 \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx = \pi\int_0^3 \left(1 - \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\right) dx$

$$= \pi\int_0^3 \left(1 - \frac{2x+2-1}{x^2+2x+1}\right) dx = \pi\int_0^3 \left(1 - \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \pi\int_0^3 \left(1 - \frac{2}{x+1} + (x+1)^{-2}\right) dx$$
$$= \pi[x - 2\ln|x+1| - (x+1)^{-1}]_0^3 = \pi\left[x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right]_0^3 = \pi\left(3 - 2\ln(4) - \tfrac{1}{4} - (0 - 2\ln(1) - 1)\right)$$
$$= \pi\left(3 - 2\ln(4) - \tfrac{1}{4} + 1\right) = 3\tfrac{3}{4}\pi - 2\pi\ln(4)$$

62 **a** $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{3}{5}$ geeft $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{3}{5}$

$3x^2 + 3 = 10x$

$3x^2 - 10x + 3 = 0$

$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$

$x = \frac{10+8}{6} = 3 \vee x = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$

$f(3) = \ln(10)$ en $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(1\frac{1}{9}\right)$

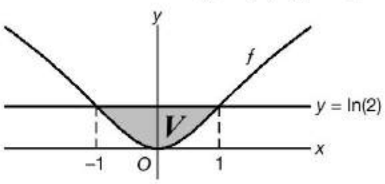
Dus de raakpunten zijn $(3, \ln(10))$ en $\left(\frac{1}{3}, \ln\left(1\frac{1}{9}\right)\right)$.

b $f(x) = \ln(2)$ geeft $\ln(x^2 + 1) = \ln(2)$

$x^2 + 1 = 2$

$x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$



$$\int f(x)\,dx = \int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - \int x\,d\ln(x^2+1) = x\ln(x^2+1) - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\,dx$$
$$= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2+2-2}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx$$
$$= x\ln(x^2+1) - (2x - 2\arctan(x)) + c = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x) + c$$

$$O(V) = \int_{-1}^{1} (\ln(2) - f(x))\,\mathrm{d}x = \left[x\ln(2) - (x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x))\right]_{-1}^{1}$$
$$= \left[x\ln(2) - x\ln(x^2+1) + 2x - 2\arctan(x)\right]_{-1}^{1}$$
$$= \ln(2) - \ln(2) + 2 - 2\arctan(1) - (-\ln(2) + \ln(2) - 2 - 2\arctan(-1)) = 2 - 2\cdot\tfrac{1}{4}\pi + 2 + 2\cdot -\tfrac{1}{4}\pi = 4 - \pi$$

K.5 Integralen bij parameterkrommen

Bladzijde 217

63 **a** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -[F(x)]_b^a = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

b $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) =$

$[F(x)]_a^c = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

64 **a** Bij A hoort $t = 0$, bij B hoort $t = 2$ en bij C hoort $t = 4$, dus

$$O(V) = \int_{x_A}^{x_B} y\,\mathrm{d}x - \int_{x_C}^{x_B} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{t=2} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=4}^{t=2} y\,\mathrm{d}x$$

Herleiden geeft $O(V) = \int_{t=0}^{t=2} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=4}^{t=2} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{t=2} y\,\mathrm{d}x + \int_{t=2}^{t=4} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{t=4} y\,\mathrm{d}x.$

b $O(V) = \int_{t=0}^{t=4} \left(-\tfrac{1}{2}t^2 + 2\right)\mathrm{d}\left(-\tfrac{1}{2}t^2 + 2t\right) = \int_{t=0}^{t=4} \left(-\tfrac{1}{2}t^2 + 2\right)\left(-t + 2\right)\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=4} \left(\tfrac{1}{2}t^3 - t^2 - 2t + 4\right)\mathrm{d}t$

$$= \left[\tfrac{1}{8}t^4 - \tfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 4t\right]_0^4 = \tfrac{1}{8}\cdot 4^4 - \tfrac{1}{3}\cdot 4^3 - 4^2 + 4\cdot 4 - 0 = 32 - 21\tfrac{1}{3} - 16 + 16 = 10\tfrac{2}{3}$$

c $O(V) = \int_{t=4}^{t=0} x\,\mathrm{d}y = \int_{t=4}^{t=0} \left(-\tfrac{1}{2}t^2 + 2t\right)\mathrm{d}\left(-\tfrac{1}{2}t^2 + 2\right) = \int_{t=4}^{t=0} \left(-\tfrac{1}{2}t^2 + 2t\right)\cdot -t\,\mathrm{d}t = \int_{t=4}^{t=0} \left(\tfrac{1}{2}t^3 - 2t^2\right)\mathrm{d}t$

$$= \left[\tfrac{1}{8}t^4 - \tfrac{2}{3}t^3\right]_4^0 = -\tfrac{1}{8}\cdot 0^4 + \tfrac{2}{3}\cdot 0^3 - \left(\tfrac{1}{8}\cdot 4^4 - \tfrac{2}{3}\cdot 4^3\right) = 0 - 32 + 42\tfrac{2}{3} = 10\tfrac{2}{3}$$

Dus hetzelfde antwoord als bij b.

Bladzijde 219

65 **a** $\int_{t=-2}^{t=4} x\,\mathrm{d}y = \int_{t=-2}^{t=4} \left(\tfrac{1}{2}t^2 - 2\right)\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}t^2 - 2t\right) = \int_{-2}^{4} \left(\tfrac{1}{2}t^2 - 2\right)\left(t - 2\right)\mathrm{d}t = \int_{-2}^{4} \left(\tfrac{1}{2}t^3 - t^2 - 2t + 4\right)\mathrm{d}t$

$$= \left[\tfrac{1}{8}t^4 - \tfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 4t\right]_{-2}^4 = \tfrac{1}{8}\cdot 4^4 - \tfrac{1}{3}\cdot 4^3 - 4^2 + 4\cdot 4 - \left(\tfrac{1}{8}\cdot(-2)^4 - \tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3 - (-2)^2 + 4\cdot -2\right)$$

$$= 32 - 21\tfrac{1}{3} - 16 + 16 - \left(2 + 2\tfrac{2}{3} - 4 - 8\right) = 10\tfrac{2}{3} - -7\tfrac{1}{3} = 18$$

Dus $\int_{t=-2}^{t=4} x\,\mathrm{d}y$ geeft ook $O(V)$.

b $I(L) = \pi\int_{t=2}^{t=-2} x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_{t=2}^{t=-2} \left(\tfrac{1}{2}t^2 - 2\right)^2\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}t^2 - 2t\right) = \pi\int_{2}^{-2} \left(\tfrac{1}{2}t^2 - 2\right)^2(t - 2)\,\mathrm{d}t = \pi\int_{2}^{-2} \left(\tfrac{1}{4}t^4 - 2t^2 + 4\right)(t - 2)\,\mathrm{d}t$

$$= \pi\int_{2}^{-2} \left(\tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{1}{2}t^4 - 2t^3 + 4t^2 + 4t - 8\right)\mathrm{d}t = \pi\left[\tfrac{1}{24}t^6 - \tfrac{1}{10}t^5 - \tfrac{1}{2}t^4 + 1\tfrac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 8t\right]_2^{-2}$$

$$= \pi\left(\tfrac{64}{24} + \tfrac{32}{10} - 8 - 10\tfrac{2}{3} - 8 + 16\right) - \pi\left(\tfrac{64}{24} - \tfrac{32}{10} - 8 + 10\tfrac{2}{3} - 8 - 16\right) = \pi\left(2\cdot\tfrac{32}{10} - 2\cdot 10\tfrac{2}{3} + 2\cdot 16\right) = 17\tfrac{1}{15}\pi$$

66 $x = 0$ geeft $t^2 - 2t = 0$

$t(t-2) = 0$

$t = 0 \vee t = 2$

$t = 0$ geeft $(0, 0)$

$t = 2$ geeft $(0, 6)$

$$O(V) = \int_{t=2}^{t=0} x\,\mathrm{d}y = \int_{t=2}^{t=0} (t^2 - 2t)\,\mathrm{d}(t^3 - t) = \int_2^0 (t^2 - 2t)(3t^2 - 1)\,\mathrm{d}t = \int_2^0 (3t^4 - 6t^3 - t^2 + 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\tfrac{3}{5}t^5 - 1\tfrac{1}{2}t^4 - \tfrac{1}{3}t^3 + t^2\right]_2^0 = 0 - \left(\tfrac{3}{5}\cdot 2^5 - 1\tfrac{1}{2}\cdot 2^4 - \tfrac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2\right)$$

$$= 0 - \left(19\tfrac{1}{5} - 24 - 2\tfrac{2}{3} + 4\right) = 3\tfrac{7}{15}$$

67 **a** $x = 0$ geeft $\sin(t) = 0$

$t = k \cdot \pi$

$t = -\pi$ geeft $(0, -\pi)$

$t = 0$ geeft $(0, 0)$

$t = \pi$ geeft $(0, \pi)$

$$O(V) = \int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{t=\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}(t + \sin(t)) = \int_0^{\pi} \sin(t)(1 + \cos(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\sin(t) + \sin(t)\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\sin(t) + \tfrac{1}{2}\sin(2t)\right)\mathrm{d}t = \left[-\cos(t) - \tfrac{1}{4}\cos(2t)\right]_0^{\pi} = \left(-\cos(\pi) - \tfrac{1}{4}\cos(2\pi)\right) - \left(-\cos(0) - \tfrac{1}{4}\cos(0)\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{4}\cdot 1 - \left(-1 - \tfrac{1}{4}\cdot 1\right) = 1 - \tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{1}{4} = 2$$

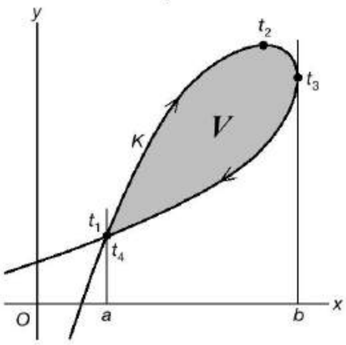
b $$I(L) = \pi\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_{t=0}^{t=\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}(t + \sin(t)) = \pi\int_0^{\pi} \sin^2(t)(1 + \cos(t))\,\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{\pi} (\sin^2(t) + \sin^2(t)\cos(t))\,\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\pi} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2t) + \sin^2(t)\cos(t)\right)\mathrm{d}t = \pi\left[\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\sin(2t) + \tfrac{1}{3}\sin^3(t)\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}\sin(2\pi) + \tfrac{1}{3}\sin^3(\pi) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 0 - \tfrac{1}{4}\sin(0) + \tfrac{1}{3}\sin^3(0)\right)\right) = \pi\left(\tfrac{1}{2}\pi - 0 + 0 - (0 - 0 + 0)\right) = \tfrac{1}{2}\pi^2$$

Bladzijde 220

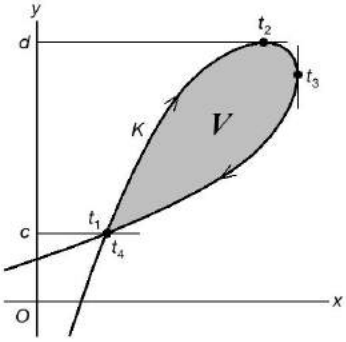
68 **a** Teken de lijnen $x = a$ door het punt waar K zichzelf snijdt en de lijn $x = b$ die K raakt in het punt waarvoor $t = t_3$.



Noem V_1 het vlakdeel ingesloten door de x-as, de lijnen $x = a$ en $x = b$ en het bovenste deel van K en V_2 het vlakdeel ingesloten door de x-as, de lijnen $x = a$ en $x = b$ en het onderste deel van K.

Dan geldt $O(V) = O(V_1) - O(V_2) = \int_{t=t_1}^{t=t_3} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=t_4}^{t=t_3} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=t_1}^{t=t_3} y\,\mathrm{d}x + \int_{t=t_3}^{t=t_4} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=t_1}^{t=t_4} y\,\mathrm{d}x.$

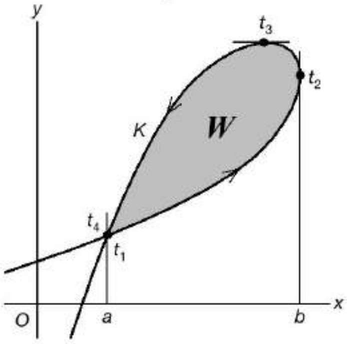
b Teken de lijnen $y = c$ door het punt waar K zichzelf snijdt en de lijn $y = d$ die K raakt in het punt waarvoor $t = t_2$.



Noem V_3 het vlakdeel ingesloten door de y-as, de lijnen $y = c$ en $y = d$ en het rechter deel van K en V_4 het vlakdeel ingesloten door de y-as, de lijnen $y = c$ en $y = d$ en het linker deel van K.

Dan geldt $O(V) = O(V_3) - O(V_4) = \int_{t=t_4}^{t=t_2} x\,dy - \int_{t=t_1}^{t=t_2} x\,dy = \int_{t=t_4}^{t=t_2} x\,dy + \int_{t=t_2}^{t=t_1} x\,dy = \int_{t=t_4}^{t=t_1} x\,dy.$

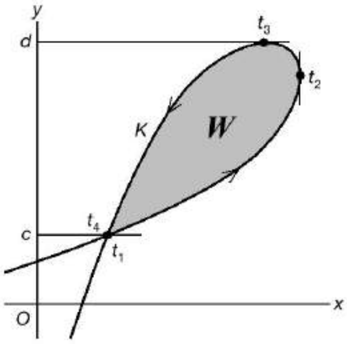
c Teken de lijnen $x = a$ door het punt waar K zichzelf snijdt en de lijn $x = b$ die K raakt in het punt waarvoor $t = t_2$.



Noem W_1 het vlakdeel ingesloten door de x-as, de lijnen $x = a$ en $x = b$ en het bovenste deel van K en W_2 het vlakdeel ingesloten door de x-as, de lijnen $x = a$ en $x = b$ en het onderste deel van K.

Dan geldt $O(W) = O(W_1) - O(W_2) = \int_{t=t_4}^{t=t_2} y\,dx - \int_{t=t_1}^{t=t_2} y\,dx = \int_{t=t_4}^{t=t_2} y\,dx + \int_{t=t_2}^{t=t_1} y\,dx = \int_{t=t_4}^{t=t_1} y\,dx.$

Teken de lijnen $y = c$ door het punt waar K zichzelf snijdt en de lijn $y = d$ die K raakt in het punt waarvoor $t = t_2$.



Noem W_3 het vlakdeel ingesloten door de y-as, de lijnen $y = c$ en $y = d$ en het rechter deel van K en W_4 het vlakdeel ingesloten door de y-as, de lijnen $y = c$ en $y = d$ en het linker deel van K.

Dan geldt $O(W) = O(W_3) - O(W_4) = \int_{t=t_1}^{t=t_3} x\,dy - \int_{t=t_4}^{t=t_3} x\,dy = \int_{t=t_1}^{t=t_3} x\,dy + \int_{t=t_3}^{t=t_4} x\,dy = \int_{t=t_1}^{t=t_4} x\,dy.$

Bladzijde 221

69 **a** $y = 0$ geeft $4t - t^3 = 0$

$t(4 - t^2) = 0$

$t = 0 \vee t^2 = 4$

$t = 0 \vee t = 2 \vee t = -2$

$t = -2$ geeft $(3, 0)$

$t = 0$ geeft $(-1, 0)$

$t = 2$ geeft $(3, 0)$

$t = 1$ geeft $(0, 3)$, dus K wordt in negatieve richting omlopen.

$$O(V) = \int_{t=-2}^{t=2} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=-2}^{t=2} (4t - t^3)\,\mathrm{d}(t^2 - 1) = \int_{-2}^{2} (4t - t^3) \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} (8t^2 - 2t^4)\,\mathrm{d}t = \left[2\tfrac{2}{3}t^3 - \tfrac{2}{5}t^5\right]_{-2}^{2}$$

$$= 2\tfrac{2}{3} \cdot 2^3 - \tfrac{2}{5} \cdot 2^5 - \left(2\tfrac{2}{3} \cdot (-2)^3 - \tfrac{2}{5} \cdot (-2)^5\right) = 2\tfrac{2}{3} \cdot 8 - \tfrac{2}{5} \cdot 32 - 2\tfrac{2}{3} \cdot -8 + \tfrac{2}{5} \cdot -32 = 17\tfrac{1}{15}$$

b $$I(L) = \pi \int_{t=0}^{t=2} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{t=0}^{t=2} (4t - t^3)^2\,\mathrm{d}(t^2 - 1) = \pi \int_{0}^{2} (4t - t^3)^2 \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \pi \int_{0}^{2} (16t^2 - 8t^4 + t^6) \cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

$$= \pi \int_{0}^{2} (32t^3 - 16t^5 + 2t^7)\,\mathrm{d}t = \pi\left[8t^4 - 2\tfrac{2}{3}t^6 + \tfrac{1}{4}t^8\right]_0^2$$

$$= \pi\left(8 \cdot 2^4 - 2\tfrac{2}{3} \cdot 2^6 + \tfrac{1}{4} \cdot 2^8\right) - \pi(0 - 0 + 0) = 21\tfrac{1}{3}\pi$$

Bladzijde 222

70 $x = 0$ geeft $-t^2 + 6t = 0$

$-t(t - 6) = 0$

$t = 0 \vee t = 6$

$t = 0$ geeft $(0, 0)$

$t = 6$ geeft $(0, 0)$

$t = 1$ geeft $\left(5, 1\tfrac{2}{3}\right)$

Dus K wordt in positieve richting omlopen.

$$O(V) = \int_{t=6}^{t=0} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=6}^{t=0} \left(-\tfrac{1}{3}t^3 + 2t^2\right)\mathrm{d}(-t^2 + 6t) = \int_{6}^{0} \left(-\tfrac{1}{3}t^3 + 2t^2\right)(-2t + 6)\,\mathrm{d}t = \int_{6}^{0} \left(\tfrac{2}{3}t^4 - 6t^3 + 12t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left[\tfrac{2}{15}t^5 - 1\tfrac{1}{2}t^4 + 4t^3\right]_6^0 = 0 - \left(\tfrac{2}{15} \cdot 6^5 - 1\tfrac{1}{2} \cdot 6^4 + 4 \cdot 6^3\right) = 43\tfrac{1}{5}$$

71 **a** $y = 0$ geeft $\sin(2t) = 0$

$2t = k \cdot \pi$

$t = k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$

$t = 0$ geeft $(0, 0)$

$t = \tfrac{1}{2}\pi$ geeft $(2, 0)$

$t = \tfrac{1}{6}\pi$ geeft $\left(1, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

Noem V het deel van K boven de x-as en rechts van de y-as.

$$O(V) = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} \sin(2t)\,\mathrm{d}\,2\sin(t) = \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin(2t) \cdot 2\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} 2\sin(t)\cos(t) \cdot 2\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} 4\sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} -4\cos^2(t)\,\mathrm{d}\cos(t) = \int_{u=1}^{u=0} -4u^2\,\mathrm{d}u = \left[-1\tfrac{1}{3}u^3\right]_1^0 = 0 - -1\tfrac{1}{3} \cdot 1^3 = 1\tfrac{1}{3}$$

Dus de oppervlakte van de twee vlakdelen samen is $4 \cdot 1\tfrac{1}{3} = 5\tfrac{1}{3}$.

b $$I(L) = 2 \cdot \pi \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} y^2\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} \sin^2(2t)\,\mathrm{d}\,2\sin(t) = 2\pi \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} (2\sin(t)\cos(t))^2 \cdot 2\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} 4\sin^2(t)\cos^2(t) \cdot 2\cos(t)\,\mathrm{d}t = 16\pi \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} \sin^2(t)(1 - \sin^2(t))\,\mathrm{d}\sin(t) = 16\pi \int_{u=0}^{u=1} u^2(1 - u^2)\,\mathrm{d}u$$

$$= 16\pi \int_{u=0}^{u=1} (u^2 - u^4)\,\mathrm{d}u = 16\pi\left[\tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5\right]_0^1 = 16\pi\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) - 16\pi(0 - 0) = 2\tfrac{2}{15}\pi$$

72 **a** $x = 0$ geeft $2\sin(t) = 0$

$t = k \cdot \pi$

$t = -\pi$ geeft $\left(0, \frac{1}{2}\pi^2\right)$

$t = 0$ geeft $(0, 0)$

$t = \pi$ geeft $\left(0, \frac{1}{2}\pi^2\right)$

K is symmetrisch ten opzichte van de y-as, want

$x(-t) = 2\sin(-t) = -2\sin(t) = -x(t)$ en $y(-t) = \frac{1}{2}(-t)^2 = \frac{1}{2}t^2 = y(t)$.

$$O(V) = 2 \cdot \int_{t=0}^{t=\pi} x \, \mathrm{d}y = 2 \cdot \int_{t=0}^{t=\pi} 2\sin(t) \, \mathrm{d}\tfrac{1}{2}t^2 = 2 \cdot \int_0^{\pi} 2\sin(t) \cdot t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 4t\sin(t) \, \mathrm{d}t$$

$$= [4t \cdot -\cos(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4 \cdot -\cos(t) \, \mathrm{d}t = [-4t\cos(t)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 4\cos(t) \, \mathrm{d}t$$

$$= [-4t\cos(t)]_0^{\pi} + [4\sin(t)]_0^{\pi} = -4\pi \cdot -1 + 0 - (0 - 0) = 4\pi$$

b $$I(L) = \pi \int_{t=0}^{t=\pi} x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_{t=0}^{t=\pi} 4\sin^2(t) \, \mathrm{d}\tfrac{1}{2}t^2 = \pi \int_0^{\pi} 4\sin^2(t) \cdot t \, \mathrm{d}t = \pi \int_0^{\pi} 4t\sin^2(t) \, \mathrm{d}t$$

$$= \pi \int_0^{\pi} 4t\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2t)\right) \mathrm{d}t = \pi \int_0^{\pi} (2t - 2t\cos(2t)) \, \mathrm{d}t = \pi \int_0^{\pi} 2t \, \mathrm{d}t - \pi \int_0^{\pi} 2t\cos(2t) \, \mathrm{d}t$$

$$= \pi[t^2]_0^{\pi} - \pi\left[2t \cdot \tfrac{1}{2}\sin(2t)\right]_{\pi}^{0} - \pi \int_0^{\pi} 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sin(2t) \, \mathrm{d}t = \pi(\pi^2 - 0) - \pi[t\sin(2t)]_0^{\pi} - \pi \int_0^{\pi} \sin(2t) \, \mathrm{d}t$$

$$= \pi^3 - \pi(0 - 0) + \pi\left[\tfrac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi} = \pi^3 - \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \pi^3$$

Diagnostische toets

Bladzijde 224

1 **a** $F(x) = \int 3x^2(x^3 + 2)^4 \, \mathrm{d}x = \int (x^3 + 2)^4 \, \mathrm{d}(x^3 + 2) = \int u^4 \, \mathrm{d}u = \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{5}(x^3 + 2)^5 + c$

b $F(x) = \int 3x\sqrt{x^2 + 2} \, \mathrm{d}x = \int 1\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + 2} \, \mathrm{d}(x^2 + 2) = \int 1\frac{1}{2}\sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \int 1\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}u = u^{1\frac{1}{2}} + c$

$= u\sqrt{u} + c = (x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2} + c$

c $F(x) = \int \cos(x) \cdot (1 + \sin^3(x)) \, \mathrm{d}x = \int (1 + \sin^3(x)) \, \mathrm{d}\sin(x) = \int (1 + u^3) \, \mathrm{d}u = u + \frac{1}{4}u^4 + c = \sin(x) + \frac{1}{4}\sin^4(x) + c$

d $F(x) = \int 3x^2\cos(x^3 + 2) \, \mathrm{d}x = \int \cos(x^3 + 2) \, \mathrm{d}(x^3 + 2) = \int \cos(u) \, \mathrm{d}u = \sin(u) + c = \sin(x^3 + 2) + c$

e $F(x) = \int \frac{6}{(2x - 1)^3} \, \mathrm{d}x = \int 6(2x - 1)^{-3} \, \mathrm{d}x = \frac{6}{-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x - 1)^{-2} + c = -\frac{3}{2(2x - 1)^2} + c$

f $F(x) = \int (4x + 6)\ln(x^2 + 3x) \, \mathrm{d}x = \int 2\ln(x^2 + 3x) \, \mathrm{d}(x^2 + 3x) = \int 2\ln(u) \, \mathrm{d}u = 2(u\ln(u) - u) + c$

$= 2(x^2 + 3x)\ln(x^2 + 3x) - 2(x^2 + 3x) + c$

2 **a** $\int_1^{e} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} \, \mathrm{d}x = \int_{x=1}^{x=e} \sqrt{\ln(x)} \, \mathrm{d}\ln(x) = \int_0^1 \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{1\frac{1}{2}} u^{1\frac{1}{2}}\right]_1^0 = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

b $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\sin^3(x) \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} \sin^3(x) \, \mathrm{d}\sin(x) = \int_0^1 u^3 \, \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

c $\int_1^3 \frac{6x}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x = \int_{x=1}^{x=3} 3 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}(x^2 + 1) = \int_2^{10} 3 \cdot \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u = [3\ln|u|]_2^{10} = 3\ln(10) - 3\ln(2) = 3\ln(5)$

3 $\sqrt{x + 1} = u$ geeft $x = u^2 - 1$

$$\int_0^3 x^2\sqrt{x + 1} \, \mathrm{d}x = \int_{u=1}^{u=2} (u^2 - 1)^2 \cdot u \, \mathrm{d}(u^2 - 1) = \int_1^2 (u^4 - 2u^2 + 1) \cdot u \cdot 2u \, \mathrm{d}u = \int_1^2 (2u^6 - 4u^4 + 2u^2) \, \mathrm{d}u$$

$$= \left[\tfrac{2}{7}u^7 - \tfrac{4}{5}u^5 + \tfrac{2}{3}u^3\right]_1^2 = \tfrac{2}{7} \cdot 128 - \tfrac{4}{5} \cdot 32 + \tfrac{2}{3} \cdot 8 - \left(\tfrac{2}{7} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{2}{3}\right) = 16\tfrac{32}{105} - \tfrac{16}{105} = 16\tfrac{16}{105}$$

4 **a** $F(x) = \int 4x\sin(2x)\,dx = \int 4x\,d\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) = -2x\cos(2x) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)\,d\,4x$

$= -2x\cos(2x) + \int 2\cos(2x)\,dx = -2x\cos(2x) + \sin(2x) + c$

b $G(x) = \int (2x+3)e^x\,dx = \int (2x+3)\,de^x = (2x+3)e^x - \int e^x\,d(2x+3) = (2x+3)e^x - \int 2e^x\,dx$

$= (2x+3)e^x - 2e^x + c = (2x+1)e^x + c$

c $H(x) = \int x^2\ln(x)\,dx = \int \ln(x)\,d\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3\,d\ln(x)$

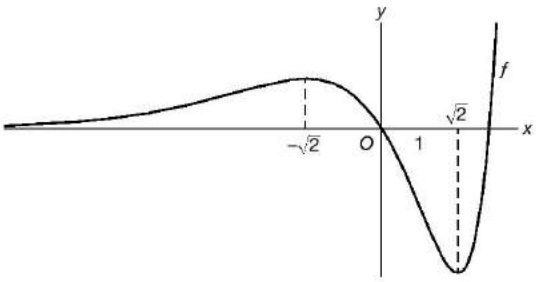
$= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + c$

5 **a** $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ geeft $f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x = (x^2-2)e^x$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2$

$x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$



max. is $f\left(-\sqrt{2}\right) = \left(2 + 2\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}$

min. is $f\left(\sqrt{2}\right) = \left(2 - 2\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}}$

b $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0 \vee x = 2$

$O(V) = \int_0^2 -f(x)\,dx = -\int_0^2 (x^2-2x)e^x\,dx = -\int_{x=0}^{x=2} (x^2-2x)\,de^x = -\left[(x^2-2x)e^x\right]_0^2 + \int_{x=0}^{x=2} e^x\,d(x^2-2x)$

$= \left[(-x^2+2x)e^x\right]_0^2 + \int_0^2 (2x-2)e^x\,dx = \left[(-x^2+2x)e^x\right]_0^2 + \int_{x=0}^{x=2} (2x-2)\,de^x$

$= \left[(-x^2+2x)e^x\right]_0^2 + \left[(2x-2)e^x\right]_0^2 - \int_{x=0}^{x=2} e^x\,d(2x-2) = \left[(-x^2+4x-2)e^x\right]_0^2 \int_0^2 2e^x\,dx$

$= \left[(-x^2+4x-2)e^x\right]_0^2 - \left[2e^x\right]_0^2 = \left[(-x^2+4x-4)e^x\right]_0^2 = 0 - -4 = 4$

6 **a** $F(x) = \int 4x^2 \cdot \sin(2x)\,dx = \int 4x^2\,d\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) = -2x^2\cos(2x) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)\,d\,4x^2$

$= -2x^2\cos(2x) + \int 4x\cos(2x)\,dx = -2x^2\cos(2x) + \int 4x\,d\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)$

$= -2x^2\cos(2x) + 2x\sin(2x) - \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,d\,4x = -2x^2\cos(2x) + 2x\sin(2x) - \int 2\sin(2x)\,dx$

$= -2x^2\cos(2x) + 2x\sin(2x) + \cos(2x) + c$

b $G(x) = \int (x^2-x+2)e^x\,dx = \int (x^2-x+2)\,de^x = (x^2-x+2)e^x - \int e^x\,d(x^2-x+2)$

$= (x^2-x+2)e^x - \int (2x-1)e^x\,dx = (x^2-x+2)e^x - \int (2x-1)\,de^x$

$= (x^2-x+2)e^x - (2x-1)e^x + \int e^x\,d(2x-1) = (x^2-3x+3)e^x + \int 2e^x\,dx$

$= (x^2-3x+3)e^x + 2e^x + c = (x^2-3x+5)e^x + c$

c $\int e^x\sin(2x)\,dx = \int \sin(2x)\,de^x = e^x\sin(2x) - \int e^x\,d\sin(2x) = e^x\sin(2x) - \int 2\cos(2x)\cdot e^x\,dx$

$= e^x\sin(2x) - \int 2\cos(2x)\,de^x = e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x) + \int 2e^x\,d\cos(2x)$

$= e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x) - \int 4e^x\sin(2x)\,dx$

Dus $\int e^x\sin(2x)\,dx = e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x) - 4\int e^x\sin(2x)\,dx$

$5\int e^x\sin(2x)\,dx = e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x)$

$\int e^x\sin(2x)\,dx = \frac{1}{5}e^x\sin(2x) - \frac{2}{5}e^x\cos(2x)$

Dus de primitieven zijn $H(x) = \frac{1}{5}e^x(\sin(2x) - 2\cos(2x)) + c$.

7 **a** $\int_{-1}^{1}\frac{2}{x^2+1}\,dx = \left[2\arctan(x)\right]_{-1}^{1} = 2\arctan(1) - 2\arctan(-1) = 2\cdot\frac{1}{4}\pi - 2\cdot -\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi$

b $\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{4}{x^2+4}\,dx = \int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{\frac{1}{4}x^2+1}\,dx = \int_{x=0}^{x=2\sqrt{3}} 2\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1}\,d\tfrac{1}{2}x = \left[2\arctan\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right]_0^{2\sqrt{3}}$

$= 2\arctan\left(\sqrt{3}\right) - 2\arctan(0) = 2\cdot\frac{1}{3}\pi - 0 = \frac{2}{3}\pi$

c $\int_1^2\frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \int_1^2\frac{1}{x^2-2x+1+1}\,dx = \int_1^2\frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = \int_{x=1}^{x=2}\frac{1}{(x-1)^2+1}\,d(x-1)$

$= \left[\arctan(x-1)\right]_1^2 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{1}{4}\pi$

d $\int_{-1}^{1}\frac{3x^2}{x^6+1}dx = \int_{x=-1}^{x=1}\frac{1}{(x^3)^2+1}\,dx^3 = \left[\arctan(x^3)\right]_{-1}^{1} = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{1}{4}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi$

e $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+1}\,dx = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{\sin^2(x)+1}\,d\sin(x) = \left[\arctan(\sin(x))\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{1}{4}\pi$

f $\int_0^1\frac{\arctan^2(x)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1\arctan^2(x)\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\arctan^2(x)\,d\arctan(x) = \left[\frac{1}{3}\arctan^3(x)\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}\arctan^3(1) - \frac{1}{3}\arctan^3(0) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\pi\right)^3 - 0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64}\pi^3 = \frac{1}{192}\pi^3$

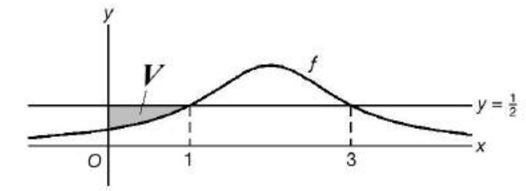
8 **a** $f(x) = \frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{x^2-4x+5} = \frac{1}{2}$

$x^2-4x+5 = 2$

$x^2-4x+3 = 0$

$(x-1)(x-3) = 0$

$x = 1 \vee x = 3$



$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1\frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \int_0^1\frac{1}{x^2-4x+4+1}\,dx = \int_0^1\frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\frac{1}{(x-2)^2+1}\,d(x-2)$

$= \left[\arctan(x-2)\right]_0^1 = \arctan(-1) - \arctan(-2) = -\frac{1}{4}\pi + \arctan(2)$

$O(V) = \frac{1}{2}\cdot 1 - \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\pi + \arctan(2)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi - \arctan(2)$

b $\int_2^p f(x)\,dx = \left[\arctan(x-2)\right]_2^p = \arctan(p-2) - \arctan(0) = \arctan(p-2)$

$O(W) = \frac{1}{3}\pi$ geeft $\arctan(p-2) = \frac{1}{3}\pi$

$p - 2 = \sqrt{3}$

$p = 2 + \sqrt{3}$

Bladzijde 225

9 **a** $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\arcsin(2x) + c$

b $G(x) = \int \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x^5)^2}}\,\mathrm{d}(x^5) = \arcsin(x^5) + c$

c $H(x) = \int \frac{\arcsin^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \arcsin^2(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \arcsin^2(x)\,\mathrm{d}\arcsin(x) = \frac{1}{3}\arcsin^3(x) + c$

10 **a** $x + 4 / 3x + \ \ 4 \setminus 3$

$\underline{3x + 12} -$

-8

$$\int_{-1}^{1} \frac{3x+4}{x+4}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(3 - \frac{8}{x+4}\right)\mathrm{d}x = \left[3x - 8\ln|x+4|\right]_{-1}^{1}$$

$$= 3 - 8\ln(5) - (-3 - 8\ln(3)) = 6 - 8\ln(5) + 8\ln(3) = 6 + 8\ln\left(\tfrac{3}{5}\right)$$

b $2x - 3 / x^2 - \ \ 2x + 4 \setminus \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$\underline{x^2 - 1\frac{1}{2}x} -$

$-\frac{1}{2}x + 4$

$\underline{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}} -$

$3\frac{1}{4}$

$$\int_{2}^{3} \frac{x^2 - 2x + 4}{2x - 3}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{3} \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4} + \frac{3\frac{1}{4}}{2x-3}\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{13}{8}\ln|2x-3|\right]_{2}^{3}$$

$$= \tfrac{9}{4} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{13}{8}\ln(3) - \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{13}{8}\ln(1)\right) = 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{13}{8}\ln(3) - \tfrac{1}{2} = 1 + 1\tfrac{5}{8}\ln(3)$$

c $x + 1 / x^3 \qquad - x + 1 \setminus x^2 - x$

$\underline{x^3 + x^2} -$

$-x^2 - x + 1$

$\underline{-x^2 - x} -$

1

$$\int_{1}^{3} \frac{x^3 - x + 1}{x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} \left(x^2 - x + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \ln|x+1|\right]_{1}^{3}$$

$$= 9 - 4\tfrac{1}{2} + \ln(4) - \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \ln(2)\right) = 4\tfrac{2}{3} + \ln(4) - \ln(2) = 4\tfrac{2}{3} + \ln(2)$$

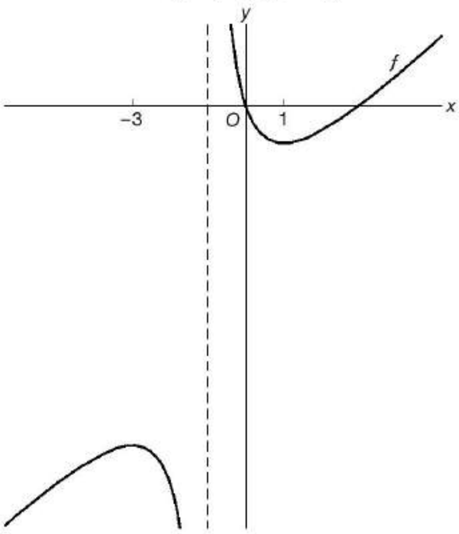
11 **a** $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ geeft

$f'(x) = \frac{(x+1)(2x-3) - (x^2 - 3x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 3x + 2x - 3 - x^2 + 3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x - 1)(x + 3) = 0$

$x = 1 \vee x = -3$



max. is $f(-3) = -9$
min. is $f(1) = -1$

b $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0 \vee x = 3$

$$\begin{array}{l} x + 1 / x^2 - 3x \quad \backslash x - 4 \\ \quad \underline{x^2 + \ \ x} \ - \\ \quad\quad -4x \\ \quad\quad \underline{-4x - 4} \ - \\ \quad\quad\quad\quad 4 \end{array}$$

$$O(V) = -\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^3 \left(x - 4 + \frac{4}{x+1}\right)\mathrm{d}x = -\left[\tfrac{1}{2}x^2 - 4x + 4\ln|x+1|\right]_0^3$$

$$= -\left(4\tfrac{1}{2} - 12 + 4\ln(4)\right) + (0 - 0 + 4\ln(1)) = 7\tfrac{1}{2} - 4\ln(4)$$

12 **a** $x^2 + 1 / x^2 - 4x \quad \backslash 1$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2 \quad\quad + 1} \ - \\ \quad -4x - 1 \end{array}$$

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{-4x - 1}{x^2 + 1}\right)\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{4x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}\right)\mathrm{d}x = x - 2\ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + c$$

b $x^2 - 4x + 4 / x^2 + 4x \quad \backslash 1$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2 - 4x + 4} \ - \\ \quad\quad 8x - 4 \end{array}$$

$$G(x) = \int \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{8x - 4}{x^2 - 4x + 4}\right)\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{8(x-2) + 12}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(1 + \frac{8}{x-2} + \frac{12}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{8}{x-2} + 12(x-2)^{-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= x + 8\ln|x-2| - 12(x-2)^{-1} + c = x + 8\ln|x-2| - \frac{12}{x-2} + c$$

c $h(x) = \dfrac{6}{x^2 - 1} = \dfrac{6}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{ax + a + bx - b}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x + a - b}{(x-1)(x+1)}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \underline{a - b = 6} \ + \end{cases}$$

$2a \quad = 6$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ a + b = 0 \end{array}\right\} b = -3$$

Dus $h(x) = \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{3}{x+1}$ en dit geeft $H(x) = 3\ln|x-1| - 3\ln|x+1| + c$.

13 **a** $\dfrac{3x+2}{x^2+4x+3} = \dfrac{3x+2}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+3} = \dfrac{a(x+3)+b(x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$= \dfrac{ax+3a+bx+b}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{(a+b)x+3a+b}{(x+1)(x+3)}$

$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=2 \end{cases} -$

$-2a \quad = 1$

$\left.\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ a+b=3 \end{array}\right\} -\frac{1}{2} + B = 3$

$B = 3\frac{1}{2}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+4x+3}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{3\frac{1}{2}}{x+3}\right)dx = \left[-\tfrac{1}{2}\ln|x+1| + 3\tfrac{1}{2}\ln|x+3|\right]_0^1$

$= -\frac{1}{2}\ln(2) + 3\frac{1}{2}\ln(4) - \left(-\frac{1}{2}\ln(1) + 3\frac{1}{2}\ln(3)\right) = -\frac{1}{2}\ln(2) + 3\frac{1}{2}\ln(2^2) - 3\frac{1}{2}\ln(3)$

$= -\frac{1}{2}\ln(2) + 7\ln(2) - 3\frac{1}{2}\ln(3) = 6\frac{1}{2}\ln(2) - 3\frac{1}{2}\ln(3)$

b $\displaystyle\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2-6x+10}\,dx = \int_3^4 \frac{2x-6+9}{x^2-6x+10}\,dx = \int_3^4 \left(\frac{2x-6}{x^2-6x+10} + \frac{9}{(x-3)^2+1}\right)dx$

$= \left[\ln|x^2-6x+10| + 9\arctan(x-3)\right]_3^4$

$= \ln(2) + 9\arctan(1) - (\ln(1) + 9\arctan(0)) = \ln(2) + 9 \cdot \frac{1}{4}\pi = 2\frac{1}{4}\pi + \ln(2)$

c $x^2+9 \,/\, x^4 \qquad \backslash\, x^2-9$

$x^4 + 9x^2$

$-9x^2 \; -$

$-9x^2 - 81$

$81 \; -$

$\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4}{x^2+9}\,dx = \int_0^3 \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9}\right)dx = \int_0^3 \left(x^2 - 9 + \frac{9}{\frac{1}{9}x^2+1}\right)dx = \int_0^3 \left(x^2 - 9 + 9 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{3}x)^2+1}\right)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 9x + 9 \cdot 3\arctan\left(\frac{1}{3}x\right)\right]_0^3 = 9 - 27 + 27\arctan(1) - (0 - 0 + 27\arctan(0))$

$= -18 + 27 \cdot \frac{1}{4}\pi = 6\frac{3}{4}\pi - 18$

14 **a** $x(t) = 0$ geeft $4t - t^2 = 0$

$t(4-t) = 0$

$t = 0 \vee t = 4$

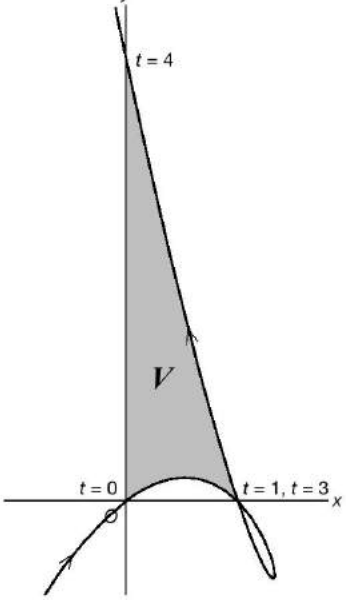
$y(t) = 0$ geeft $t^3 - 4t^2 + 3t = 0$

$t(t^2 - 4t + 3) = 0$

$t(t-1)(t-3) = 0$

$t = 0 \vee t = 1 \vee t = 3$

$t = 0$ geeft $(0, 0)$



$$O(V) = \int_{t=4}^{t=3} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=0}^{t=1} y\,\mathrm{d}x$$

$$\int y\,\mathrm{d}x = \int (t^3 - 4t^2 + 3t)\,\mathrm{d}(4t - t^2) = \int (t^3 - 4t^2 + 3t)(4 - 2t)\,\mathrm{d}t = \int (-2t^4 + 12t^3 - 22t^2 + 12t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\tfrac{2}{5}t^5 + 3t^4 - \tfrac{22}{3}t^3 + 6t^2 + c$$

$$O(V) = \left[-\tfrac{2}{5}t^5 + 3t^4 - \tfrac{22}{3}t^3 + 6t^2\right]_4^3 - \left[-\tfrac{2}{5}t^5 + 3t^4 - \tfrac{22}{3}t^3 + 6t^2\right]_0^1 = 1\tfrac{4}{5} - -14\tfrac{14}{15} - \left(1\tfrac{4}{15} - 0\right) = 15\tfrac{7}{15}$$

b $O(W) = \int_{t=3}^{t=1} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=3}^{t=1} (t^3 - 4t^2 + 3t)\,\mathrm{d}(4t - t^2) = \left[-\tfrac{2}{5}t^5 + 3t^4 - \tfrac{22}{3}t^3 + 6t^2\right]_3^1 = 1\tfrac{4}{5} - 1\tfrac{4}{15} = \tfrac{8}{15}$

c $I(L) = \pi \int_{t=0}^{t=1} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{t=0}^{t=1} (t^3 - 4t^2 + 3t)^2\,\mathrm{d}(4t - t^2) = \pi \int_0^1 (t^3 - 4t^2 + 3t)^2(4 - 2t)\,\mathrm{d}t$

De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ geeft $I(L) \approx 2{,}01$.

Wiskunde Olympiade

2012

Bladzijde 228

A-vragen

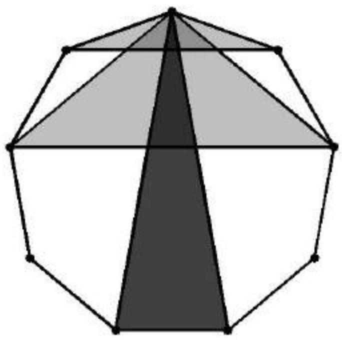
1 Bekijk het linker plaatje. Op de plaats van het sterretje moet een getal staan waar 27 en 6 beide deelbaar door zijn. Dit geeft twee mogelijkheden: 1 of 3. De eerste mogelijkheid valt af, want dan zou op de plek van de dubbele ster het getal 27 staan, terwijl 36 hier niet door deelbaar is. Met de tweede mogelijkheid kunnen we de hele tabel stap voor stap invullen (zie het rechter plaatje). We zien dat 12 het grootste getal is dat tweemaal voorkomt.
Dus D is het goede antwoord.

×		**		7
	24			56
		36	8	
*		27	6	
6	18			42

×	3	9	2	7
8	24	72	16	56
4	12	36	8	28
3	9	27	6	21
6	18	54	12	42

2 Een palindroomgetal van vijf cijfers wordt precies bepaald door de eerste drie cijfers: het laatste cijfer is dan gelijk aan het eerste cijfer en het vierde cijfer is gelijk aan het tweede cijfer. De eerste twaalf 5-cijferige palindroomgetallen zijn dus **100**01, **101**01, **102**01, … , **109**01, **110**11, **111**11.
Het twaalfde getal is dus 11111.
Dus A is het goede antwoord.

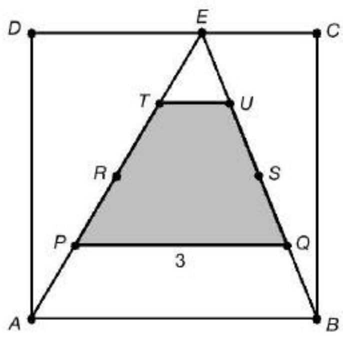
3 We tellen eerst het aantal gelijkzijdige driehoeken: daarvan zijn er drie. Vervolgens tellen we de gelijkbenige driehoeken die niet gelijkzijdig zijn. Voor zo'n driehoek zijn er negen mogelijkheden voor de 'top'. Daarna zijn er drie mogelijkheden voor de 'basis'. Dit geeft $9 \times 3 = 27$ mogelijkheden.
In totaal zijn er dus $3 + 27 = 30$ gelijkbenige driehoeken.
Dus B is het goede antwoord.



4 Verschillende letters kunnen bij hetzelfde hoekpunt van de dipiramide horen.
De vijf hoekpunten zijn $G = F = J$, $K = M$, H, I en L. De punten H en I hebben vier buren, dus dat zijn hoekpunten van de grijze driehoek. Het punt $K = M$ heeft ook vier buren: I, H, L en $G = F = J$, dat is dus het laatste hoekpunt van de grijze driehoek.
Dus B is het goede antwoord.

5 Het aantal blauwe sokken in de la noemen we b. Om zeker te weten dat hij twee blauwe sokken heeft, moet Frank 12 sokken pakken. In het slechtste geval pakt hij namelijk eerst de tien rode sokken. Om zeker te weten dat hij twee rode sokken heeft, moet hij $b + 2$ sokken pakken. In het slechtste geval pakt hij namelijk eerst de b blauwe sokken. Gegeven is dat dit tweede aantal tweemaal zo groot is als het eerste, dus $b + 2 = 2 \times 12 = 24$. Hieruit volgt dat $b = 22$. Het totaal aantal sokken is dan $22 + 10 = 32$.
Dus D is het goede antwoord.

6 Driehoek EAB, driehoek EPQ en driehoek ETU zijn gelijkvormig, omdat $|AE| : |PE| : |TE| = 4 : 3 : 1 = |BE| : |QE| : |UE|$ en $\angle AEB = \angle PEQ = \angle TEU$ (zhz).
Hieruit volgt dat $|AB| : |PQ| : |TU| = 4 : 3 : 1$. Hieruit volgt dat $|AB| = 4$, zodat de oppervlakte van driehoek ABE gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.
Vanwege de gelijkvormigheid hebben driehoeken PQE en TUE daarom oppervlakte $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 8 = 4\frac{1}{2}$ respectievelijk $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 8 = \frac{1}{2}$. De oppervlakte van de vierhoek is dus $4\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 4$.
Dus B is het goede antwoord.



Bladzijde 229

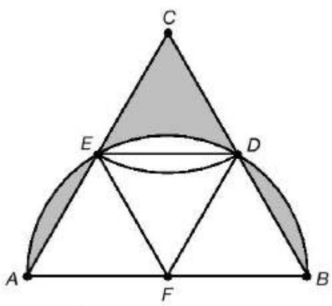
7 Omdat er maar twee verschillende uitkomsten zijn, kunnen er maar twee verschillende getallen op de kaarten voorkomen. Immers, als drie kaarten verschillende getallen dragen, dan geven ze in combinatie met een tweetal van de overige drie kaarten elk een andere uitkomst. Noem de twee getallen die voorkomen a en b. We mogen wel aannemen dat a op minstens drie kaartjes voorkomt.
Omdat $a + a + a$, $a + a + b$ en $a + b + b$ verschillend zijn, mag b maar eenmaal voorkomen.
Er zijn nu twee gevallen: $a + a + a = 16$, $a + a + b = 18$ en $a + a + a = 18$, $a + a + b = 16$.
De eerste mogelijkheid valt af omdat 16 geen drievoud is (a was een geheel getal). We zien dus dat $a = \frac{18}{3} = 6$ en $b = 16 - 12 = 4$. Het kleinste getal dat voorkomt is dus 4.
Dus D is het goede antwoord.

8 Als a, b, c, d vier opeenvolgende getallen in de rij zijn, dan geldt $d = a - 1$, want uit het gegeven volgt dat $b + c + d = (a + b + c) - 1$. Met andere woorden, als je in de rij drie posities verder gaat, vind je een getal dat 1 kleiner is dan het getal waar je begon.
De getallen op de posities 3, 6, 9, …, 2013 ($= 3 + 3 \times 670$) zijn dus precies
2012, 2011, …, ($2012 - 670 =$) 1342.
Dus E is het goede antwoord.

B-vragen

1 De getallen waarvan het product van de cijfers 25 is bestaan uit twee vijven en drie enen. Het aantal hiervan, a, is gelijk aan het aantal manieren om de drie enen te plaatsen. Er is dan namelijk maar één manier om de twee vijven te plaatsen. De getallen waarvan het product van de cijfers 15 is bestaan uit een drie, een vijf en drie enen. Het aantal hiervan, b, is gelijk aan het aantal manieren om eerst de drie enen te plaatsen en om vervolgens op twee manieren de drie en de vijf te plaatsen. Er geldt dus dat $b = 2a$, zodat $\dfrac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

2 Het punt F is het midden van AB (en het middelpunt van de halve cirkel). De punten D en E zijn de middens van BC en AC. Ze liggen op de halve cirkel omdat de driehoeken BDF en AEF gelijkzijdig zijn. Teken de cirkelboog tussen D en E van de cirkel met middelpunt C en straal $|CE| = 6$. Omdat $\angle AFE = \angle EFD = 60°$, geldt dat het cirkelsegment bij lijnstuk AE precies dezelfde afmetingen heeft als het cirkelsegment boven lijnstuk DE. Het cirkelsegment onder DE heeft ook die afmetingen omdat de twee cirkels rond C en F gelijke stralen hebben. Het cirkelsegment bij lijnstuk BD kan dus precies naar het cirkelsegment onder DE geschoven worden. De drie grijze gebiedjes hebben samen precies dezelfde oppervlakte als cirkelsector CED en die heeft oppervlakte $\frac{1}{6}(\pi \cdot 6^2) = 6\pi$.



3 Het aantal hokjes in de lengte van de rechthoek noemen we a en het aantal in de breedte noemen we b. We mogen wel aannemen dat $a > b$. Het totaal aantal hokjes in de rechthoek is ab en het aantal hokjes aan de rand is gelijk aan $2a + 2b - 4$. Gegeven is dat de helft van de hokjes aan de rand ligt, dus $ab = 2(2a + 2b - 4)$. Herschrijven geeft $ab - 4a - 4b + 16 = 8$. Het linkerlid kunnen we ontbinden, zodat we vinden dat $(a - 4)(b - 4) = 8$. Omdat a en b positieve gehele getallen zijn met $a > b$, zijn de enige mogelijkheden $a - 4 = 8$, $b - 4 = 1$ en $a - 4 = 4$, $b - 4 = 2$. De mogelijkheden waarbij $a - 4$ en $b - 4$ negatief zijn vallen namelijk af, omdat $b - 4$ dan hoogstens -4 is en b dan niet positief is. Ofwel $a = 12$, $b = 5$ en $a = 8$, $b = 6$.
Voor de rechthoek geeft dit $12 \times 5 = 60$ of $8 \times 6 = 48$ hokjes in totaal.

4 Met **Regel 1** vinden we: $32 \star 8 = \frac{1}{2} + 16 \star 8 = \frac{2}{2} + 8 \star 8 = \frac{3}{2} + 4 \star 8$.
Uit **Regel 2** met $y = 2$ en $x = 8$ volgt: $4 \star 8 = 64 \star 2$.
Herhaald toepassen van Regel 1 geeft $64 \star 2 = \frac{1}{2} + 32 \star 2 = \frac{2}{2} + 16 \star 2 = \ldots = \frac{5}{2} + 2 \star 2$.
Samenvoegen en **Regel 3** invullen geeft $32 \star 8 = \frac{3}{2} + 4 \star 8 = \frac{3}{2} + 64 \star 2 = \frac{8}{2} + 2 \star 2 = \frac{11}{2}$.

2013

A-vragen

Bladzijde 230

1 Gegeven is dat het stoplicht rood is op 12:05. Voor een stoplicht van periode 1 liggen de kleuren voor de tijdstippen 12:05 t/m 12:12 dan vast, die zijn afwisselend rood en groen. Voor periode 2 zijn er twee mogelijkheden en voor periode 3 zijn er drie mogelijkheden:

periode	12:05	12:06	12:07	12:08	12:09	12:10	12:11	12:12
1 min	rood	groen	rood	groen	rood	groen	rood	groen
2 min	rood	rood	groen	groen	rood	rood	groen	groen
2 min	rood	groen	groen	**rood**	**rood**	groen	groen	rood
3 min	rood	rood	rood	**groen**	**groen**	groen	rood	rood
3 min	rood	rood	groen	**groen**	**groen**	rood	rood	rood
3 min	rood	groen	groen	groen	rood	rood	rood	groen

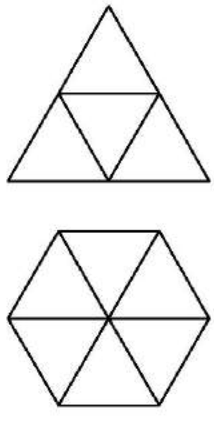
Van deze zes mogelijkheden voldoen er drie aan de voorwaarde dat het licht rood is op 12:12. Voor de tijdstippen 12:08 en 12:09 geeft dit twee kleurcombinaties: rood-rood en groen-groen. Dus B is het goede antwoord.

2 Tweemaal de lengte van een rechthoekje is gelijk aan driemaal zijn breedte.
De verhouding lengte : breedte is dus 3 : 2.
Met een omtrek van 20, moeten de lengte en breedte dus gelijk zijn aan 6 en 4. De oppervlakte van een rechthoekje is dan $6 \times 4 = 24$ en de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is vijfmaal zo groot, dus $5 \times 24 = 120$.
Dus C is het goede antwoord.

3 Voor de sommen van tweetallen zien we dat $e + a < c + d < a + b < b + c < d + e$.
Elke som van vier getallen kun je krijgen door twee van deze tweetallen op te tellen. Zo is bijvoorbeeld $a + b + c + e$ gelijk aan $(e + a) + (b + c)$. Van alle viertallen heeft het viertal a; c; d; e de kleinste som, want $a + c + d + e = (e + a) + (c + d)$ is de som van de twee kleinste tweetallen. Het overgebleven getal, namelijk b, is dus het grootst van de vijf. Immers, het grootste getal is het getal waarvoor de overige vier getallen de kleinste som hebben.
Dus B is het goede antwoord.

4 De volgorde waarin lampjes worden ingedrukt maakt niet uit voor het eindresultaat.
Door de drie lampjes in de bovenste rij in te drukken veranderen alle lampjes van *aan* naar *uit*.
De lampjes in de bovenste rij veranderen namelijk driemaal van toestand en de overige lampjes precies éénmaal.
Het is niet mogelijk alle lampjes *uit* te krijgen door twee (of minder) lampjes in te drukken.
Immers, er zal dan een lampje zijn dat niet in dezelfde rij of kolom staat als een van de ingedrukte lampjes. Dit lampje zal dus aan blijven.
Dus A is het goede antwoord.

5 We mogen voor het gemak wel aannemen dat er 20 dozen zijn; dat maakt voor de verhoudingen niet uit. Van de 20 dozen zijn er dus 5 leeg. Van de 5 dozen die worden geopend blijkt een vijfde niet leeg te zijn, precies 1 doos. Omdat er 4 geopende dozen leeg zijn, blijft er nog precies 1 lege doos over onder de 15 ongeopende dozen.
Dus C is het goede antwoord.



6 We verdelen de zeshoek in zes gelijkzijdige driehoekjes en de driehoek in vier gelijkzijdige driehoekjes zoals in de figuur. Omdat de zeshoek en de driehoek gelijke omtrek hebben, zijn de zijden van de driehoek tweemaal zo lang als die van de zeshoek. De driehoekjes in deze verdelingen zijn dus even groot. De verhouding tussen de oppervlaktes is daarom 6 : 4 ofwel 3 : 2.
Dus D is het goede antwoord.

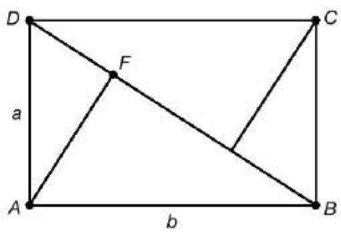
7 We bekijken de laatste vier cijfers van de machten van 5:
$5^1 = 0005$
$5^2 = 0025$
$5^3 = 0125$
$5^4 = 0625$
$5^5 = 3125$
$5^6 = 15\,625$
$5^7 = 78\,125$
$5^8 = 390\,625$
Bij het berekenen van de laatste vier cijfers van een macht van 5, is het voldoende om de laatste vier cijfers van de vorige macht van 5 te weten.
Zo zijn de laatste vier cijfers van $5^8 = 390625$ en van $5^4 = 0625$ gelijk, namelijk 3125.
Omdat de laatste vier cijfers van 5^4 en 5^8 gelijk zijn, zullen de laatste vier cijfers van de machten van 5 zich vanaf daar elke vier stappen herhalen.
De laatste vier cijfers van 5^{2013} zijn dus gelijk aan die van 5^{2009} en van 5^{2005}, enzovoorts tot en met die van $5^5 = 3125$. De laatste vier cijfers zijn dus 3125.
Dus C is het goede antwoord.

Bladzijde 231

8 Omdat elk van de twintig leerlingen een ander aantal vragen goed had, werd in totaal minstens $0 + 1 + 2 + \ldots + 19 = 190$ keer een vraag goed beantwoord. Aangezien elke vraag hoogstens driemaal goed werd beantwoord, waren er minstens $\frac{190}{3} = 63\frac{1}{3}$ vragen en dus ook minstens 64.
Een situatie met 64 vragen is ook daadwerkelijk mogelijk. Laat de twintig leerlingen achtereenvolgens 0 tot en met 19 vragen goed hebben. We verdelen de leerlingen in drie groepen:
I bestaat uit de leerlingen met 0, 1, 2, 3, 4, 17, 18 of 19 vragen goed,
II bestaat uit de leerlingen met 5, 6, 7, 14, 15 of 16 vragen goed en
III bestaat uit de leerlingen met 8, 9, 10, 11, 12 of 13 vragen goed.
Voor elk van de drie groepen is het totale aantal juist beantwoorde vragen niet meer dat 64.
Voor elke groep kunnen we het dus zó kiezen dat de juist beantwoorde vragen van die leerlingen allemaal verschillend zijn. Zo wordt elke vraag door hoogstens drie leerlingen goed beantwoord.
Dus B is het goede antwoord.

B-vragen

1 We bekijken alleen getallen met de even cijfers 2, 4 en 8. Als zo'n getal eindigt op cijfer 4 of 8, dan is het getal een veelvoud van 20 plus 4 of 8 en dus deelbaar door 4. Als zo'n getal eindigt op cijfer 2, dan is het een veelvoud van 20 plus 2 en dus niet deelbaar door 4. Het laatste cijfer moet dus een 2 zijn. De overgebleven cijfers kunnen we van laag naar hoog sorteren. We vinden dan 244 882.



2 Driehoeken ADF, BDA en BAF zijn gelijkvormig (hh). Daarom geldt
$$\frac{b}{a} = \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|AF|}{|DF|} = \frac{|BF|}{|AF|}. \text{ Oftewel } \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{|AF|}{|DF|} \cdot \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BF|}{|DF|} = \frac{9}{4}.$$
Dus vinden we $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

3 De tijd die Fred erover doet om van de middelste naar de laatste halte te fietsen en daarna naar de middelste halte terug te rennen, is gelijk aan de tijd die het hem kost om van de middelste halte naar de eerste halte te fietsen plus de tijd die hij nodig heeft om van de middelste naar de laatste halte te rennen. Immers, de afstanden tot de twee haltes zijn gelijk.
Gegeven is dat dit precies gelijk is aan de tijd die de bus nodig heeft om naar de eerste halte te rijden plus de tijd om naar de laatste halte te rijden. Dit is samen precies gelijk aan tweemaal de tijd die de bus nodig heeft om naar de middelste halte te rijden: $2 \times 15 = 30$ minuten.

4 De combinatie "2013" komt 13 keer voor als onderdeel van een van de volgende getallen: 2013, 12013, 22013 en 20130 t/m 20139. Daarnaast komt "2013" ook voor als eind van een getal gevolgd door het begin van het volgende getal. De verschillende mogelijke splitsingen zijn:
2|013 komt niet voor, want geen getal begint met een '0'.
20|13 komt 11 keer voor: 1320|1321 en 13020|13021 t/m 13920|13921.
201|3 komt slechts 1 keer voor: 3201|3202, want we noteren geen getallen groter dan 30 000.
Het is makkelijk na te gaan dat "2013" niet voorkomt als combinatie van drie opeenvolgende getallen. In totaal komt "2013" dus 13 + 11 + 1 = 25 keer in de cijferrij voor.

2014

A-vragen

Bladzijde 232

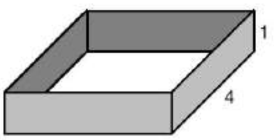
1 Stel dat we het veld B2 zwart kleuren. Dan mogen de 8 velden eromheen niet meer zwart gekleurd worden: de velden boven, onder, links en rechts van B2 staan namelijk in dezelfde kolom of rij als B2, en de andere vier velden raken diagonaal aan B2. Zo blijven alleen rij 4 en kolom D over en in elk mogen we maar één vakje zwart kleuren. In totaal kunnen dan niet meer dan 3 vakjes zwart worden gekleurd. We concluderen dat B2 niet zwart gekleurd mag worden. Op dezelfde manier kunnen we afleiden dat de velden B3, C2 en C3 niet zwart gekleurd mogen worden. In rij 2 kunnen we dus alleen A2 of D2 zwart kleuren. Als we A2 zwart kleuren, dan moeten we in rij 3 wel D3 zwart kleuren, want A3 staat in dezelfde kolom als A2. Voor rijen 1 en 4 is het dan alleen nog mogelijk om C1 en B4 zwart te kleuren. Dit geeft één oplossing. Als we in plaats van A2 vakje D2 zwart kleuren, vinden we de oplossing waarin D2, A3, B1 en C4 zwart gekleurd worden. In totaal zijn er dus 2 manieren om de zwart te kleuren hokjes te kiezen.
Dus B is het goede antwoord.

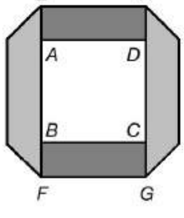
2 Uit de gegevens leiden we af dat $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ van de karpers gele vrouwtjes zijn.
Omdat de helft van de karpers vrouwtjes zijn, vinden we $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$ van de karpers rode vrouwtjes zijn. Als we dan ten slotte gebruiken dat drie vijfde van de karpers rood is, vinden we $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ van de karpers rode mannetjes zijn.
Dus D is het goede antwoord.

3 De reis waarin de kikker achtereenvolgens de velden 3, 6, 1, 4, 7, 2 en 5 bezoekt (of juist in omgekeerde volgorde) laat zien dat velden 3 en 5 mogelijke beginvelden zijn van een reis.
We zullen zien dat dit ook de enige mogelijke beginvelden zijn.
We noemen twee velden buren als de kikker van het ene veld naar het andere kan springen (en dus ook van de ander naar de een). Elke tussenstop in de reis van de kikker is dus een veld met minstens twee buren: het veld waar hij vandaan komt en het veld waar hij naartoe gaat.
Omdat de velden 3 en 5 slechts één buur hebben (veld 6 respectievelijk veld 2), moeten dit wel het beginpunt en eindpunt zijn van zijn reis. De andere velden kunnen dan alleen nog tussenstops zijn.
Dus C is het goede antwoord.

Bladzijde 233

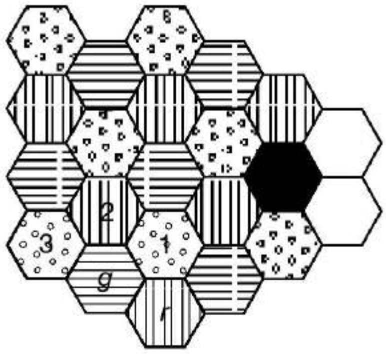
4 We bekijken de bovenrand van de papieren ring. Deze rand heeft lengte $4 \times 4 = 16$.
In de opgevouwen figuur volgt de bovenrand de rechthoek *EFGH*.
Omdat $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = 1$, zien we dat $|AB| + |FG| + |CD| + |EH| = 16 - 4 = 12$.
Deze vier lengtes zijn gelijk aan de lengte van de zijden van het vierkant *ABCD*. De zijden van het vierkant hebben dus lengte $\frac{12}{4} = 3$.
Dus B is het goede antwoord.





5 Noem het aantal deelnemers n. Het aantal deelnemers dat vóór Dion finishte, is $\frac{1}{2}(n-1)$ (de helft van alle deelnemers behalve Dion). Het aantal deelnemers dat vóór Jaap finishte, is $\frac{3}{4}(n-1)$.
Omdat er tussen Dion en Jaap precies 10 deelnemers finishten, volgt dat $\frac{3}{4}(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)$ gelijk is aan 11 (Dion zelf en de 10 deelnemers tussen Dion en Jaap). Er volgt dat $\frac{1}{4}(n-1) = 11$, dus $n = 4 \times 11 + 1 = 45$. Het aantal deelnemers was dus 45.
Dus E is het goede antwoord.

❻ We kleuren eerst de twee aangegeven tegels onderaan met twee verschillende kleuren. Dat kan op zes manieren: drie mogelijkheden voor de eerste tegel en dan voor elke keuze twee mogelijkheden voor de tweede tegel. In de figuur zijn de kleuren rood (r) en groen (g) gekozen.



Nu de eerste twee tegels zijn gekleurd, liggen de kleuren van de meeste tegels vast. De tegel met nummer 1 kan enkel nog blauw zijn. Vervolgens moet tegel 2 wel rood zijn en dan moet tegel 3 wel blauw zijn. Zodoende liggen de kleuren van alle andere tegels vast, behalve van de twee tegels helemaal rechts (wit in de figuur).
Voor deze laatste twee tegels zijn er drie mogelijke kleuringen. De bovenste en onderste tegel worden óf groen en rood, óf blauw en rood, óf blauw en groen.
Voor elk van de zes toegestane kleuringen van de eerste twee tegels zijn er zo precies drie manieren om de kleuring af te maken. In totaal zijn er dus $6 \times 3 = 18$ mogelijke kleuringen.
Dus D is het goede antwoord.

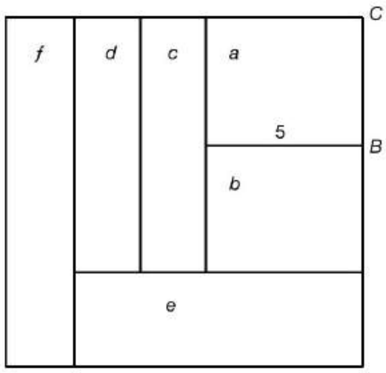
❼ Merk op dat hoek AMB gestrekt is. Er geldt dus dat $\angle AMD + \angle DMC + \angle CMB = 180°$. Merk op dat $\angle CMB = \angle MDA$ omdat driehoeken AMD en BMC gelijk zijn (drie dezelfde zijden). Dus geldt dat $\angle DMC = 180° - \angle AMD - \angle MDA = \angle DAM$, want de drie hoeken van driehoek AMD zijn samen 180 graden. De driehoeken DMC en DAM zijn dus twee gelijkbenige driehoeken met dezelfde tophoek. Ze zijn daarom aan elkaar gelijk op een vergrotingsfactor na. Dat wil zeggen dat $\frac{|CD|}{|DM|} = \frac{|DM|}{|AD|}$. De lengte van CD is dus gelijk aan $\frac{5}{8} \cdot 5 = \frac{25}{8}$.
Dus C is het goede antwoord.

Bladzijde 234

❽ Vanaf het genoemde punt kunnen we in dezelfde tijd 42% van de afstand stroomopwaarts varen en 58% van de afstand stroomafwaarts. Dat betekent dat de boot $\frac{58}{42}$ keer zo snel gaat met de stroom mee als tegen de stroom in. Noemen we de stroomsnelheid v, dan vinden we dus dat $\frac{25 + v}{25 - v} = \frac{58}{42}$.
Dit geeft $58 \cdot (25 - v) = 42 \cdot (25 + v)$ ofwel $1450 - 58v = 1050 + 42v$.
We vinden dat $400 = 100v$ ofwel $v = 4$.
Dus B is het goede antwoord.

B-vragen

❶ De zes rechthoeken hebben gelijke oppervlakte. De rechthoeken c en d zijn tweemaal zo hoog als rechthoek a en dus tweemaal zo smal. Zij hebben dus breedte $\frac{5}{2}$. Rechthoek e heeft dan breedte $\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 5 = 10$ en is daarom half zo hoog als rechthoek a. Maar dan is rechthoek f precies $\frac{5}{2}$ maal zo hoog als rechthoek a en heeft dan breedte $\frac{5}{\frac{5}{2}} = 2$.



Het hele vierkant heeft daarom zijden van lengte $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 2 = 12$.
Omdat het vierkant $\frac{5}{2}$ maal zo hoog is als rechthoek a, volgt dat de hoogte van rechthoek a gelijk is aan $|BC| = \frac{12}{\frac{5}{2}} = \frac{24}{5}$.

❷ Er is één rijtje met enkel peren. Nu tellen we de rijtjes met minstens één appel.
In zo'n rijtje moeten alle appels direct achter elkaar staan, want tussen twee appels mag nooit een peer staan. Willen we bijvoorbeeld 8 appels kiezen, dan kunnen die op posities 1 t/m 8, op posities 2 t/m 9, of op posities 3 t/m 10 staan, drie mogelijkheden in totaal. Op deze manier vinden we voor 10 appels 1 rijtje, voor 9 appels 2 rijtjes, voor 8 appels 3 rijtjes, en zo door tot en met 1 appel waarvoor er 10 rijtjes zijn. In totaal vinden we dus $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$ rijtjes met minstens één appel. Het totaal aantal rijtjes is daarom $55 + 1 = 56$.

3 Een goede strategie is om eerst kleine voorbeelden te bekijken. Zo vinden we achtereenvolgens

9×4	$40 - 4$	36
99×44	$4400 - 44$	4356
999×444	$444000 - 444$	443556
9999×4444	$44440000 - 4444$	44435556

Het patroon zal duidelijk zijn.
Om de vraag te beantwoorden merken we op dat $999\ldots99 = 1000...00 - 1$, waarbij het eerste getal 2014 nullen heeft. Het product is daarom gelijk aan
$\underbrace{444\ldots44}_{\text{2014 vieren}}\,\underbrace{000\ldots00}_{\text{2014 nullen}} - \underbrace{444\ldots44}_{\text{2014 vieren}} = \underbrace{444\ldots44}_{\text{2013 vieren}}\,3\,\underbrace{555\ldots55}_{\text{2013 vijven}}\,6.$

Als we de cijfers hiervan optellen, krijgen we $2013 \cdot 4 + 3 + 2013 \cdot 5 + 6 = 2013 \cdot 9 + 9 = 18\,126$.

4 We laten eerst zien dat elke mooie tabel een score van minstens 3 heeft. Bekijk zo'n tabel en noem het getal precies in het midden a. De vijf getallen in de middelste rij hebben a als gemiddelde en zijn niet allemaal gelijk aan a. Minstens een van deze vijf getallen moet dus kleiner zijn dan a. Op dezelfde manier moet (minstens) een van de vijf getallen in de middelste kolom kleiner zijn dan a, zeg getal b. Omdat b het gemiddelde is van de getallen in zijn rij, is een van de vijf getallen in deze rij kleiner dan b en dus ook kleiner dan a. We hebben nu drie getallen gevonden op verschillende plekken in de tabel, die elk kleiner zijn dan het getal precies in het midden. De score is dus minstens 3.

4	4	3	4	0
4	4	3	4	0
3	3	0	3	–9
4	4	3	4	0
0	0	–9	0	–36

In de figuur aan de rechterkant zie je dat er een mooie tabel bestaat met score 3. Een score van 3 is dus de laagst mogelijke score.

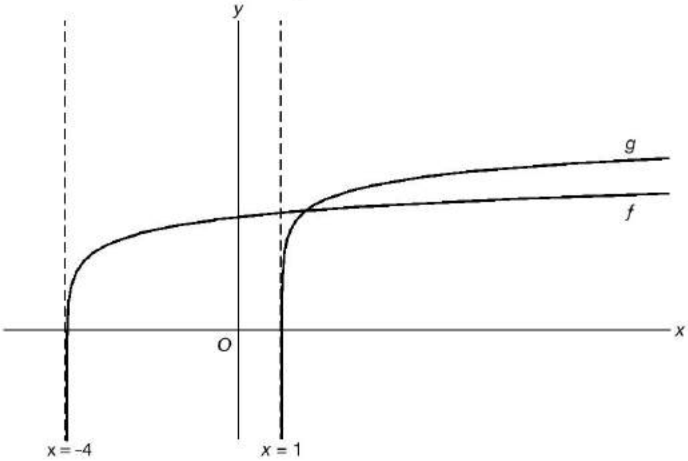
Gemengde opgaven

9 Exponentiële en logaritmische functies

Bladzijde 235

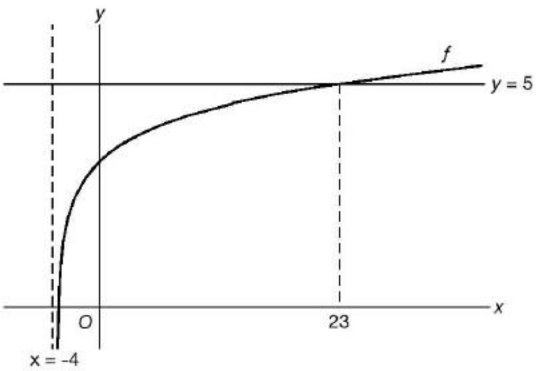
1 **a** $x + 4 > 0$ geeft $x > -4$, dus $D_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$ en de verticale asymptoot is de lijn $x = -4$.
$x - 1 > 0$ geeft $x > 1$, dus $D_g = \langle 1, \rightarrow \rangle$ en de verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

b



c Voer in $y_1 = 2 + {}^3\log(x + 4)$ en $y_2 = 3 + {}^2\log(x - 1)$.
Intersect geeft $x = 2{,}652\ldots$
$f(x) \geq g(x)$ geeft $-1 < x \leq 2{,}65$

d $f(x) = 5$ geeft $2 + {}^3\log(x + 4) = 5$
$${}^3\log(x + 4) = 3$$
$$x + 4 = 27$$
$$x = 23$$



$f(x) \leq 5$ geeft $-4 < x \leq 23$

e $AB = g(6) - f(6) = 1{,}226\ldots$
Dus $AB \approx 1{,}23$.

f $f(x) = 2$ geeft $2 + {}^3\log(x + 4) = 2$
$${}^3\log(x + 4) = 0$$
$$x + 4 = 1$$
$$x = -3$$
Dus $P(-3, 2)$.
$g(x) = 2$ geeft $3 + {}^2\log(x - 1) = 2$
$${}^2\log(x - 1) = -1$$
$$x - 1 = \tfrac{1}{2}$$
$$x = 1\tfrac{1}{2}$$
Dus $Q\left(1\tfrac{1}{2}, 2\right)$.
$PQ = 1\tfrac{1}{2} - -3 = 4\tfrac{1}{2}$

2 **a** $A = 30 \cdot 3^{4t+2}$
$30 \cdot 3^{4t+2} = A$
$3^{4t+2} = \frac{1}{30}A$
$4t + 2 = {}^3\log\left(\frac{1}{30}A\right)$
$4t = -2 + {}^3\log\left(\frac{1}{30}A\right)$
$t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot {}^3\log\left(\frac{1}{30}A\right)$

b $y = 2 + 3 \cdot 5^{6x-4}$
$2 + 3 \cdot 5^{6x-4} = y$
$3 \cdot 5^{6x-4} = y - 2$
$5^{6x-4} = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$
$6x - 4 = {}^5\log\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right)$
$6x = 4 + {}^5\log\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right)$
$x = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right)$

c $q = 6 \cdot 10^{\frac{10}{p}+6}$
$6 \cdot 10^{\frac{10}{p}+6} = q$
$10^{\frac{10}{p}+6} = \frac{1}{6}q$
$\frac{10}{p} + 6 = \log\left(\frac{1}{6}q\right)$
$\frac{10}{p} = -6 + \log\left(\frac{1}{6}q\right)$
$p\left(-6 + \log\left(\frac{1}{6}q\right)\right) = 10$
$p = \dfrac{10}{-6 + \log\left(\frac{1}{6}q\right)}$

d $K = 20 \cdot 3^{2t-1}$
$20 \cdot 3^{2t-1} = K$
$3^{2t-1} = \frac{1}{20}K$
$3^{2t} \cdot 3^{-1} = \frac{1}{20}K$
$3^{2t} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{20}K$
$(3^2)^t = \frac{3}{20}K$
$9^t = \frac{3}{20}K$
$t = {}^9\log\left(\frac{3}{20}K\right)$

3 **a** $2 \cdot {}^3\log(2x-3) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2x+1) = 2$
${}^3\log(2x-3)^2 - {}^3\log(2x+1) = 2$
${}^3\log\left(\dfrac{(2x-3)^2}{2x+1}\right) = 2$
$\dfrac{(2x-3)^2}{2x+1} = 3^2$
$(2x-3)^2 = 9(2x+1)$
$4x^2 - 12x + 9 = 18x + 9$
$4x^2 - 30x = 0$
$4x\left(x - 7\frac{1}{2}\right) = 0$
$x = 0 \ \vee \ x = 7\frac{1}{2}$
vold. niet vold.

b ${}^8\log(2x+1) = {}^4\log(25)$
$\dfrac{{}^2\log(2x+1)}{{}^2\log(8)} = \dfrac{{}^2\log(25)}{{}^2\log(4)}$
$\dfrac{{}^2\log(2x+1)}{3} = \dfrac{{}^2\log(25)}{2}$
${}^2\log(2x+1) = 1\frac{1}{2} \cdot {}^2\log(5^2)$
${}^2\log(2x+1) = {}^2\log(5^3)$
$2x + 1 = 5^3$
$2x = 124$
$x = 62$
vold.

c ${}^5\log^2(x+2) = 6 \cdot {}^5\log(x+2) + 7$
${}^5\log^2(x+2) - 6 \cdot {}^5\log(x+2) - 7 = 0$
Stel ${}^5\log(x+2) = u$.
$u^2 - 6u - 7 = 0$
$(u+1)(u-7) = 0$
$u = -1 \vee u = 7$
${}^5\log(x+2) = -1 \vee {}^5\log(x+2) = 7$
$x + 2 = 5^{-1} \vee x + 2 = 5^7$
$x = -2 + \frac{1}{5} \vee x = 5^7 - 2$
$x = -1\frac{4}{5} \vee x = 78\,123$
vold. vold.

d $4^{\log(x)} = 2^{3+\log(x)}$
$(2^2)^{\log(x)} = 2^{3+\log(x)}$
$2^{2\log(x)} = 2^{3+\log(x)}$
$2\log(x) = 3 + \log(x)$
$\log(x) = 3$
$x = 1000$
vold.

4 **a** $9^x = 3^x + 2$
$(3^2)^x = 3^x + 2$
$(3^x)^2 = 3^x + 2$
Stel $3^x = u$.
$u^2 = u + 2$
$u^2 - u - 2 = 0$
$(u+1)(u-2) = 0$
$u = -1 \vee u = 2$
$3^x = -1 \vee 3^x = 2$
geen opl. $x = {}^3\log(2)$

b $\log^2(x) + 1 = 2\frac{1}{2}\log(x)$
Stel $\log(x) = u$.
$u^2 + 1 = 2\frac{1}{2}u$
$u^2 - 2\frac{1}{2}u + 1 = 0$
$\left(u - \frac{1}{2}\right)(u - 2) = 0$
$u = \frac{1}{2} \vee u = 2$
$\log(x) = \frac{1}{2} \vee \log(x) = 2$
$x = 10^{\frac{1}{2}} \vee x = 10^2$
$x = \sqrt{10} \vee x = 100$
vold. vold.

c $\frac{e^x}{e^x - 2} = 2$
$e^x = 2(e^x - 2)$
$e^x = 2e^x - 4$
$-e^x = -4$
$e^x = 4$
$x = \ln(4)$

d $\ln(3x + 2) = \frac{1}{2}$
$3x + 2 = e^{\frac{1}{2}}$
$3x + 2 = \sqrt{e}$
$3x = -2 + \sqrt{e}$
$x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{e}$

e $\ln(4x) - \ln(x + 4) = 1$
$\ln\left(\frac{4x}{x+4}\right) = 1$
$\frac{4x}{x+1} = e$
$4x = ex + 4e$
$4x - ex = 4e$
$(4 - e)x = 4e$
$x = \frac{4e}{4 - e}$

f $\ln^2(x - 2) = 4$
$\ln(x - 2) = 2 \vee \ln(x - 2) = -2$
$x - 2 = e^2 \vee x - 2 = e^{-2}$
$x = 2 + e^2 \vee x = 2 + \frac{1}{e^2}$

g $3 \cdot 2^{2x+1} + 1 = 5 \cdot 2^x$
$3 \cdot 2^{2x} \cdot 2 + 1 = 5 \cdot 2^x$
$6 \cdot 2^{2x} + 1 = 5 \cdot 2^x$
$6 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 1 = 0$
Stel $2^x = u$.
$6u^2 - 5u + 1 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$
$u = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3} \vee u = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}$
$2^x = \frac{1}{3} \vee 2^x = \frac{1}{2}$
$x = {}^2\log\left(\frac{1}{3}\right) \vee x = -1$

h $x \cdot 2^{-x+1} = 4x \cdot 2^{-3x+1}$
$x = 0 \vee 2^{-x+1} = 4 \cdot 2^{-3x+1}$
$x = 0 \vee 2^{-x+1} = 2^2 \cdot 2^{-3x+1}$
$x = 0 \vee 2^{-x+1} = 2^{-3x+3}$
$x = 0 \vee -x + 1 = -3x + 3$
$x = 0 \vee 2x = 2$
$x = 0 \vee x = 1$

5 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}096$ geeft $1{,}096^T = 2$, dus $T = {}^{1{,}096}\log(2) = 7{,}56\ldots$
De verdubbelingstijd is 7 jaar en $0{,}56\ldots \times 12 \approx 7$ maanden.
b $g_{\text{dag}} = 0{,}83$ geeft $0{,}83^T = \frac{1}{2}$, dus $T = {}^{0{,}83}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}72\ldots$
De halveringstijd is $3{,}72\ldots \cdot 24 \approx 89$ uren.
c $g_{\text{maand}} = 2$ geeft $g_{\text{dag}} = 2^{\frac{1}{30}} = 1{,}0233\ldots$
De toename per dag is 2,3%.
d $g_{8{,}3\text{ dagen}} = \frac{1}{2}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8{,}3}} = 0{,}919\ldots$
$0{,}919\ldots^t = 0{,}01$ geeft $t = {}^{0{,}919\ldots}\log(0{,}01) = 55{,}1\ldots$
Dus na 55 dagen is nog 1% over.

Bladzijde 236

6 **a** A Lijn door (0, 5000) en (10, 20 000), dus $g_{10\text{ jaar}} = \frac{20\,000}{5000} = 4$.
$g_{\text{jaar}} = 4^{0{,}1}$
Dus $N_A(t) = 5000 \cdot (4^{0{,}1})^t = 5000 \cdot 4^{0{,}1t}$.
B Lijn door (0, 80 000) en (10, 10 000), dus $g_{10\text{ jaar}} = \frac{10\,000}{80\,000} = 0{,}125$.
$g_{\text{jaar}} = 0{,}125^{0{,}1}$
Dus $N_B(t) = 80\,000 \cdot (0{,}125^{0{,}1})^t = 80\,000 \cdot 0{,}125^{0{,}1t}$.
$N_B(t) = 2 \cdot N_A(t)$ geeft $80\,000 \cdot 0{,}125^{0{,}1t} = 2 \cdot 5000 \cdot 4^{0{,}1t}$
$80\,000 \cdot 0{,}125^{0{,}1t} = 10\,000 \cdot 4^{0{,}1t}$
$8 \cdot 0{,}125^{0{,}1t} = 4^{0{,}1t}$
Voer in $y_1 = 8 \cdot 0{,}125^{0{,}1x}$ en $y_2 = 4^{0{,}1x}$.
Intersect geeft $x = 6$.
Dus voor $t = 6$ is $N_B(t) = 2 \cdot N_A(t)$.
b $N(t) = N_A(t) + N_B(t) = 5000 \cdot 4^{0{,}1t} + 80\,000 \cdot 0{,}125^{0{,}1t}$
$N'(t) = 5000 \cdot 0{,}1 \cdot 4^{0{,}1t} \cdot \ln(4) + 80\,000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}125^{0{,}1t} \cdot \ln(0{,}125) = 500 \cdot 4^{0{,}1t} \cdot \ln(4) + 8000 \cdot 0{,}125^{0{,}1t} \cdot \ln(0{,}125)$
Voer in $y_1 = 500 \cdot 4^{0{,}1x} \cdot \ln(4) + 8000 \cdot 0{,}125^{0{,}1x} \cdot \ln(0{,}125)$.
De optie Zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 9{,}169\ldots$
Dus op $t \approx 9{,}2$ is het totale aantal minimaal.

7 **a** $f(x) = x^2 e^{x-1}$ geeft $f'(x) = 2x \cdot e^{x-1} + x^2 \cdot e^{x-1} = (x^2 + 2x)e^{x-1}$

b $g(x) = \ln^2(x) + \ln(x^2) = (\ln(x))^2 + \ln(x^2)$ geeft

$$g'(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2\ln(x) + 2}{x}$$

c $h(x) = {}^2\log(x^3 - x^2)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{(x^3 - x^2)\ln(2)} \cdot (3x^2 - 2x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{(x^3 - x^2)\ln(2)}$

d $j(x) = \ln(\ln(2x))$ geeft $j'(x) = \dfrac{1}{\ln(2x)} \cdot [\ln(2x)]' = \dfrac{1}{\ln(2x)} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln(2x)}$

8 **a** $y = 2e^x$

$\downarrow$ translatie (3, 0)

$y = 2e^{x-3}$

Er geldt $y = 2e^{x-3} = 2e^x \cdot e^{-3} = \dfrac{1}{e^3} \cdot 2e^x$.

Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met $\dfrac{1}{e^3}$ levert dezelfde beeldfiguur op.

b $y = \ln(2x)$

$\downarrow$ verm. y-as, 3

$y = \ln\left(2 \cdot \frac{1}{3}x\right) = \ln\left(\frac{2}{3}x\right)$

Er geldt $\ln\left(\frac{2}{3}x\right) = \ln\left(\frac{1}{3} \cdot 2x\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln(2x) = \ln(2x) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

Dus de translatie $\left(0, \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ levert dezelfde beeldfiguur op.

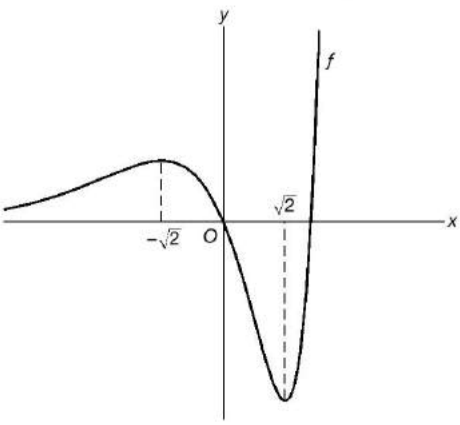
9 **a** $f(x) = (x^2 - 2x)e^{x+1}$ geeft $f'(x) = (2x - 2) \cdot e^{x+1} + (x^2 - 2x) \cdot e^{x+1} = (x^2 - 2)e^{x+1}$

$f'(x) = 0$ geeft $(x^2 - 2)e^{x+1} = 0$

$x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$



Dus $x = -\sqrt{2}$ en $x = \sqrt{2}$.

b $f(x) = 0$ geeft $(x^2 - 2x)e^{x+1} = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0 \vee x = 2$

Dus $A(2, 0)$ en $f'(2) = (2^2 - 2)e^{2+1} = 2e^3$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2e^3x + b \\ \text{door } A(2, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2e^3 \cdot 2 + b = 0 \\ b = -4e^3 \end{array}$$

Dus raaklijn: $y = 2e^3x - 4e^3$.

Snijpunt met de y-as is $B(0, -4e^3)$.

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4e^3 = 4e^3$

c $f'(x) = (x^2 - 2)e^{x+1}$ geeft $f''(x) = 2xe^{x+1} + (x^2 - 2)e^{x+1} = (x^2 + 2x - 2)e^{x+1}$

$f''(x) = 0$ geeft $(x^2 + 2x - 2)e^{x+1} = 0$

$x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot {-2} = 12$

$x = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} \vee x = \dfrac{-2 - 2\sqrt{3}}{2}$

$x = 1 + \sqrt{3} \vee x = 1 - \sqrt{3}$

Dus $x = 1 + \sqrt{3}$ en $x = 1 - \sqrt{3}$.

d P is het snijpunt van de grafiek van f en de lijn $x + y = 10$.

Voer in $y_1 = (x^2 - 2x)e^{x+1}$ en $y_2 = 10 - x$.

Intersect geeft $x = 2{,}155\ldots$ en $y = 7{,}844\ldots$

Dus $a = \dfrac{y}{x} = \dfrac{7{,}844\ldots}{2{,}155\ldots} \approx 3{,}64$.

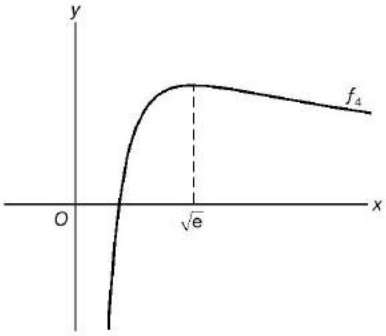
10 **a** $f_4(x) = \dfrac{2 + 4\ln(x)}{x}$ geeft $f_4'(x) = \dfrac{x \cdot 4 \cdot \frac{1}{x} - (2 + 4\ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{4 - 2 - 4\ln(x)}{x^2} = \dfrac{2 - 4\ln(x)}{x^2}$

$f_4'(x) = 0$ geeft $2 - 4\ln(x) = 0$

$-4\ln(x) = -2$

$\ln(x) = \frac{1}{2}$

$x = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$



$f_4(\sqrt{e}) = \dfrac{2 + 4 \cdot \frac{1}{2}}{(\sqrt{e})^2} = \dfrac{4}{e}$, dus top $\left(\sqrt{e}, \dfrac{4}{e}\right)$.

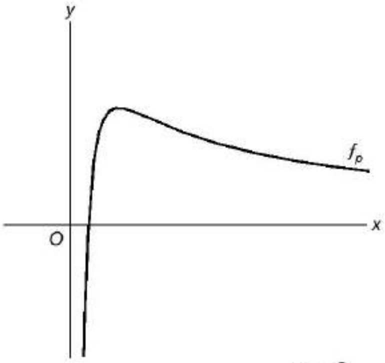
b $f_p(x) = \dfrac{2 + p\ln(x)}{x}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{x \cdot p \cdot \frac{1}{x} - (2 + p\ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{p - 2 - p\ln(x)}{x^2}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $p - 2 - p\ln(x) = 0$

$-p\ln(x) = -p + 2$

$\ln(x) = \dfrac{p-2}{p}$

$x = e^{\frac{p-2}{p}}$



Max. is $f_p\left(e^{\frac{p-2}{p}}\right) = \dfrac{2 + p \cdot \dfrac{p-2}{p}}{e^{\frac{p-2}{p}}}$

$$B_{f_p} = \langle\leftarrow, p] \text{ geeft } \frac{2+p-2}{e^{\frac{p-2}{p}}} = p$$

$$p = pe^{\frac{p-2}{p}}$$

$$p = 0 \quad \vee 1 = e^{\frac{p-2}{p}}$$

$$\text{vold. niet} \quad \frac{p-2}{p} = 0$$

$$p = 2$$

Bladzijde 237

11 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $\ln(4x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$4x = \frac{1}{x}$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$x = -\tfrac{1}{2} \vee x = \tfrac{1}{2}$$

vold. niet vold.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$ geeft $A\left(\frac{1}{2}, \ln(2)\right)$

$f(x) = \ln(4x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = -\ln(x)$ geeft $g'(x) = -\frac{1}{x}$.

Stel $y = ax + b$ met $a = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } A\left(\frac{1}{2}, \ln(2)\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot \frac{1}{2} + b = \ln(2) \\ b = \ln(2) - 1 \end{array}$$

$y = 2x + \ln(2) - 1$ snijdt de y-as in $(0, \ln(2) - 1)$.

Stel $y = ax + b$ met $a = g'\left(\frac{1}{2}\right) = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A\left(\frac{1}{2}, \ln(2)\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot \frac{1}{2} + b = \ln(2) \\ b = \ln(2) + 1 \end{array}$$

$y = -2x + \ln(2) + 1$ snijdt de y-as in $(0, \ln(2) + 1)$.

De lengte van het gevraagde lijnstuk is $\ln(2) + 1 - (\ln(2) - 1) = 2$.

b Stel $x_P = p$.

$PS = g(p) = \ln\left(\frac{1}{p}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} PQRS \text{ is een vierkant, dus } PQ = PS = \ln\left(\frac{1}{p}\right) \\ x_P = p \end{array}\right\} x_Q = p + \ln\left(\frac{1}{p}\right)$$

$x_Q = p + \ln\left(\frac{1}{p}\right)$ geeft $QR = f\left(p + \ln\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \ln\left(4\left(p + \ln\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right) = \ln\left(4p + 4\ln\left(\frac{1}{p}\right)\right)$

$PQRS$ is een vierkant, dus $PS = QR$

$$\ln\left(\frac{1}{p}\right) = \ln\left(4p + 4\ln\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$

$$\frac{1}{p} = 4p + 4\ln\left(\frac{1}{p}\right)$$

Voer in $y_1 = \frac{1}{x}$ en $y_2 = 4x + 4\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Intersect geeft $x = 0{,}1065\ldots$

Dus $x_P \approx 0{,}107$.

12 **a** $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8-5\\6+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}\\ \text{door } A(2,3)\end{array}\right\} k: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$

b $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-2\\-2-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l}AB: 5x + 3y = c\\ \text{door } A(2,3)\end{array}\right\} c = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 19$

$\left.\begin{array}{l}5x + 3y = 19\\ D(77, -122)\end{array}\right\} \begin{array}{l}5 \cdot 77 + 3 \cdot -122 = 19\\ 19 = 19\end{array}$

Dit klopt, dus D ligt op AB.

c lijnstuk $AC: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)$ met $0 \le \lambda \le 1$

lijnstuk $AC: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ met $0 \le \lambda \le 1$

Ook kan lijnstuk $AC: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ met $0 \le \lambda \le 3$.

d $C(8, 6)$ op de lijn $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\22\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ geeft $\begin{cases}p + 3\lambda = 8\\ 22 + 8\lambda = 6\end{cases}$

$$\begin{cases}p + 3\lambda = 8\\ 8\lambda = -16\end{cases}$$

$$\begin{cases}p + 3\lambda = 8\\ \lambda = -2\end{cases}$$

$\lambda = -2$ invullen in $p + 3\lambda = 8$ geeft $\begin{array}{l}p + 3 \cdot -2 = 8\\ p - 6 = 8\\ p = 14\end{array}$

Dus voor $p = 14$.

13 **a** Stel $k: y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l}y = ax + b\\ \text{door } B(1,6)\end{array}\right\} \begin{array}{l}a + b = 6\\ b = 6 - a\end{array}$

Dus $k: y = ax + 6 - a$ ofwel $k: ax - y + 6 - a = 0$.

$\text{d}(A, k) = 2$ geeft $\dfrac{|-3a - 4 + 6 - a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$

$$\begin{array}{l}|-4a + 2| = 2\sqrt{a^2 + 1}\\ (-4a + 2)^2 = 4(a^2 + 1)\\ 16a^2 - 16a + 4 = 4a^2 + 4\\ 12a^2 - 16a = 0\\ 4a(3a - 4) = 0\\ a = 0 \vee a = 1\tfrac{1}{3}\end{array}$$

$a = 0$ geeft $k: y_1 = 6$ en $a = 1\tfrac{1}{3}$ geeft $k_2: 1\tfrac{1}{3}x - y + 6 - 1\tfrac{1}{3} = 0$ ofwel $k_2: 4x - 3y + 14 = 0$.

b Stel $AB: y = ax + b$ met $a = \dfrac{6 - 4}{1 - -3} = \dfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l}y = \tfrac{1}{2}x + b\\ \text{door } A(-3,4)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\tfrac{1}{2} \cdot -3 + b = 4\\ -1\tfrac{1}{2} + b = 4\\ b = 5\tfrac{1}{2}\end{array}$

Dus AB: $y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ ofwel $\frac{1}{2}x - y + 5\frac{1}{2} = 0$ en dit geeft $x - 2y = -11$.
l evenwijdig met AB geeft $l: x - 2y = c$.
$d(l, AB) = 2\sqrt{5}$

$$\frac{|c + 11|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2\sqrt{5}$$

$|c + 11| = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}$
$c + 11 = 10 \vee c + 11 = -10$
$c = -1 \vee c = -21$
Dus $l_1: x - 2y = -1$ en $l_2: x - 2y = -21$.

c $AB: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dus $P(-3 + 4\lambda, 4 + 2\lambda)$ op AB.

$d(P, m) = 5$ geeft $\dfrac{|3(-3 + 4\lambda) + 4(4 + 2\lambda) - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$

$|-9 + 12\lambda + 16 + 8\lambda - 7| = 5\sqrt{25}$
$|20\lambda| = 25$
$20\lambda = 25 \vee 20\lambda = -25$
$\lambda = 1\frac{1}{4} \vee \lambda = -1\frac{1}{4}$

$\lambda = 1\frac{1}{4}$ geeft $\left(-3 + 4 \cdot 1\frac{1}{4}, 4 + 2 \cdot 1\frac{1}{4}\right) = \left(2, 6\frac{1}{2}\right)$
$\lambda = -1\frac{1}{4}$ geeft $\left(-3 + 4 \cdot -1\frac{1}{4}, 4 + 2 \cdot -1\frac{1}{4}\right) = \left(-8, 1\frac{1}{2}\right)$
Dus de punten zijn $\left(2, 6\frac{1}{2}\right)$ en $\left(-8, 1\frac{1}{2}\right)$.

d $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\cos(\angle(AB, AC)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{12 - 10}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{34}} = \frac{2}{\sqrt{680}}$$

$\angle(AB, AC) \approx 85{,}6°$

14 **a** Substitutie van $x = -1 + 5\lambda$ en $y = -\lambda$ in $3x + 2y = 10$ geeft $3(-1 + 5\lambda) + 2 \cdot -\lambda = 10$
$-3 + 15\lambda - 2\lambda = 10$
$13\lambda = 13$
$\lambda = 1$
$\lambda = 1$ geeft $x = -1 + 5 = 4$ en $y = -1$. Dus het snijpunt is $(4, -1)$.

b $m \perp k$, dus $\vec{n}_m = \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} m: 5x - y = c \\ \text{door } A(-1, 3) \end{array}\right\} c = 5 \cdot -1 - 3 = -8$

Dus $m: 5x - y = -8$.

c $\left.\begin{array}{l} P(-1 + 5\lambda, -\lambda) \\ d(P, k) = \sqrt{13} \end{array}\right\} \dfrac{|3(-1 + 5\lambda) + 2 \cdot -\lambda - 10|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}$

$$\frac{|-3 + 15\lambda - 2\lambda - 10|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$|13\lambda - 13| = 13$
$13\lambda - 13 = 13 \vee 13\lambda - 13 = -13$
$13\lambda = 26 \vee 13\lambda = 0$
$\lambda = 2 \vee \lambda = 0$
$\lambda = 2$ geeft $x = -1 + 5 \cdot 2 = 9$ en $y = -2$
$\lambda = 0$ geeft $x = -1$ en $y = 0$
Dus de punten zijn $(9, -2)$ en $(-1, 0)$.

d $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} x + 5y = c \\ \text{door } (-1, 0) \end{array}\right\} c = -1 + 5 \cdot 0 = -1$

Dus $k: x + 5y = -1$.

$d(M, k) = \dfrac{|5 + 5 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \dfrac{26}{\sqrt{26}} = \sqrt{26}$

Dus de vergelijking van de cirkel is: $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 26$.

Bladzijde 238

15 **a** Stel k: $y = 3x + b$.

Substitutie van $y = 3x + b$ in $x^2 + y^2 = 10$ geeft $x^2 + (3x + b)^2 = 10$

$x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 = 10$

$10x^2 + 6bx + b^2 - 10 = 0$

Raken, dus $D = 0$.

$(6b)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 10) = 0$

$36b^2 - 40b^2 + 400 = 0$

$-4b^2 = -400$

$b^2 = 100$

$b = 10 \vee b = -10$

Dus k_1: $y = 3x + 10$ en k_2: $y = 3x - 10$.

b Stel l: $y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } A(4, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4a + b = 2 \\ b = -4a + 2 \end{array}$

Dus l: $y = ax - 4a + 2$ ofwel $ax - y - 4a + 2 = 0$.

$d(O, l) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|0 - 0 - 4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$|-4a + 2| = \sqrt{10(a^2 + 1)}$

$(-4a + 2)^2 = 10(a^2 + 1)$

$16a^2 - 16a + 4 = 10a^2 + 10$

$6a^2 - 16a - 6 = 0$

$3a^2 - 8a - 3 = 0$

$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$

$a = \dfrac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \dfrac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$

Dus l_1: $y = 3x - 4 \cdot 3 + 2$ ofwel l_1: $y = 3x - 10$ en l_2: $y = -\frac{1}{3}x - 4 \cdot -\frac{1}{3} + 2$ ofwel l_2: $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

c Noem de raakpunten P en Q.

$\sin(\angle OBQ) = \dfrac{r}{OB} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ geeft $\angle OBQ = 52{,}23\ldots°$

$\angle PBQ = 2 \cdot 52{,}23\ldots° = 104{,}47\ldots°$

$180° - 104{,}47\ldots° = 75{,}52\ldots°$

Dus $\angle(m_1, m_2) \approx 75{,}5°$.

16 **a** $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$

$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 0$

$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 = 0$

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

Het punt $A(6, 4)$ ligt op de cirkel met middelpunt $M(3, 2)$ en straal $\sqrt{13}$.

De raaklijn k staat loodrecht op $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} k: 3x + 2y = c \\ \text{door } A(6, 4) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 26$

Dus k: $3x + 2y = 26$.

b Noem de raakpunten P en Q.

$\sin(\angle MBQ) = \dfrac{r}{MB} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{(8-3)^2+(0-2)^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}}$ geeft $\angle OBQ = 35{,}95\ldots°$

$\angle PBQ = 2 \cdot 35{,}95\ldots° = 71{,}91\ldots°$

Dus $\angle(l_1, l_2) \approx 71{,}9°$.

c m evenwijdig met $n: 3x + 2y = 10$ geeft $m: 3x + 2y = c$.

Raken, dus $d(M, m) = r$

$$\frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - c|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}$$

$$|13 - c| = 13$$
$$169 - 26c + c^2 = 169$$
$$c^2 - 26c = 0$$
$$c(c - 26) = 0$$
$$c = 0 \vee c = 26$$

Dus $m_1: 3x + 2y = 0$ en $m_2: 3x + 2y = 26$.

17 **a** $l: x + 3y = 12$ geeft $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle k, l) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-6-3|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$$

$\angle(k, l) \approx 37{,}9°$

b $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = c \\ \text{door } (1, 2) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

Dus $k: 3x + 2y = 7$.

$x = 2t - 6$ en $y = -5t + 4$ substitueren in $3x + 2y = 7$ geeft $3(2t - 6) + 2(-5t + 4) = 7$

$$6t - 18 - 10t + 8 = 7$$
$$-4t = 17$$
$$t = -4\tfrac{1}{4}$$

$t = -4\frac{1}{4}$ geeft $x = 2 \cdot -4\frac{1}{4} - 6 = -14\frac{1}{2}$ en $y = -5 \cdot -4\frac{1}{4} + 4 = 25\frac{1}{4}$.

Dus het snijpunt is $\left(-14\frac{1}{2}, 25\frac{1}{4}\right)$.

c $m: x = 2t - 6 \wedge y = -5t + 4$ geeft $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

n loodrecht op m geeft $\vec{n}_n = \vec{r}_m = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} n: 2x - 5y = c \\ \text{door } O \end{array}\right\} n: 2x - 5y = 0$

d $\left.\begin{array}{l} p \perp l, \text{ dus } p: 3x - y = c \\ \text{door } A(6, 8) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 6 - 8 = 10$

Dus $p: 3x - y = 10$.

$x = 1 - 2\lambda$ en $y = 2 + 3\lambda$ substitueren in $3x - y = 10$ geeft $3(1 - 2\lambda) - (2 + 3\lambda) = 10$

$$3 - 6\lambda - 2 - 3\lambda = 10$$
$$-9\lambda = 9$$
$$\lambda = -1$$

$\lambda = -1$ geeft $x = 1 - 2 \cdot -1 = 3$ en $y = 2 + 3 \cdot -1 = -1$

Dus het snijpunt is $(3, -1)$.

18 Breng een assenstelsel aan met de oorsprong in A, noem B het punt $(1, 0)$ en noem $C(p, q)$.

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$\vec{f} = \overrightarrow{AC}_\mathrm{L} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix}$ geeft $\overrightarrow{BC}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} q \\ 1-p \end{pmatrix}$

$\vec{g} = \vec{b} + \overrightarrow{BC}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+q \\ 1-p \end{pmatrix}$

$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{f} + \vec{g}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+q \\ 1-p \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Dus de plaats van M is onafhankelijk van de plaats van C.

19 **a** $\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ d \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \vec{d} + \overrightarrow{AD}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ a+d \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} -a \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-a \\ d+a \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AC}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+d \\ a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+d \\ a-d \end{pmatrix}$

$P(10, -1)$ geeft $\begin{cases} 2a + d = 10 \\ a - d = -1 \end{cases}$ +

$3a = 9$

$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ a - d = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 - d = -1 \\ d = 4 \end{array}$

Dus $a = 3$ en $d = 4$.

b $\left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ P(2a+d, a-d) \end{array}\right\} 2a + d + a - d = 6$

$3a = 6$

$a = 2$

$a = 2$ geeft $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4+d \\ 2-d \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} d-2 \\ d+2 \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4+d \\ 2-d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d-2 \\ d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 \\ Q(2d+2, 4) \end{array}\right\} \frac{1}{2}(2d+2)^2 = 4$

$(2d+2)^2 = 8$

$2d + 2 = 2\sqrt{2} \vee 2d + 2 = -2\sqrt{2}$

$d + 1 = \sqrt{2} \vee d + 1 = -\sqrt{2}$

$d = -1 + \sqrt{2} \vee d = -1 - \sqrt{2}$

vold. vold. niet

Dus $d = -1 + \sqrt{2}$.

Bladzijde 239

20 **a** $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \overrightarrow{BH}_\mathrm{L} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q-a \\ p \end{pmatrix}$

$\vec{f} = \vec{d} + \overrightarrow{AD}_\mathrm{L} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p \\ -q-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p-q \\ p-q-a \end{pmatrix}$

b $\vec{j} = \vec{d} + \vec{h} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - q \\ p + q \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CH} = \vec{h} - \vec{c} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - c \\ q \end{pmatrix}$

$\vec{l} = \vec{h} + \overrightarrow{CH}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ c - p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + q \\ q - p + c \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{JL} = \vec{l} - \vec{j} = \begin{pmatrix} p + q \\ q - p + c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p - q \\ p + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ -2p + c \end{pmatrix}$

$\vec{f} = \vec{j} + \overrightarrow{JL}_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} p - q \\ p + q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2p - c \\ 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p - q - c \\ p + 3q \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} -p - q \\ p - q - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p - q - c \\ p + 3q \end{pmatrix}$ geeft

$\begin{cases} -p - q = 3p - q - c \\ p - q - a = p + 3q \end{cases}$

$\begin{cases} -4p = -c \\ -4q = a \end{cases}$

$\begin{cases} p = \frac{1}{4}c \\ q = -\frac{1}{4}a \end{cases}$

Dus $H\left(\frac{1}{4}c, -\frac{1}{4}a\right)$.

d $p = \frac{1}{4}c$ en $q = -\frac{1}{4}a$ geeft

$\overrightarrow{JL} = \begin{pmatrix} 2q \\ -2p + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{2}c + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$ geeft $JL^2 = \left(-\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$

$\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}c \\ -\frac{1}{4}a \end{pmatrix}$ geeft $BH^2 = \left(\frac{1}{4}c\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}a\right)^2 = \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}a^2$

Dus $O(JLMF) = JL^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 = 4\left(\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{16}c^2\right) = 4 \cdot BH^2 = 4 \cdot O(BHJD)$.

Bladzijde 240

21 **a** $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t - 4 \\ y'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 8t \end{cases}$

evenwijdig aan de x-as als $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$4t^3 - 12t^2 + 8t = 0 \wedge 2t - 4 \neq 0$

$4t(t^2 - 3t + 2) = 0 \wedge 2t \neq 4$

$4t(t - 1)(t - 2) = 0 \wedge t \neq 2$

$(t = 0 \vee t = 1 \vee t = 2) \wedge t \neq 2$

$t = 0 \vee t = 1$

$t = 0$ geeft het punt $(0, 0)$.

$t = 1$ geeft het punt $(-3, 1)$

Dus evenwijdig met de x-as in de punten $(0, 0)$ en $(-3, 1)$.

evenwijdig aan de y-as als $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$t = 2 \wedge t \neq 0 \wedge t \neq 1 \wedge t \neq 2$

vold. niet

Dus geen punten waarin de raaklijn evenwijdig is met de y-as.

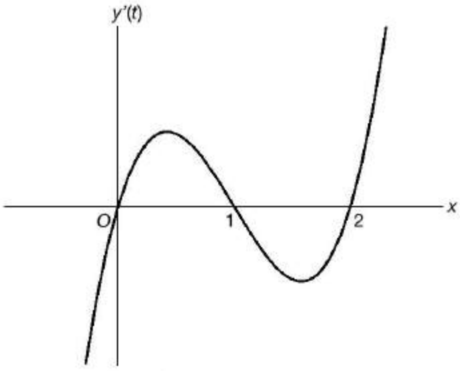
b Naar links betekent $x'(t) < 0$

$2t - 4 < 0$

$2t < 4$

$t < 2$

$y'(t) = 0$ geeft $t = 0 \vee t = 1 \vee t = 2$, zie vraag a.



Omhoog betekent $y'(t) > 0$.
$y'(t) > 0$ geeft $0 < t < 1 \vee t > 2$
$x'(t) < 0 \wedge y'(t) > 0$
$t < 2 \wedge (0 < t < 1 \vee t > 2)$
$0 < t < 1$
Dus naar links en omhoog voor $0 < t < 1$.

c $x = -3$ geeft $t^2 - 4t = -3$
$t^2 - 4t + 3 = 0$
$(t-1)(t-3) = 0$
$t = 1 \vee t = 3$
$t = 1$ geeft het punt $(-3, 1)$, dus voldoet niet.
$t = 3$ geeft het punt $(-3, 9)$, dus voldoet.
$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(2t-4)^2 + (4t^3 - 12t^2 + 8t)^2}$ geeft
$|\vec{v}(3)| = \sqrt{(2 \cdot 3 - 4)^2 + (4 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3)^2} = \sqrt{4 + (108 - 108 + 24)^2} = \sqrt{580} = 2\sqrt{145}$

d Voer in $y_1 = \sqrt{(2x-4)^2 + (4x^3 - 12x^2 + 8x)^2}$.
De optie minimum geeft $x = 2$ en $y = 0$
De minimale baansnelheid is 0 voor $t = 2$.

e $\begin{cases} x'(t) = 2t - 4 \\ y'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 8t \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x''(t) = 2 \\ y''(t) = 12t^2 - 24t + 8 \end{cases}$
De versnelling is evenwijdig aan de lijn $y = x$ als $y''(t) = x''(t)$
$12t^2 - 24t + 8 = 2$
$12t^2 - 24t + 6 = 0$
$2t^2 - 4t + 1 = 0$
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
$t = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} \vee t = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4}$
$t = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee t = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

22 **a** $y = 0$ geeft $t^2 - 1 = 0$
$t = 1 \vee t = -1$
$t = 1$ geeft het punt $(0, 0)$.
$t = -1$ geeft het punt $(6, 0)$.
Dus snijpunten met de x-as zijn $(0, 0)$ en $(6, 0)$.
$x = 0$ geeft $-t^3 + 3t^2 - 2t = 0$
$-t(t^2 - 3t + 2) = 0$
$-t(t-1)(t-2) = 0$
$t = 0 \vee t = 1 \vee t = 2$
$t = 0$ geeft het punt $(0, -1)$.
$t = 1$ geeft het punt $(0, 0)$.
$t = 2$ geeft het punt $(0, 3)$.
Dus snijpunten met de y-as zijn $(0, -1)$, $(0, 0)$ en $(0, 3)$.

b $y'(t) = 0$ geeft $2t = 0$, dus $t = 0$.
$x'(t) = 0$ geeft $-3t^2 + 6t - 2 = 0$
$D = 6^2 - 4 \cdot -3 \cdot -2 = 12$
$t = \dfrac{-6 - 2\sqrt{3}}{-6} \vee t = \dfrac{-6 + 2\sqrt{3}}{-6}$
$t = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee t = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$
Dus raaklijn evenwijdig met de x-as of met de y-as voor $t = 0 \vee t = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee t = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

c Evenwijdig aan de lijn $y = 2x + 3$ geeft $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &2 \cdot x'(t) = 1 \cdot y'(t) \\ &2(-3t^2 + 6t - 2) = 2t \\ &-6t^2 + 12t - 4 = 2t \\ &-6t^2 + 10t - 4 = 0 \\ &3t^2 - 5t + 2 = 0 \\ &D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 \\ &t = \frac{5 - 1}{6} = \tfrac{2}{3} \vee t = \frac{5 + 1}{6} = 1 \end{aligned}$$

$t = \frac{2}{3}$ geeft $x = -\frac{8}{27}$ en $y = -\frac{5}{9}$
$t = 1$ geeft $x = 0$ en $y = 0$
Dus de punten zijn $\left(-\frac{8}{27}, -\frac{5}{9}\right)$ en $(0, 0)$.

d $y(t) = 8$ geeft $t^2 - 1 = 8$
$t^2 = 9$
$t = 3 \vee t = -3$
$t = 3$ geeft het punt $(-6, 8)$.
$t = -3$ geeft het punt $(60, 8)$.
Dus $t = 3$.
$x'(3) = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 2 = -11$ en $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$
De baansnelheid is $|\vec{v}(3)| = \sqrt{(-11)^2 + 6^2} = \sqrt{157}$.

e $\begin{cases} x'(t) = -3t^2 + 6t - 2 \\ y'(t) = 2t \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x''(t) = -6t + 6 \\ y''(t) = 2 \end{cases}$

$y = -\frac{3}{4}$ geeft $t^2 - 1 = -\frac{3}{4}$
$t^2 = \frac{1}{4}$
$t = \frac{1}{2} \vee t = -\frac{1}{2}$
$t = \frac{1}{2}$ geeft $x = -\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$
$t = -\frac{1}{2}$ geeft $x = \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot -\frac{1}{2} = 1\frac{7}{8}$
Dus $t = \frac{1}{2}$. Dit geeft $\vec{v}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -3 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} - 2 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -6 \cdot \frac{1}{2} + 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$a_b\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\frac{3}{4} + 2}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2}} = \frac{2\frac{3}{4}}{\sqrt{1\frac{1}{16}}} = \frac{11}{\sqrt{17}} = \tfrac{11}{17}\sqrt{17}$$

Dus de baanversnelling is $\frac{11}{17}\sqrt{17}$.

11 Integraalrekening

23 **a** $f(x) = {}^7\log(5x)$ geeft $F(x) = 7 \cdot \dfrac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{5}(5x\ln(5x) - 5x) + c = \dfrac{7(x\ln(5x) - x)}{\ln(10)} + c$

b $f(x) = e^{\frac{1}{2}x - 1}$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}x - 1} + c = 2e^{\frac{1}{2}x - 1} + c$

c $f(x) = 10\ln(2x - 4)$ geeft
$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 10((2x - 4)\ln(2x - 4) - (2x - 4)) + c = 5(2x - 4)\ln(2x - 4) - 5(2x - 4) + c$

d $f(x) = 2\ln(x - 3)$ geeft
$F(x) = 2((x - 3)\ln(x - 3) - (x - 3)) + c = 2(x - 3)\ln(x - 3) - 2(x - 3) + c$

e $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2\sqrt{x} + 8x}{x^3} = \dfrac{x^4}{x^3} - \dfrac{6x^{2\frac{1}{2}}}{x^3} + \dfrac{8x}{x^3} = x - 6x^{-\frac{1}{2}} + 8x^{-2}$ geeft

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \dfrac{6}{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{8}{-1} \cdot x^{-1} + c = \frac{1}{2}x^2 - 12\sqrt{x} - \dfrac{8}{x} + c$

f $f(x) = (x^2 + 3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$ geeft $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x + c$

g $f(x) = 3\sin(4x)$ geeft $F(x) = -\frac{3}{4}\cos(4x) + c$

h $f(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi\right)$ geeft $F(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi\right) + c$

24 **a** $f(x) = \sqrt{6x + 3} = (6x + 3)^{\frac{1}{2}}$ geeft $F(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot (6x + 3)^{1\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{9}(6x + 3)\sqrt{6x + 3} + c$

b $f(x) = \dfrac{10}{2x - 1}$ geeft $F(x) = 10 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|2x - 1\right| + c = 5\ln\left|2x - 1\right| + c$

c $f(x) = (3x - 6)^{-2}$ geeft $F(x) = \frac{1}{3} \cdot -1 \cdot (3x - 6)^{-1} + c = -\frac{1}{3}(3x - 6)^{-1} + c = -\dfrac{1}{3(3x - 6)} + c$

d $f(x) = (2x + 5)^{-1} = \dfrac{1}{2x + 5}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|2x + 5\right| + c$

e $f(x) = 10^{2x-3}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{10^{2x-3}}{\ln(10)} + c = \dfrac{10^{2x-3}}{2\ln(10)} + c$

f $f(x) = \dfrac{8^x - 1}{2^x} = \dfrac{8^x}{2^x} - \dfrac{1}{2^x} = 4^x - 2^{-x}$ geeft $F(x) = \dfrac{4^x}{\ln(4)} + \dfrac{2^{-x}}{\ln(2)} + c$

Bladzijde 241

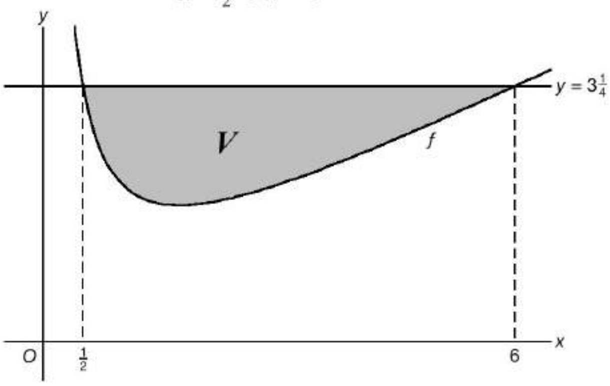
25 **a** $f(x) = 3\frac{1}{4}$ geeft $\dfrac{x^2 + 3}{2x} = 3\frac{1}{4}$

$x^2 + 3 = 6\frac{1}{2}x$

$x^2 - 6\frac{1}{2}x + 3 = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 6) = 0$

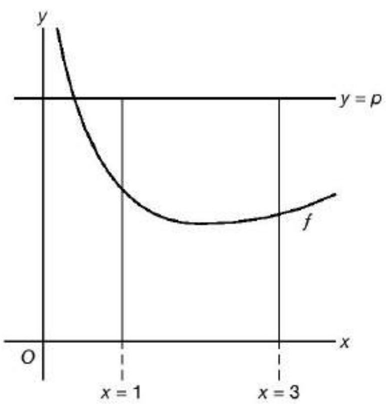
$x = \frac{1}{2} \vee x = 6$



$$O(V) = \int_{\frac{1}{2}}^{6} \left(3\tfrac{1}{4} - \frac{x^2 + 3}{2x}\right) \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{6} \left(3\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}x - \frac{1\frac{1}{2}}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[\, 3\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}x^2 - 1\tfrac{1}{2}\ln(x) \,\right]_{\frac{1}{2}}^{6}$$

$$= 19\tfrac{1}{2} - 9 - 1\tfrac{1}{2}\ln(6) - \left(1\tfrac{5}{8} - \tfrac{1}{16} - 1\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = 10\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2}\ln(6) - 1\tfrac{9}{16} + 1\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = 8\tfrac{15}{16} - 1\tfrac{1}{2}\ln(12)$$

b

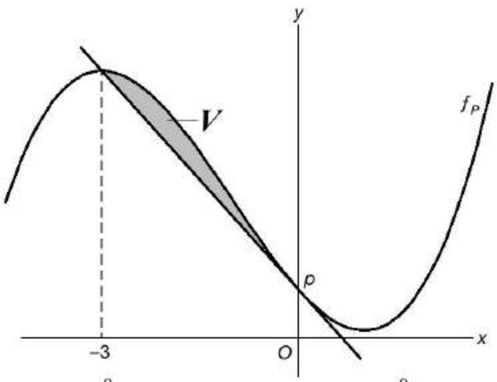


$$\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} \frac{x^2 + 3}{2x}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} \left(\tfrac{1}{2}x + \frac{1\frac{1}{2}}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[\, \tfrac{1}{4}x^2 + 1\tfrac{1}{2}\ln(x) \,\right]_{1}^{3} = 2\tfrac{1}{4} + 1\tfrac{1}{2}\ln(3) - \left(\tfrac{1}{4} + 1\tfrac{1}{2}\ln(1)\right) = 2 + 1\tfrac{1}{2}\ln(3)$$

$\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot O(\text{rechthoek})$ geeft $2 + 1\frac{1}{2}\ln(3) = \frac{1}{2} \cdot 2p$

$p = 2 + 1\frac{1}{2}\ln(3)$

26 **a** $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + p$ geeft $f_p{}'(x) = x^2 + 2x - 3$
Stel de raaklijn is $y = ax + b$ met $a = f_p{}'(0) = -3$.
$$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ f_p(0) = p \text{ dus door } (0, p) \end{array}\right\} b = p$$
Dus de raaklijn is $y = -3x + p$.
$f(x) = -3x + p$ geeft $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + p = -3x + p$
$$\frac{1}{3}x^3 + x^2 = 0$$
$$\frac{1}{3}x^2(x + 3) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -3$$



$$O(V) = \int_{-3}^{0} (f_p(x) - (-3x + p))\,dx = \int_{-3}^{0} \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + p + 3x - p\right)dx = \int_{-3}^{0} \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x^2\right)dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{0} = 0 - \left(\tfrac{81}{12} - 9\right) = 2\tfrac{1}{4}$$

b $f_p{}'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2x - 3 = 0$
$$(x - 1)(x + 3) = 0$$
$$x = 1 \vee x = -3$$
$x_A > 0$, dus $x_A = 1$.
$f_p(1) = 0$ geeft $\frac{1}{3} + 1 - 3 + p = 0$
$$p = 1\tfrac{2}{3}$$
Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1\frac{2}{3}$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = -5$ en $x = 1$.
$$O(W) = \int_{-5}^{1} f_{1\frac{2}{3}}(x)\,dx = \int_{-5}^{1} \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1\tfrac{2}{3}\right)dx = \left[\tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - 1\tfrac{1}{2}x^2 + 1\tfrac{2}{3}x\right]_{-5}^{1}$$
$$= \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{3} - 1\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{2}{3} - \left(\tfrac{1}{12}(-5)^4 + \tfrac{1}{3}(-5)^3 - 1\tfrac{1}{2}(-5)^2 + 1\tfrac{2}{3} \cdot -5\right)$$
$$= \tfrac{7}{12} - \left(\tfrac{625}{12} - \tfrac{125}{3} - \tfrac{75}{2} - \tfrac{25}{3}\right)$$
$$= \tfrac{7}{12} - -35\tfrac{5}{12} = 36$$

27 **a** $I = \pi\int_{\frac{1}{3}r}^{\frac{1}{2}r} y^2\,dx = \pi\int_{\frac{1}{3}r}^{\frac{1}{2}r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{3}r}^{\frac{1}{2}r} = \pi\left(r^2 \cdot \frac{1}{2}r - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}r\right)^3\right) - \pi\left(r^2 \cdot \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}r\right)^3\right)$
$$= \pi\left(\tfrac{1}{2}r^3 - \tfrac{1}{24}r^3\right) - \pi\left(\tfrac{1}{3}r^3 - \tfrac{1}{81}r^3\right) = \tfrac{11}{24}\pi r^3 - \tfrac{26}{81}\pi r^3 = \tfrac{89}{648}\pi r^3$$

b $I_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$I = \pi\int_{-pr}^{pr} y^2\,dx = \pi\int_{-pr}^{pr}(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-pr}^{pr}$$

$$= \pi\left(r^2\cdot pr - \tfrac{1}{3}(pr)^3\right) - \pi\left(r^2\cdot -pr - \tfrac{1}{3}(-pr)^3\right)$$

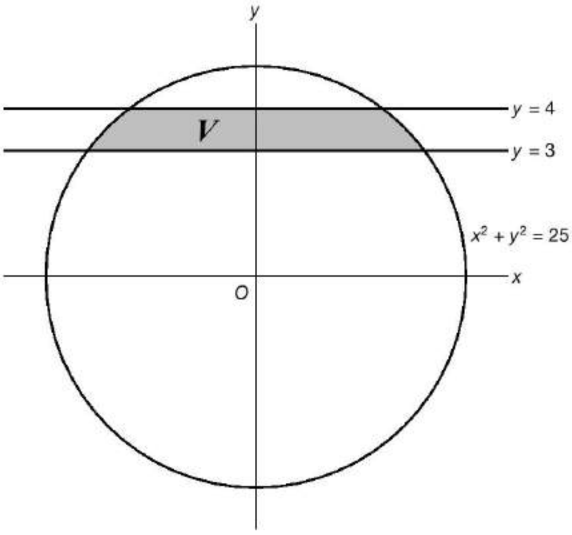
$$= \pi\left(pr^3 - \tfrac{1}{3}p^3r^3\right) + \pi\left(pr^3 - \tfrac{1}{3}p^3r^3\right) = \pi\left(2pr^3 - \tfrac{2}{3}p^3r^3\right) = \left(2p - \tfrac{2}{3}p^3\right)\pi r^3$$

$I = \frac{1}{2}I_{\text{bol}}$ geeft $\left(2p - \frac{2}{3}p^3\right)\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

$$2p - \tfrac{2}{3}p^3 = \tfrac{2}{3}$$

Voer in $y_1 = 2x - \frac{2}{3}x^3$ en $y_2 = \frac{2}{3}$.
Intersect geeft $x = 0{,}347...$
Dus $p \approx 0{,}35$.

28



Substitutie van $y = 3$ in $x^2 + y^2 = 25$ geeft $x^2 + 9 = 25$
$x^2 = 16$
$x = 4 \vee x = -4$
Substitutie van $y = 4$ in $x^2 + y^2 = 25$ geeft $x^2 + 16 = 25$
$x^2 = 9$
$x = 3 \vee x = -3$

$$I(L) = \pi\int_{-4}^{-3} y^2\,dx + \pi\int_{-3}^{3} 4^2\,dx + \pi\int_{3}^{4} y^2\,dx - \pi\int_{-4}^{4} 3^2\,dx$$

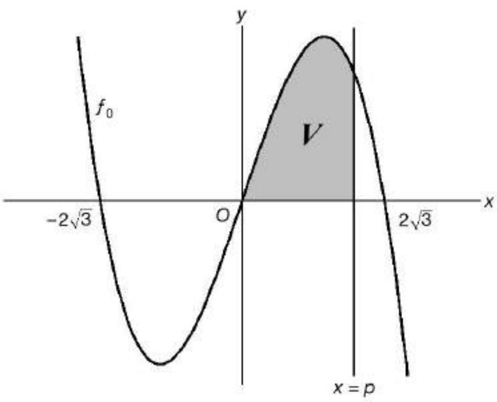
$$= \pi\int_{-4}^{-3}(25 - x^2)\,dx + \pi[16x]_{-3}^{3} + \pi\int_{3}^{4}(25 - x^2)\,dx - \pi[9x]_{-4}^{4}$$

$$= \pi\left[25x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{-3} + \pi(48 - -48) + \pi\left[25x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{3}^{4} - \pi(36 - -36)$$

$$= \pi(-75 + 9) - \pi\left(-100 + \tfrac{64}{3}\right) + 96\pi + \pi\left(100 - \tfrac{64}{3}\right) - \pi(75 - 9) - 72\pi$$

$$= -66\pi + 78\tfrac{2}{3}\pi + 96\pi + 78\tfrac{2}{3}\pi - 66\pi - 72\pi = 49\tfrac{1}{3}\pi$$

29 **a** $f_0(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{3}x^3 + 4x = 0$
$x^3 - 12x = 0$
$x(x^2 - 12) = 0$
$x = 0 \vee x^2 = 12$
$x = 0 \vee x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3}$



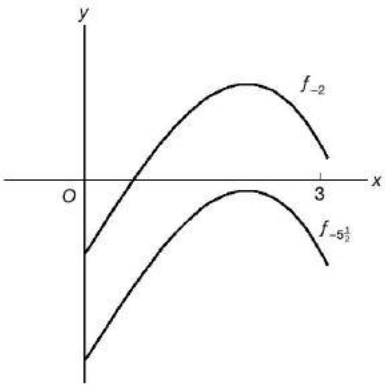
$O(V) = \int_0^p \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{12}x^4 + 2x^2\right]_0^p = -\frac{1}{12}p^4 + 2p^2$

$O(V) = 11\frac{1}{4}$ geeft $-\frac{1}{12}p^4 + 2p^2 = 11\frac{1}{4}$
$p^4 - 24p^2 = -135$
$p^4 - 24p^2 + 135 = 0$
Stel $p^2 = u$.
$u^2 - 24u + 135 = 0$
$(u - 9)(u - 15) = 0$
$u = 9 \vee u = 15$
$p^2 = 9 \vee p^2 = 15$
$p = 3 \vee p = -3 \vee p = \sqrt{15} \vee p = -\sqrt{15}$

$0 < p < 2\sqrt{3}$ geeft $p = 3$

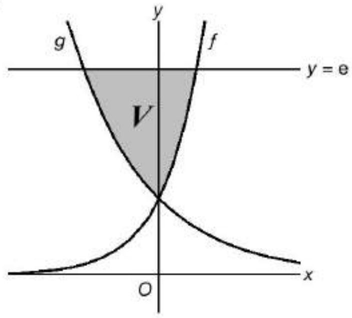
b $\int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x + a\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{12}x^4 + 2x^2 + ax\right]_0^3 = -6\frac{3}{4} + 18 + 3a = 3a + 11\frac{1}{4}$

$\left|3a + 11\frac{1}{4}\right| = 5\frac{1}{4}$
$3a + 11\frac{1}{4} = 5\frac{1}{4} \vee 3a + 11\frac{1}{4} = -5\frac{1}{4}$
$3a = -6 \vee 3a = -16\frac{1}{2}$
$a = -2 \vee a = -5\frac{1}{2}$



$a = -2$ voldoet niet omdat de grafiek van f_{-2} de x-as snijdt tussen $x = 0$ en $x = 3$.
Dus $a = -5\frac{1}{2}$.

30



$e^{2x} = e$ | $e^{-x} = e$ | $e^{2x} = e^{-x}$

$2x = 1$ | $-x = 1$ | $2x = -x$

$x = \frac{1}{2}$ | $x = -1$ | $x = 0$

Verschuiven over de vector $(0, -e)$ geeft

$$I(L) = \pi\int_{-1}^{0}(e^{-x} - e)^2\,dx + \pi\int_{0}^{\frac{1}{2}}(e^{2x} - e)^2\,dx = \pi\int_{-1}^{0}(e^{-2x} - 2e^{-x+1} + e^2)\,dx + \pi\int_{0}^{\frac{1}{2}}(e^{4x} - 2e^{2x+1} + e^2)\,dx$$

$$= \pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{-2x} + 2e^{-x+1} + e^2x\right]_{-1}^{0} + \pi\left[\tfrac{1}{4}e^{4x} - e^{2x+1} + e^2x\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pi\left(-\tfrac{1}{2} + 2e\right) - \pi\left(-\tfrac{1}{2}e^2 + 2e^2 - e^2\right) + \pi\left(\tfrac{1}{4}e^2 - e^2 + \tfrac{1}{2}e^2\right) - \pi\left(\tfrac{1}{4} - e\right)$$

$$= \left(-\tfrac{3}{4}e^2 + 3e - \tfrac{3}{4}\right)\pi$$

Bladzijde 242

31 **a** 54 km/uur = 15 m/s

Versnelling van de wielrenner constant a en beginsnelheid 15 geeft snelheid $v_w(t) = at + 15$.

$v_w(t) = at + 15$ geeft $s_w(t) = \frac{1}{2}at^2 + 15t + c$

$$\left.\begin{array}{l} s_w(t) = \frac{1}{2}at^2 + 15t + c \\ s_w(0) = 0 \end{array}\right\} s_w(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + 15t$$

$$\begin{aligned} v_w(t) = 0 \text{ geeft } at + 15 &= 0 \\ at &= -15 \\ t &= -\frac{15}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_w\left(-\frac{15}{a}\right) = 40 \text{ geeft } \tfrac{1}{2}a\cdot\left(-\frac{15}{a}\right)^2 + 15\cdot -\frac{15}{a} &= 40 \\ \tfrac{1}{2}a\cdot\frac{225}{a^2} - \frac{225}{a} &= 40 \\ \frac{112\frac{1}{2}}{a} - \frac{225}{a} &= 40 \\ -\frac{112\frac{1}{2}}{a} &= 40 \\ a = -\frac{112\frac{1}{2}}{40} &= -2{,}8125 \end{aligned}$$

Dus de versnelling van de wielrenner is $-2{,}8125$ m/s^2.

b $a = -2{,}5$, $v_w(0) = 15$ en $s_w(0) = 0$ geeft $v_w(t) = -2{,}5t + 15$ en $s_w(t) = -1{,}25t^2 + 15t$

6 km/uur = $1\frac{2}{3}$ m/s

Voor de auto geldt $v_a(t) = 1\frac{2}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} v_a(t) = 1\frac{2}{3} \text{ geeft } s_a(t) = 1\frac{2}{3}t + b \\ s_a(0) = 40 \end{array}\right\} s_a(t) = 1\tfrac{2}{3}t + 40$$

$v_w(t) = v_a(t)$

$-2{,}5t + 15 = 1\frac{2}{3}$

$-2{,}5t = -13\frac{1}{3}$

$t = 5\frac{1}{3}$

$s_w\left(5\frac{1}{3}\right) = -1{,}25\cdot\left(5\frac{1}{3}\right)^2 + 15\cdot 5\frac{1}{3} = 44\frac{4}{9}$

$s_a\left(5\frac{1}{3}\right) = 1\frac{2}{3}\cdot 5\frac{1}{3} + 40 = 48\frac{8}{9}$

Dus op het moment dat de wielrenner en de auto dezelfde snelheid hebben, rijdt de auto $48\frac{8}{9} - 44\frac{4}{9} = 4\frac{4}{9}$ meter voor de wielrenner.

De wielrenner kan dus op tijd stoppen.

32 **a** $O(V)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac12 e^x+\frac12 e^{-x}\right)dx=\left[\frac12 e^x-\frac12 e^{-x}\right]_0^1=\frac12 e-\frac12 e^{-1}-\left(\frac12-\frac12\right)=\frac12 e-\frac{1}{2e}$

b $I(L)=\pi\int_0^1 (f(x))^2\,dx=\pi\int_0^1\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx=\pi\int_0^1\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\,dx$

$=\pi\left[\frac14\left(\frac12 e^{2x}+2x-\frac12 e^{-2x}\right)\right]_0^1=\frac14\pi\left(\frac12 e^2+2-\frac12 e^{-2}\right)-\frac14\pi\left(\frac12+0-\frac12\right)=\frac18\pi e^2+\frac12\pi-\frac{\pi}{8e^2}$

c $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac12 e^x+\frac12 e^{-x}$ geeft $f'(x)=\frac12 e^x-\frac12 e^{-x}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac44+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}=\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}$

$=\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=f(x)$

omtrek $=1+f(1)+\int_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+f(0)=1+\frac12 e+\frac12 e^{-1}+\int_0^1 f(x)\,dx+1$

$=2+\frac12 e+\frac{1}{2e}+\frac12 e-\frac{1}{2e}=2+e$

33 **a** $f(x)=\frac14 x^2$ geeft $f'(x)=\frac12 x$

$f'(x)=1$ geeft $\frac12 x=1$, dus $x=2$ en raakpunt $(2, 1)$.

$\left.\begin{array}{l} y=x+b \\ \text{door } (2,1) \end{array}\right\}\begin{array}{l} 2+b=1 \\ b=-1 \end{array}$

Dus $y=x-1$.

$g(x)=-\frac{4}{x^2}=-4x^{-2}$ geeft $g'(x)=8x^{-3}=\frac{8}{x^3}$

$g'(x)=1$ geeft $\frac{8}{x^3}=1$

$x^3=8$

$x=2$, dus raakpunt $(2,-1)$

$\left.\begin{array}{l} y=x+b \\ \text{door } (2,-1) \end{array}\right\}\begin{array}{l} 2+b=-1 \\ b=-3 \end{array}$

Dus $y=x-3$.

De raaklijnen snijden de y-as in $(0,-1)$ en $(0,-3)$. De diagonaal van het vierkant is dus 2.

b $f(a)=\frac14 a^2$, dus $C\left(a,\frac14 a^2\right)$ en $D\left(-a,\frac14 a^2\right)$.

$g(a)=-\frac{4}{a^2}$, dus $B\left(a,-\frac{4}{a^2}\right)$ en $A\left(-a,-\frac{4}{a^2}\right)$.

$O(ABCD)=2a\cdot\left(\frac14 a^2+\frac{4}{a^2}\right)=\frac12 a^3+\frac{8}{a}$

O(vlakdeel boven de grafiek van f) $=2\cdot\int_0^a\left(\frac14 a^2-\frac14 x^2\right)dx=2\cdot\left[\frac14 a^2x-\frac{1}{12}x^3\right]_0^a=2\left(\frac14 a^3-\frac{1}{12}a^3\right)=\frac13 a^3$

O(vlakdeel boven de grafiek van f) $=\frac12 O(ABCD)$ geeft $\frac13 a^3=\frac12\cdot\left(\frac12 a^3+\frac{8}{a}\right)$

$\frac13 a^3=\frac14 a^3+\frac{4}{a}$

$\frac{1}{12}a^3=\frac{4}{a}$

$a^4=48$

$a=\sqrt[4]{48}$

34 **a** $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ geeft $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = 4$ geeft $\frac{1}{x} = 4$

$x = \frac{1}{4}$

De optie fnInt (TI) of $\int$ dx (Casio) geeft boog $PQ = \int_{\frac{1}{4}}^{4} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx = 6{,}300\ldots$

omtrek $V = OA + AP +$ boog $PQ + QC + CO = 4 + \frac{1}{4} + 6{,}300\ldots + \frac{1}{4} + 4 \approx 14{,}80$

b $O(V) = \frac{1}{4} \cdot 4 + \int_{\frac{1}{4}}^{4} f(x)\,dx = 1 + \int_{\frac{1}{4}}^{4} \frac{1}{x}\,dx = 1 + [\ln(x)]_{\frac{1}{4}}^{4} = 1 + \ln(4) - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \ln(4) + \ln(4) = 1 + 2\ln(4)$

12 Goniometrische formules

35 **a** $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{4}$

$\sin(2x) = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

b $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin(2x)$

$\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$

$x - \frac{1}{3}\pi = 2x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -2x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$-x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

c $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = -\sin(x)$

$\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin(x + \pi)$

$\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$x + \frac{1}{3}\pi = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{3}\pi = -x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

geen opl. $\quad 2x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

d $\cos(2x) - \sin^2(x) = \frac{1}{4}$

$1 - 2\sin^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{4}$

$-3\sin^2(x) = -\frac{3}{4}$

$\sin^2(x) = \frac{1}{4}$

$\sin(x) = \frac{1}{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Deze oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) worden samengenomen tot $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$

36 **a** $f(x) = \sin^2(2x) + \sin(2x)\cos(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2}\sin(4x)$ geeft

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x) - \frac{1}{8}\cos(4x) + c$

b $f(x) = \cos(x) + \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos(x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x) = 1\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}$ geeft $F(x) = 1\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}x$

c $f(x) = 4\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2 = \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ geeft

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$

d $f(x) = (1 - 2\sin(x))^2 = 1 - 4\sin(x) + 4\sin^2(x) = 1 - 4\sin(x) + 2 - 2\cos(2x) = 3 - 4\sin(x) - 2\cos(2x)$ geeft

$F(x) = 3x + 4\cos(x) - \sin(2x) + c$

37 **a** $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \sqrt{2}$ geeft $f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$

$f'(x) = 0$ geeft $\cos(x) + \sin(x) = 0$

$\cos(x) = -\sin(x)$

$\cos(x) = \sin(x + \pi)$

$\cos(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$x = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

geen opl. $\quad 2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$f\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) - \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) + \sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$

$f\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = 0$ en $f'\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = 0$, dus de grafiek van f raakt de x-as.

b $f\left(\frac{1}{4}\pi - p\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi - p\right) - \cos\left(\frac{1}{4}\pi - p\right) + \sqrt{2}$

$= \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos(p) - \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin(p) - \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos(p) + \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin(p)\right) + \sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$

$= -\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$

$f\left(\frac{1}{4}\pi + p\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi + p\right) - \cos\left(\frac{1}{4}\pi + p\right) + \sqrt{2}$

$= \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos(p) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin(p) - \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos(p) - \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin(p)\right) + \sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$

$= \sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$

$f\left(\frac{1}{4}\pi - p\right) + f\left(\frac{1}{4}\pi + p\right) = -\sqrt{2}\sin(p) + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sin(p) + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Dus de grafiek van f is puntsymmetrisch in het punt $\left(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2}\right)$.

c $f\left(\frac{3}{4}\pi - p\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi - p\right) - \cos\left(\frac{3}{4}\pi - p\right) + \sqrt{2}$

$= \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(p) - \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin(p) - \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(p) + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin(p)\right) + \sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$

$= \sqrt{2} \cdot \cos(p) + \sqrt{2}$

$f\left(\frac{3}{4}\pi + p\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + p\right) - \cos\left(\frac{3}{4}\pi + p\right) + \sqrt{2}$

$= \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(p) + \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin(p) - \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(p) - \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin(p)\right) + \sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$

$= \sqrt{2} \cdot \cos(p) + \sqrt{2}$

$f\left(\frac{3}{4}\pi - p\right) = f\left(\frac{3}{4}\pi + p\right)$

Dus de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$ is symmetrieas van de grafiek van f.

38 **a** $f(x) = 2\cos^2(x) + \sin(2x) = 2\cos^2(x) - 1 + 1 + \sin(2x) = \cos(2x) + \sin(2x) + 1$

$f(x) = \cos(2x) + \sin(2x) + 1$ geeft $f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos(2x)$

$f'(x) = 0$ geeft $-2\sin(2x) + 2\cos(2x) = 0$

$2\cos(2x) = 2\sin(2x)$

$\cos(2x) = \sin(2x)$

$\cos(2x) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$

$2x = 2x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -2x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

geen opl. $\quad 4x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

max. is $f\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$

min. is $f\left(\frac{5}{8}\pi\right) = \cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) + 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2}$

Dus $B_f = \left[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right]$.

b $f(x) = g(x)$ geeft $2\cos^2(x) + \sin(2x) = 2\sin(2x)$

$$\begin{aligned}
&2\cos^2(x) = \sin(2x)\\
&2\cos^2(x) = 2\sin(x)\cos(x)\\
&2\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \sin(x)\\
&\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \cos\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right)\\
&x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot\pi \vee x = x - \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = -x + \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi\\
&x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot\pi \vee \text{geen opl.} \qquad \vee\ 2x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi\\
&x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot\pi \qquad\qquad\qquad \vee\ x = \tfrac{1}{4}\pi + k\cdot\pi
\end{aligned}$$

x op $[0, \pi]$ geeft $x = \tfrac{1}{4}\pi \vee x = \tfrac{1}{2}\pi$

$$\begin{aligned}
O(V) &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin(2x) - (2\cos^2(x) + \sin(2x)))\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin(2x) - (\cos(2x) + \sin(2x) + 1))\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin(2x) - \cos(2x) - \sin(2x) - 1)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(2x) - \cos(2x) - 1)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[-\tfrac{1}{2}\cos(2x) - \tfrac{1}{2}\sin(2x) - x\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = -\tfrac{1}{2}\cos(\pi) - \tfrac{1}{2}\sin(\pi) - \tfrac{1}{2}\pi - \left(-\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) - \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) - \tfrac{1}{4}\pi\right)\\
&= \tfrac{1}{2} - 0 - \tfrac{1}{2}\pi + 0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{4}\pi
\end{aligned}$$

c C is het midden van AB als $g(p) = \tfrac{1}{2}f(p)$.

Dit geeft $2\sin(2p) = \cos^2(p) + \tfrac{1}{2}\sin(2p)$

$$\begin{aligned}
&1\tfrac{1}{2}\sin(2p) = \cos^2(p)\\
&3\sin(p)\cos(p) = \cos^2(p)\\
&\cos(p) = 0 \vee 3\sin(p) = \cos(p)\\
&p = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \vee 3\cdot\frac{\sin(p)}{\cos(p)} = 1\\
&\text{vold. niet} \qquad\quad \tan(p) = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

Bladzijde 244

39 **a** $f(x) = 0$ geeft $2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$

$$\begin{aligned}
&\sin(x)(2\sin(x) + 1) = 0\\
&\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = -\tfrac{1}{2}\\
&x = k\cdot\pi \vee x = -\tfrac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = 1\tfrac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi
\end{aligned}$$

x op $[0, 2\pi]$ geeft de nulpunten $0, \pi, 2\pi, 1\tfrac{1}{6}\pi$ en $1\tfrac{5}{6}\pi$.

b $O = \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (2\sin^2(x) + \sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (2\sin^2(x) - 1 + 1 + \sin(x))\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} (-\cos(2x) + \sin(x) + 1)\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{2}\sin(2x) - \cos(x) + x\right]_0^{\pi}\\
&= -\tfrac{1}{2}\sin(2\pi) - \cos(\pi) + \pi - \left(-\tfrac{1}{2}\sin(0) - \cos(0) + 0\right) = 0 - -1 + \pi + 0 + 1 = 2 + \pi
\end{aligned}$$

c $f(x) = 2\sin^2(x) + \sin(x)$ geeft $f'(x) = 4\sin(x)\cos(x) + \cos(x)$

$f'(x) = 0$ geeft $4\sin(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$

$$\begin{aligned}
&\cos(x)(4\sin(x) + 1) = 0\\
&\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = -\tfrac{1}{4}\\
&x = \tfrac{1}{2}\pi \vee x = 1\tfrac{1}{2}\pi \vee \sin(x) = -\tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

$x = \tfrac{1}{2}\pi$ geeft $f(x) = 2\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 2\cdot 1 + 1 = 3$

$x = 1\tfrac{1}{2}\pi$ geeft $f(x) = 2\sin^2\left(1\tfrac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(1\tfrac{1}{2}\pi\right) = 2\cdot 1 - 1 = 1$

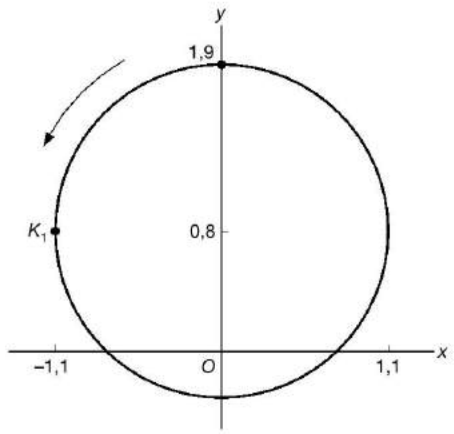
$\sin(x) = -\tfrac{1}{4}$ geeft $f(x) = 2\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right)^2 - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{8}$

$f(x) = p$ heeft precies vier oplossingen voor $-\tfrac{1}{8} < p < 0 \vee 0 < p < 1$.

d De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) geeft lengte $= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (4\sin(x)\cos(x) + \cos(x))^2}\,\mathrm{d}x \approx 11{,}07$.

40 **a** $v = 0{,}5$ m/s, dus per seconde $\dfrac{0{,}5}{2\pi \cdot 1{,}1}$ gedeelte van een cirkel, dus $\dfrac{0{,}5}{2\pi \cdot 1{,}1} \cdot 2\pi$ rad/s $= \frac{5}{11}$ rad/s.

b



De omlooptijd is $\dfrac{2\pi}{\frac{5}{11}} = 4{,}4\pi$ seconde, dus op $t = 2{,}2\pi$ seconde bevindt de voorste koker (K_1) zich in (1,1; 0,8).

Dus $\begin{cases} x = 1{,}1\cos\left(\frac{5}{11}\left(t - 2{,}2\pi\right)\right) \\ y = 0{,}8 + 1{,}1\sin\left(\frac{5}{11}\left(t - 2{,}2\pi\right)\right) \end{cases}$ met t in seconden en x en y in meter.

c De volgende koker (K_2) loopt $\frac{1}{6}$ cirkel achter op K_1, dus K_2 bevindt zich op $t = 2{,}2\pi + \frac{1}{6} \cdot 4{,}4\pi = 2\frac{14}{15}\pi$ seconde in (1,1; 0,8).

Dus $\begin{cases} x = 1{,}1\cos\left(\frac{5}{11}\left(t - 2\frac{14}{15}\pi\right)\right) \\ y = 0{,}8 + 1{,}1\sin\left(\frac{5}{11}\left(t - 2\frac{14}{15}\pi\right)\right) \end{cases}$ met t in seconden en x en y in meter.

d Los op $0{,}8 + 1{,}1\sin\left(\frac{5}{11}t\right) \leq 0$.
Voer in $y_1 = 0{,}8 + 1{,}1\sin\left(\frac{5}{11}t\right)$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 8{,}703\ldots$ en $x = 12{,}031\ldots$
De koker blijft per omwenteling $12{,}031\ldots - 8{,}703\ldots \approx 3{,}3$ seconden onder water.

41 **a** u_1 en u_2 hebben dezelfde frequentie, dus $c = 880\pi$.
Voer in $y_1 = 0{,}05\sin(880\pi x) + 0{,}1\sin(880\pi x - 0{,}4\pi)$.
De optie maximum geeft $x \approx 0{,}00088$ en $y \approx 0{,}12$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0{,}000313$.
Dus $u_4 = 0{,}12\sin(880\pi(t - 0{,}000313)) = 0{,}12\sin(880\pi t - 0{,}87)$.

b De periodes van u_1, u_2 en u_3 zijn niet gelijk, dus u is niet te schrijven in de vorm $u = b\sin(ct - d)$, dus de trilling is geen harmonische trilling.

	$2u_1 = 0{,}1\sin(880\pi t)$	$u_2 = 0{,}1\sin(880\pi t - 0{,}4\pi)$	$u_3 = 0{,}2\sin(884\pi t)$
in $[0, 2\pi]$	880π periodes	880π periodes	884π periodes
in $[0, \frac{1}{2}]$	220 periodes	220 periodes	221 periodes

Dus de periode is $\frac{1}{2}$ seconde.

Bladzijde 245

42 **a** P haalt Q in als de draaiingshoeken van P en Q gelijk zijn.
Dit geeft $\frac{11}{10}t = t + \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$$\frac{1}{10}t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$t = 6\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 20\pi$$

Dus voor het eerst na $6\frac{2}{3}\pi$ seconden.

b $PQ = \sqrt{\left(5\cos\left(\frac{11}{10}t\right) - 5\cos\left(t + \frac{2}{3}\pi\right)\right)^2 + \left(5\sin\left(\frac{11}{10}t\right) - 5\sin\left(t + \frac{2}{3}\pi\right)\right)^2}$

Voer in $y_1 = \sqrt{\left(5\cos\left(\frac{11}{10}x\right) - 5\cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)\right)^2 + \left(5\sin\left(\frac{11}{10}x\right) - 5\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)\right)^2}$ en $y_2 = 1$.

Intersect geeft $x = 18{,}940\ldots$
Dus na 18,94 seconden.

c M in O als geldt dat het verschil van de draaiingshoeken van P en Q gelijk is aan π.
Dit geeft $\frac{11}{10}t - \left(t + \frac{2}{3}\pi\right) = \pi + k \cdot 2\pi$

$$\frac{1}{10}t = 1\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = 16\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 20\pi$$

Dus voor het eerst na $16\frac{2}{3}\pi$ seconden.

d De bewegingsvergelijkingen van M zijn $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\left(5\cos\left(\frac{11}{10}t\right) + 5\cos\left(t + \frac{2}{3}\pi\right)\right) \\ y(t) = \frac{1}{2}\left(5\sin\left(\frac{11}{10}t\right) + 5\sin\left(t + \frac{2}{3}\pi\right)\right) \end{cases}$

Dit geeft $\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{55}{10}\sin\left(\frac{11}{10}t\right) - 5\sin\left(t + \frac{2}{3}\pi\right)\right) \\ y'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{55}{10}\cos\left(\frac{11}{10}t\right) + 5\cos\left(t + \frac{2}{3}\pi\right)\right) \end{cases}$

$$v(t) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{55}{10}\sin\left(\tfrac{11}{10}t\right) - 5\sin\left(t + \tfrac{2}{3}\pi\right)\right)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{55}{10}\cos\left(\tfrac{11}{10}t\right) + 5\cos\left(t + \tfrac{2}{3}\pi\right)\right)\right)^2}$$

$$v\left(16\tfrac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{55}{10}\sin\left(\tfrac{11}{10} \cdot 16\tfrac{2}{3}\pi\right) - 5\sin\left(16\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{2}{3}\pi\right)\right)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{55}{10}\cos\left(\tfrac{11}{10} \cdot 16\tfrac{2}{3}\pi\right) + 5\cos\left(16\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{2}{3}\pi\right)\right)\right)^2} = 0{,}25$$

Dus de snelheid waarmee M het punt O passeert is 0,25.

43 **a** $y = 0$ geeft $\cos(3t) = 0$

$$3t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$t = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \tfrac{1}{3}\pi$$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft het punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(-1, 0)$.

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft het punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -2\sin(2t) \\ y'(t) = -3\sin(3t) \end{cases}$ en dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ -3\sin(3t) \end{pmatrix}$.

$$\vec{v}\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = \begin{pmatrix} -2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ -3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) = \begin{pmatrix} -2\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right) \\ -3\sin\left(2\frac{1}{2}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{2}{10} = \tfrac{1}{5}$$

Dus $\varphi \approx 78°$.

b $x(t) = 0$ geeft $\cos(2t) = 0$

$$2t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$t = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

$t = \frac{1}{4}\pi$ geeft het punt $\left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft het punt $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

$$\vec{v}\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} -2 \cdot -1 \\ -3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$ en k door $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

Dus k: $y = -\frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c De baansnelheid is $\left|\vec{v}\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \cdot 0 \\ -3 \cdot -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = 3$.

d $d(A, B) = 1$, dus A op de lijn $y = \frac{1}{2}$.
$\cos(3t) = \frac{1}{2}$
$3t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$t = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
t op $[0, \pi]$ geeft $t = \frac{1}{9}\pi$, $t = \frac{7}{9}\pi$ en $t = \frac{5}{9}\pi$.

$x\left(\frac{1}{9}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) = 0{,}766\ldots$

$x\left(\frac{7}{9}\pi\right) = \cos\left(\frac{14}{9}\pi\right) = 0{,}173\ldots$

$x\left(\frac{5}{9}\pi\right) = \cos\left(\frac{10}{9}\pi\right) = -0{,}939\ldots$
Dus $p \approx -0{,}94 \vee p \approx 0{,}17 \vee p \approx 0{,}77$.

44 **a** $y = 0$ geeft $2\cos(2t) = 0$
$\cos(2t) = 0$
$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
$t = -\frac{1}{4}\pi$ geeft het punt $\left(1\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$.

$\begin{cases} x(t) = 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ y(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -3\sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ y'(t) = -4\sin(2t) \end{cases}$

Dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -3\sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ -4\sin(2t) \end{pmatrix}$.

$\vec{v}\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} -3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -4 \end{pmatrix}$

$\tan(\varphi) = \dfrac{-4}{1\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ geeft $\varphi = -62{,}061\ldots°$
Dus de hoek waaronder de baan de positieve x-as snijdt is ongeveer $62{,}1°$.

b $\left|\vec{v}\left(1\frac{1}{4}\pi\right)\right| = \sqrt{\left(1\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{\frac{41}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{82}$

Dus de baansnelheid waarmee P de positieve x-as passeert is $\frac{1}{2}\sqrt{82}$.

c $x = 0$ geeft $3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) = 0$
$t + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$t = k \cdot \pi$
$t = 0$ geeft $y = 2$, dus de baan snijdt de y-as in het punt $(0, 2)$.
Dus de vergelijking van de parabool is van de vorm $y = ax^2 + 2$.

$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + 2 \\ t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft het punt } (-3, -2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot (-3)^2 + 2 = -2 \\ 9a = -4 \\ a = -\frac{4}{9} \end{array}$

Dus $y = -\frac{4}{9}x^2 + 2$.
Substitutie van $x = 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $y = 2\cos(2t)$ in $y = -\frac{4}{9}x^2 + 2$ geeft

$2\cos(2t) = -\frac{4}{9} \cdot \left(3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right)\right)^2 + 2$

$2\cos(2t) = -\frac{4}{9} \cdot 9\left(\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right)\right)^2 + 2$
$2\cos(2t) = -4(\sin(t + \pi))^2 + 2$
$\cos(2t) = -2(-\sin(t))^2 + 1$
$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$
En dit klopt voor elke t, dus de baan van P is een deel van de parabool $y = -\frac{4}{9}x^2 + 2$.

d $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \vec{p}_L = \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \end{pmatrix}$

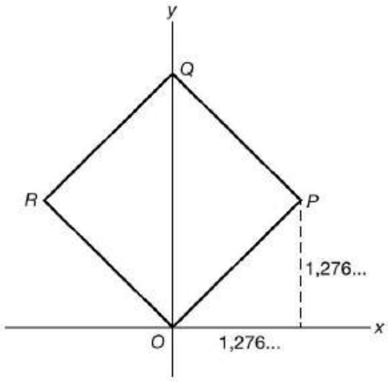
$\vec{q} = \vec{p} + \vec{p}_L = \begin{pmatrix} 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) - 2\cos(2t) \\ 2\cos(2t) + 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \end{pmatrix}$

Dus de bewegingsvergelijkingen van Q zijn $\begin{cases} x_Q = 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) - 2\cos(2t) \\ y_Q = 2\cos(2t) + 3\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) \end{cases}$

e Q op de y-as geeft $x_Q = 0$

$$3\cos\left(t + \tfrac{1}{2}\pi\right) - 2\cos(2t) = 0$$
$$3\cos\left(t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 2\cos(2t)$$

Voer in $y_1 = 3\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $y_2 = 2\cos(2x)$.
Intersect geeft onder andere $x = -0{,}439\ldots$
Dus $t = -0{,}439\ldots$ en dit geeft $P(1{,}276\ldots; 1{,}276\ldots)$.
$O(OPQR) = OP^2 = 1{,}276\ldots^2 + 1{,}276\ldots^2 \approx 3{,}26$.



K Voortgezette integraalrekening

Bladzijde 246

45 **a** $F(x) = \int \frac{x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{x-2+4}{x^2-4x+8}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+8} + \frac{4}{x^2-4x+8}\right)dx$

$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+8} + \frac{4}{(x-2)^2-4+8}\right)dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+8} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}(x-2)\right)^2+1}\right)dx$

$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+8} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8) + 2\arctan\left(\frac{1}{2}x-1\right) + c$

b $F(x) = \int 3x^2\sin(x^3)\,dx = \int \sin(x^3)\,dx^3 = -\cos(x^3) + c$

c $F(x) = \int \cos(x)\cdot\sqrt[3]{1+\sin(x)}\,dx = \int \sqrt[3]{1+\sin(x)}\,d\sin(x) = \int \sqrt[3]{1+u}\,du = \int (1+u)^{\frac{1}{3}}\,du$

$= \frac{3}{4}(1+u)^{1\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{4}(1+u)\cdot\sqrt[3]{1+u} + c = \frac{3}{4}(1+\sin(x))\cdot\sqrt[3]{1+\sin(x)} + c$

d $F(x) = \int (2x+4)\cdot\cos(2x)\,dx = \int (2x+4)\,d\tfrac{1}{2}\sin(2x) = (2x+4)\cdot\tfrac{1}{2}\sin(2x) - \int \tfrac{1}{2}\sin(2x)\,d(2x+4)$

$= (x+2)\sin(2x) - \int \sin(2x)\,dx = (x+2)\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + c$

e $F(x) = \int \frac{2x+1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \left(\frac{2x}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx = \int -\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,d(16-x^2) + \int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}x\right)^2}}\,dx$

$= \int -\frac{1}{\sqrt{u}}\,du + \arcsin\left(\tfrac{1}{4}x\right) = -2\sqrt{u} + \arcsin\left(\tfrac{1}{4}x\right) + c = -2\sqrt{16-x^2} + \arcsin\left(\tfrac{1}{4}x\right) + c$

f $F(x) = \int \frac{2x+4}{\sqrt{-x^2-4x-3}}\,dx = \int \frac{-1}{\sqrt{-x^2-4x-3}}\,d(-x^2-4x-3) = \int \frac{-1}{\sqrt{u}}\,du = -2\sqrt{u} + c = -2\sqrt{-x^2-4x-3} + c$

g $f(x) = \frac{2x+7}{x^2+6x+8} = \frac{2x+7}{(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x+2)}{(x+2)(x+4)} = \frac{(A+B)x+4A+2B}{(x+2)(x+4)}$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 4A+2B=7 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2A+2B=4 \\ 4A+2B=7 \end{cases} -$$
$$-2A = -3$$
$$\left.\begin{array}{l} A = 1\frac{1}{2} \\ A+B=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2}+B=2 \\ B=\frac{1}{2} \end{array}$$

$f(x) = \frac{1\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+4}$ geeft $F(x) = 1\frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+4| + c$

46 **a** $f(x) = 4\sin^2(x)\cos(x)$ geeft
$f'(x) = 8\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\cos(x) + 4\sin^2(x)\cdot -\sin(x) = 8\sin(x)\cos^2(x) - 4\sin^3(x)$
$f(x) = 0$ geeft $4\sin^2(x)\cos(x) = 0$
$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0$
$x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$
$f'(\pi) = 8\cdot 0\cdot(-1)^2 - 4\cdot 0 = 0$
Dus de grafiek raakt de x-as in $(\pi, 0)$.

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 8\cdot 1\cdot 0 - 4\cdot 1 = -4$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -4x + b \\ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0, \text{ dus } A\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4\cdot\frac{1}{2}\pi + b = 0 \\ b = 2\pi \end{array}$$

Dus de raaklijn is k: $y = -4x + 2\pi$.

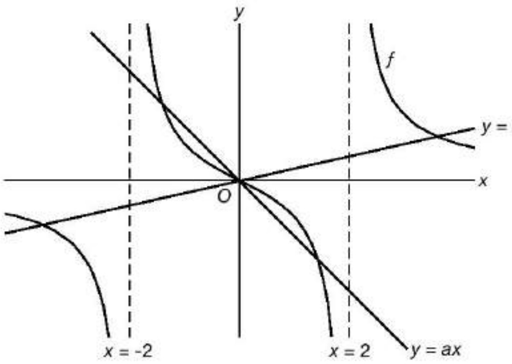
c $O(V) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 4\sin^2(x)\cos(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} 4\sin^2(x)\,d\sin(x) = \left[\frac{4}{3}\sin^3(x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3}\cdot 1 - \frac{4}{3}\cdot 0 = 1\frac{1}{3}$

d Voer in $y_1 = \sqrt{1 + (8\sin(x)\cos^2(x) - 4\sin^3(x))^2}$.

De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} y_1\,dx = 3{,}576\ldots$

De omtrek $= 3{,}576... + \frac{1}{2}\pi \approx 5{,}15$.

47 **a** Voer in $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.



$f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 4)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \dfrac{2x^2 - 8 - 4x^2}{(x^2 - 4)^2} = \dfrac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2}$

$f'(0) = \dfrac{-8}{(-4)^2} = -\frac{1}{2}$

De lijn $y = ax$ snijdt de grafiek van f in precies drie punten voor $a < -\frac{1}{2} \vee a > 0$.

b $f(x) = \frac{2}{3}$ geeft $\dfrac{2x}{x^2 - 4} = \dfrac{2}{3}$

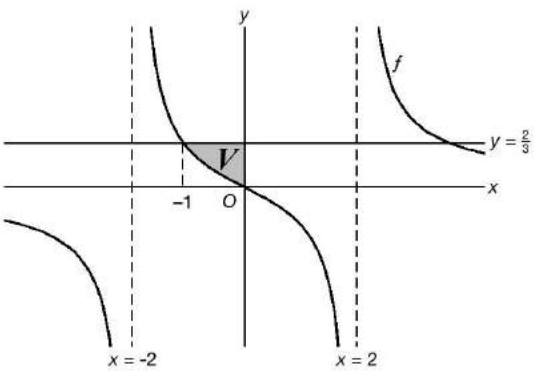
$2x^2 - 8 = 6x$

$2x^2 - 6x - 8 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x + 1)(x - 4) = 0$

$x = -1 \vee x = 4$



$O(V) = \int_{-1}^{0}\left(\frac{2}{3} - \dfrac{2x}{x^2 - 4}\right)dx = \left[\frac{2}{3}x - \ln|x^2 - 4|\right]_{-1}^{0} = 0 - \ln(4) - \left(-\frac{2}{3} - \ln(3)\right) = -\ln(4) + \frac{2}{3} + \ln(3) = \frac{2}{3} + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

48 **a** $f(x) = \dfrac{x^3 + 10x}{x^2 + 1}$ geeft

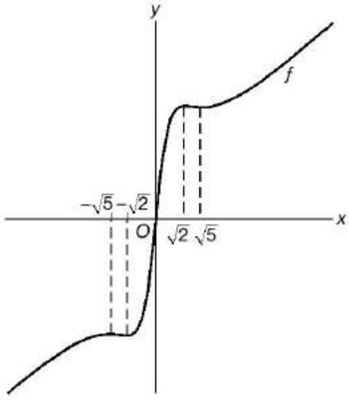
$f'(x) = \dfrac{(x^2 + 1)\cdot(3x^2 + 10) - (x^3 + 10x)\cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{3x^4 + 10x^2 + 3x^2 + 10 - 2x^4 - 20x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{x^4 - 7x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

$(x^2 - 2)(x^2 - 5) = 0$

$x^2 = 2 \vee x^2 = 5$

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$



$$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^3 + 10 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{2\sqrt{2} + 10\sqrt{2}}{2+1} = \frac{12\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2})^3 + 10 \cdot -\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{-2\sqrt{2} - 10\sqrt{2}}{2+1} = \frac{-12\sqrt{2}}{3} = -4\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{5}) = \frac{(\sqrt{5})^3 + 10 \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2 + 1} = \frac{5\sqrt{5} + 10\sqrt{5}}{5+1} = \frac{15\sqrt{5}}{6} = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$f(-\sqrt{5}) = \frac{(-\sqrt{5})^3 + 10 \cdot -\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2 + 1} = \frac{-5\sqrt{5} - 10\sqrt{5}}{5+1} = \frac{-15\sqrt{5}}{6} = -2\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

De toppen zijn $(-\sqrt{5}, -2\tfrac{1}{2}\sqrt{5})$, $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$, $(\sqrt{5}, 2\tfrac{1}{2}\sqrt{5})$ en $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

b Stel de formule van de raaklijn is $y = ax + b$ met $a = f'(1) = \dfrac{1 - 7 + 10}{(1+1)^2} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x + b \\ f(1) = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}, \text{dus } A(1, 5\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 + b = 5\frac{1}{2} \\ b = 4\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus de formule van de raaklijn is $y = x + 4\tfrac{1}{2}$.

c $f(x) = p$ heeft precies één oplossing voor $p < -4\sqrt{2} \vee -2\tfrac{1}{2}\sqrt{5} < p < 2\tfrac{1}{2}\sqrt{5} \vee p > 4\sqrt{2}$.

d $x^2 + 1 \,/\, x^3 + 10x \,\backslash\, x$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 + \quad x} \; - \\ \quad\; 9x \end{array}$$

$$f(x) = x + \frac{9x}{x^2 + 1}$$

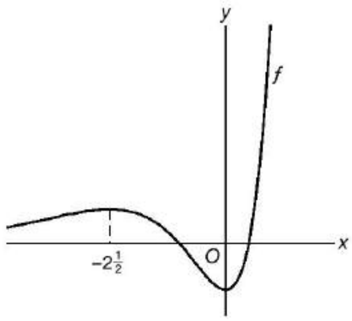
$$O(V) = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(x + \frac{9x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(x + 4\tfrac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 + 4\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^3$$

$$= 4\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}\ln(10) - 0 = 4\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}\ln(10)$$

49 **a** $f(x) = (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = (4x + 1)\mathrm{e}^x + (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x = (2x^2 + 5x)\mathrm{e}^x$

$f'(x) = 0$ geeft $(2x^2 + 5x)\mathrm{e}^x = 0$

$$2x^2 + 5x = 0$$
$$x(2x + 5) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -2\tfrac{1}{2}$$



$$f(0) = -1 \text{ en } f(-2\tfrac{1}{2}) = 9\,\mathrm{e}^{-2\frac{1}{2}} = \frac{9}{\mathrm{e}^{2\frac{1}{2}}} = \frac{9}{\mathrm{e}^2 \cdot \sqrt{\mathrm{e}}}$$

Dus de toppen zijn $(0, -1)$ en $\left(-2\tfrac{1}{2}, \dfrac{9}{\mathrm{e}^2 \cdot \sqrt{\mathrm{e}}}\right)$.

b $f(x) = 0$ geeft $(2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x = 0$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$
$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$$
$$x = \frac{-1+3}{4} = \tfrac{1}{2} \vee x = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$\int (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int (2x^2 + x - 1)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(2x^2 + x - 1) =$$
$$(2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x - \int (4x + 1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x - \int (4x + 1)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x =$$
$$(2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x - (4x + 1)\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(4x + 1) = (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x - (4x + 1)\mathrm{e}^x + \int 4\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$$
$$(2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x - (4x + 1)\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^x = (2x^2 - 3x + 2)\mathrm{e}^x$$
$$O(V) = -\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\left[(2x^2 - 3x + 2)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = -(\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2} + 2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + (2 + 3 + 2)\mathrm{e}^{-1} = -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 7\mathrm{e}^{-1} = \frac{7}{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}}$$

c $-\int_{-1}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{7}{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}}\right)$ geeft $-[(2x^2 - 3x + 2)\mathrm{e}^x]_{-1}^{p} = \frac{7}{2\mathrm{e}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$

$$-(2p^2 - 3p + 2)\mathrm{e}^p + \frac{7}{\mathrm{e}} = \frac{7}{2\mathrm{e}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$$
$$-(2p^2 - 3p + 2)\mathrm{e}^p = -\frac{7}{2\mathrm{e}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$$
$$(2p^2 - 3p + 2)\mathrm{e}^p = \frac{7}{2\mathrm{e}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$$

Voer in $y_1 = (2x^2 - 3x + 2)\mathrm{e}^x$ en $y_2 = \frac{7}{2\mathrm{e}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$.

Intersect geeft $x = -0{,}1130\ldots$

Dus $p \approx -0{,}113$.

d booglengte $= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (2x^2 + 5x)^2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$

De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) geeft $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (2x^2 + 5x)^2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = 2{,}6169...$

Dus omtrek$(V) = 1\tfrac{1}{2} + 2{,}6169... \approx 4{,}117$.

Bladzijde 247

50 **a** $F(x) = \int x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int \ln(x)\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{4}x^4\right) = \tfrac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \tfrac{1}{4}x^4\,\mathrm{d}\ln(x) = \tfrac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \tfrac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$= \tfrac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \tfrac{1}{4}x^3\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4\ln(x) - \tfrac{1}{16}x^4 + c$$

b $F(x) = \int x\ln(x^3)\,\mathrm{d}x = \int 3x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 3\ln(x)\,\mathrm{d}\tfrac{1}{2}x^2 = 3\ln(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - \int \tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}\,3\ln(x)$

$$= 1\tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = 1\tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \int 1\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = 1\tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \tfrac{3}{4}x^2 + c$$

c $F_n(x) = \int x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int \ln(x)\,\mathrm{d}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\mathrm{d}\ln(x)$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \int \frac{1}{n+1}x^n\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c$$

d Uit c volgt $\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2 + c$.

$F_m(x) = \int x\ln(x^m)\,\mathrm{d}x = \int mx\ln(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}mx^2\ln(x) - \tfrac{1}{4}mx^2 + c$

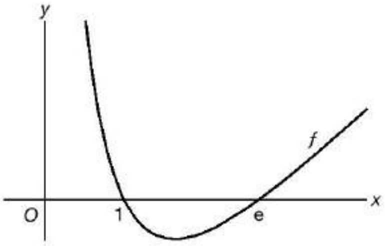
51 **a** $f_1(x) = 2\ln^2(x) - 2\ln(x)$

$f_1(x) = 0$ geeft $2\ln^2(x) - 2\ln(x) = 0$

$2\ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$

$\ln(x) = 0 \vee \ln(x) = 1$

$x = 1 \vee x = \mathrm{e}$



$$\int 2\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln^2(x) - \int 2x\,\mathrm{d}\ln^2(x) = 2x\ln^2(x) - \int 2x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2x\ln^2(x) - \int 4\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2x\ln^2(x) - 4(x\ln(x) - x) + c = 2x\ln^2(x) - 4x\ln(x) + 4x + c$$

$$\int 2\ln(x)\,\mathrm{d}x = 2(x\ln(x) - x) = 2x\ln(x) - 2x$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (2\ln^2(x) - 2\ln(x))\,\mathrm{d}x = \left[2x\ln^2(x) - 4x\ln(x) + 4x - (2x\ln(x) - 2x)\right]_1^{\mathrm{e}}$$

$$= \left[2x\ln^2(x) - 6x\ln(x) + 6x\right]_1^{\mathrm{e}} = 2\mathrm{e} - 6\mathrm{e} + 6\mathrm{e} - (0 - 0 + 6) = 2\mathrm{e} - 6$$

De oppervlakte is $-(2\mathrm{e} - 6) = 6 - 2\mathrm{e}$.

b $f_p(x) = 0$ geeft $2\ln^2(x) - 2p\ln(x) = 0$

$2\ln(x)(\ln(x) - p) = 0$

$\ln(x) = 0 \vee \ln(x) = p$

$x = 1 \vee x = \mathrm{e}^p$

Uit a volgt $F_p(x) = 2x\ln^2(x) - 4x\ln(x) + 4x - 2px\ln(x) + 2px + c$

$$\int_1^{\mathrm{e}^p} f_p(x)\,\mathrm{d}x = \left[2x\ln^2(x) - 4x\ln(x) + 4x - 2px\ln(x) + 2px\right]_1^{\mathrm{e}^p}$$

$$= 2\mathrm{e}^p \cdot p^2 - 4\mathrm{e}^p \cdot p + 4\mathrm{e}^p - 2p\mathrm{e}^p \cdot p + 2p\mathrm{e}^p - (0 - 0 + 4 - 0 + 2p)$$

$$= 2p^2\mathrm{e}^p - 4p\mathrm{e}^p + 4\mathrm{e}^p - 2p^2\mathrm{e}^p + 2p\mathrm{e}^p - 4 - 2p = -2p\mathrm{e}^p + 4\mathrm{e}^p - 4 - 2p = (4 - 2p)\mathrm{e}^p - 4 - 2p$$

$f_p(x) \leq 0$ voor $1 \leq x \leq \mathrm{e}^p$, dus opp $= (2p - 4)\mathrm{e}^p + 2p + 4$.

opp $= 8$ geeft $(2p - 4)\mathrm{e}^p + 2p + 4 = 8$

$(2p - 4)\mathrm{e}^p + 2p - 4 = 0$

$(2p - 4)(\mathrm{e}^p + 1) = 0$

$2p - 4 = 0 \vee \mathrm{e}^p + 1 = 0$

$2p = 4$ geen opl.

$p = 2$

Dus voor $p = 2$.

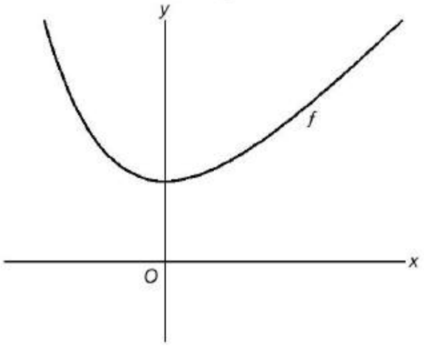
52 **a** $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$ geeft $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \mathrm{e}^{-x} = 0$

$\mathrm{e}^{-x} = 1$

$-x = 0$

$x = 0$



min. is $f(0) = 1$

$B_f = [1, \rightarrow\rangle$

b $O(V_p) = 6$ geeft $\int_{-p}^{p} (x + e^{-x})\,dx = 6$

$\left[\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\right]_{-p}^{p} = 6$

$\frac{1}{2}p^2 - e^{-p} - \left(\frac{1}{2}p^2 - e^{p}\right) = 6$

$\frac{1}{2}p^2 - e^{-p} - \frac{1}{2}p^2 + e^{p} = 6$

$e^{p} - 6 - e^{-p} = 0$

$(e^{p})^2 - 6e^{p} - 1 = 0$

Stel $e^{p} = u$.

$u^2 - 6u - 1 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 40$

$u = \dfrac{6 + 2\sqrt{10}}{2} \vee u = \dfrac{6 - 2\sqrt{10}}{2}$

$u = 3 + \sqrt{10} \vee u = 3 - \sqrt{10}$

$e^{p} = 3 + \sqrt{10} \vee e^{p} = 3 - \sqrt{10}$

$p = \ln\left(3 + \sqrt{10}\right)$ geen opl.

Dus $p = \ln(3 + \sqrt{10})$.

c $I = \pi \int_{-1}^{0} (f(x))^2\,dx = \pi \int_{-1}^{0} (x + e^{-x})^2\,dx = \pi \int_{-1}^{0} (x^2 + 2xe^{-x} + e^{-2x})\,dx$

$\int 2xe^{-x}\,dx = \int 2x\,d{-e^{-x}} = -2xe^{-x} + \int e^{-x}\,d\,2x = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

$I = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - 2xe^{-x} - 2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{0} = \pi\left(0 - 0 - 2 - \frac{1}{2}\right) - \pi\left(-\frac{1}{3} + 2e - 2e - \frac{1}{2}e^2\right)$

$= \pi\left(-2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^2\right) = \left(\frac{1}{2}e^2 - 2\frac{1}{6}\right)\pi$

53 **a** $F(x) = \int \dfrac{1}{e^{x} + 1}\,dx = \int \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\,dx = \int \dfrac{-1}{1 + e^{-x}}\,d(1 + e^{-x}) = \int -\dfrac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln(1 + e^{-x}) + c$

b $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x}$ geeft

$F'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^{2x} + (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot 2e^{2x}$

$= (3ax^2 + 2bx + c)e^{2x} + (2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d)e^{2x}$

$(2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + c + 2d)e^{2x}$

$F'(x) = f(x)$ geeft $\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ 2b + 2c = -3 \\ c + 2d = 2 \end{cases}$ en dit geeft $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1\frac{1}{2}a \\ c = -1\frac{1}{2} - b \\ d = 1 - \frac{1}{2}c \end{cases}$

Hieruit volgt $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}, c = -\frac{3}{4}$ en $d = 1\frac{3}{8}$.

Dus $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1\frac{3}{8}\right)e^{2x} + c$.

c $F(x) = \int \dfrac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)}\,dx = \int \ln(\sin(x))\,d\tan(x) = \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - \int \tan(x)\,d\ln(\sin(x))$

$= \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - \int \tan(x) \cdot \dfrac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,dx = \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - \int \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \dfrac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,dx$

$= \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - \int 1\,dx = \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - x + c$

d $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} - \int x\,d\sqrt{1 - x^2} = x\sqrt{1 - x^2} - \int x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} - \int \dfrac{-x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

$= x\sqrt{1 - x^2} - \int \dfrac{1 - x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} - \int \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx + \int \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

$= x\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2}\,dx + \arcsin(x)$

$$\text{Dus } \int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin(x)$$
$$2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)$$
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin(x)$$
$$F(x) = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin(x) + c$$

e $\sqrt{x+16} = u$ geeft $x = u^2 - 16$

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{x+16}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2-16}\,d(u^2-16) = \int \frac{u}{u^2-16}2u\,du = \int \frac{2u^2}{u^2-16}\,du = \int \frac{2u^2-32+32}{u^2-16}\,du$$
$$= \int \left(2 + \frac{32}{u^2-16}\right)du$$
$$\frac{32}{u^2-16} = \frac{32}{(u+4)(u-4)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-4} = \frac{A(u-4)+B(u+4)}{(u+4)(u-4)} = \frac{(A+B)u - 4A + 4B}{(u+4)(u-4)}$$
$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A+4B=32 \end{cases} \left|\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{matrix}\right| \text{ geeft } \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=8 \end{cases}$$
$$2B = 8 \quad +$$
$$\left.\begin{matrix} B=4 \\ A+B=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} A+4=0 \\ A=-4 \end{matrix}$$
$$F(x) = \int\left(2 - \frac{4}{u+4} + \frac{4}{u-4}\right)du = 2u - 4\ln|u+4| + 4\ln|u-4| + c$$
$$= 2\sqrt{x+16} - 4\ln\left|\sqrt{x+16}+4\right| + 4\ln\left|\sqrt{x+16}-4\right| + c$$

Bladzijde 248

54 $x = 11$ geeft $t^2 - 4 = 11$
$$t^2 = 15$$
$$t = \sqrt{15} \vee t = -\sqrt{15}$$
Het vlakdeel wordt in negatieve richting omlopen.
$$\int_{t=-\sqrt{15}}^{t=\sqrt{15}} y\,dx = \int_{t=-\sqrt{15}}^{t=\sqrt{15}} t\ln(t+4)\,d(t^2-4) = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} 2t^2\ln(t+4)\,dt$$
De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft $\int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} 2x^2\ln(x+4)\,dx = 67{,}63\ldots$

Dus de oppervlakte van het omsloten vlakdeel is 67,6.

55 **a** $y = 0$ geeft $2\sin(\pi t) = 0$
$$\sin(\pi t) = 0$$
$$\pi t = k\cdot\pi$$
$$t = k$$
$t = -1$ geeft $x = 4\cdot(-1)^2 = 4$
$t = 0$ geeft $x = 0$
$t = 1$ geeft $x = 4$
$t = \frac{1}{2}$ geeft het punt $(1, 2)$, dus de kromme wordt linksom omlopen.
$$O(V) = \int_{t=-1}^{t=1} y\,dx = \int_{t=-1}^{t=1} 2\sin(\pi t)\,d4t^2 = \int_{-1}^{1} 2\sin(\pi t)\cdot 8t\,dt = \int_{-1}^{1} 16t\sin(\pi t)\,dt = \int_{t=-1}^{t=1} 16t\cdot -\frac{1}{\pi}\,d\cos(\pi t)$$
$$= \int_{t=-1}^{t=1} -\frac{16t}{\pi}\,d\cos(\pi t) = \left[-\frac{16t}{\pi}\cdot\cos(\pi t)\right]_{-1}^{1} - \int_{t=-1}^{t=1} \cos(\pi t)\,d{-\frac{16t}{\pi}}$$
$$= \left[-\frac{16t}{\pi}\cdot\cos(\pi t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -\frac{16}{\pi}\cos(\pi t)\,dt = \left[-\frac{16t}{\pi}\cdot\cos(\pi t)\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{16}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\right]_{-1}^{1}$$
$$= \left[-\frac{16t}{\pi}\cdot\cos(\pi t) + \frac{16}{\pi^2}\cdot\sin(\pi t)\right]_{-1}^{1} = -\frac{16}{\pi}\cdot\cos(\pi) + \frac{16}{\pi^2}\cdot\sin(\pi) - \left(\frac{16}{\pi}\cdot\cos(-\pi) + \frac{16}{\pi^2}\cdot\sin(-\pi)\right)$$
$$= \frac{16}{\pi} + 0 - \left(-\frac{16}{\pi} + 0\right) = \frac{32}{\pi}$$

b $I(L) = \pi \int\limits_{t=0}^{t=1} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_{t=0}^{t=1} 4\sin^2(\pi t)\,\mathrm{d}4t^2 = \pi \int\limits_0^1 4\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\pi t)\right) \cdot 8t\,\mathrm{d}t = \pi \int\limits_0^1 (16t - 16t\cos(2\pi t))\mathrm{d}t$

$= \pi \int\limits_0^1 16t\,\mathrm{d}t - \pi \int\limits_0^1 16t\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \pi\left[8t^2\right]_0^1 - \pi \int\limits_{t=0}^{t=1} 16t \cdot \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\sin(2\pi t)$

$= \pi\left[8t^2\right]_0^1 - \pi \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{8t}{\pi}\mathrm{d}\sin(2\pi t) = \left[8\pi t^2\right]_0^1 - \pi\left[\frac{8t}{\pi} \cdot \sin(2\pi t)\right]_0^1 + \pi \int\limits_{t=0}^{t=1} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}\frac{8t}{\pi}$

$= \left[8\pi t^2\right]_0^1 - \left[8t\sin(2\pi t)\right]_0^1 + \pi \int\limits_0^1 \frac{8}{\pi}\sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t$

$= \left[8\pi t^2 - 8t\sin(2\pi t)\right]_0^1 + \pi\left[\frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot -\cos(2\pi t)\right]_0^1 = \left[8\pi t^2 - 8t\sin(2\pi t) - \frac{4}{\pi} \cdot \cos(2\pi t)\right]_0^1$

$= 8\pi - 0 - \frac{4}{\pi} - \left(0 - 0 - \frac{4}{\pi}\right) = 8\pi$

56 **a** $x(t) = 0$ geeft $4\sin(t) = 0$

$t = k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(4, 4)$ en $t = \frac{1}{4}\pi$ geeft het punt $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$.

Dus V wordt in positieve richting omlopen.

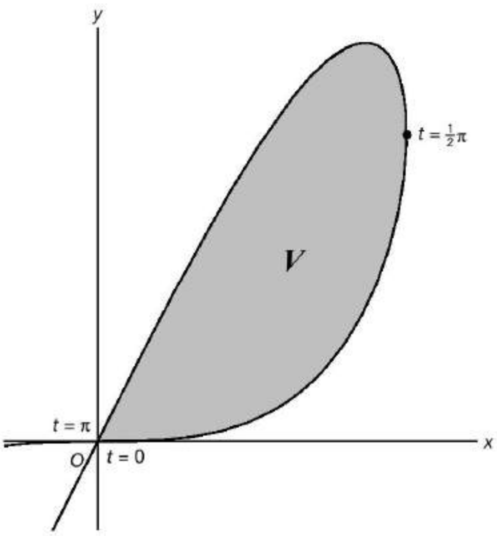
$O(V) = \int\limits_{t=\pi}^{t=0} y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{t=\pi}^{t=0} (4\sin(t) - 2\sin(2t))\,\mathrm{d}\,4\sin(t) = \int\limits_{\pi}^{0} (4\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t)) \cdot 4\cos(t)\,\mathrm{d}t$

$= \int\limits_{\pi}^{0} (16\sin(t)\cos(t) - 16\sin(t)\cos^2(t))\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\pi}^{0} 16\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{\pi}^{0} 16\sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$

$= \int\limits_{\pi}^{0} 8\sin(2t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{t=\pi}^{t=0} 16\cos^2(t)\,\mathrm{d}\cos(t) = \left[-4\cos(2t)\right]_{\pi}^{0} + \left[5\tfrac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{\pi}^{0}$

$= -4\cos(0) + 4\cos(2\pi) + 5\tfrac{1}{3}\cos^3(0) - 5\tfrac{1}{3}\cos^3(\pi) = -4 + 4 + 5\tfrac{1}{3} \cdot 1^3 - 5\tfrac{1}{3} \cdot (-1)^3 = 10\tfrac{2}{3}$

b x is maximaal 4 voor $t = \frac{1}{2}\pi$.



$I(L) = \pi \int\limits_{t=\pi}^{t=\frac{1}{2}\pi} y^2\,\mathrm{d}x - \pi \int\limits_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_{t=\pi}^{t=\frac{1}{2}\pi} y^2\,\mathrm{d}x + \pi \int\limits_{t=\frac{1}{2}\pi}^{t=0} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_{t=\pi}^{t=0} y^2\,\mathrm{d}x$

$= \pi \int\limits_{t=\pi}^{t=0} (4\sin(t) - 2\sin(2t))^2\mathrm{d}\,4\sin(t) = \pi \int\limits_{\pi}^{0} (4\sin(t) - 2\sin(2t))^2 \cdot 4\cos(t)\,\mathrm{d}t$

De optie fnInt (TI) of $\int \mathrm{d}x$ (Casio) geeft $I(L) = \pi \int\limits_{\pi}^{0} (4\sin(x) - 2\sin(2x))^2 \cdot 4\cos(x)\,\mathrm{d}x \approx 157{,}91$.

Verantwoording

Omslagontwerp: In Ontwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk: OKS, Delhi (India)
Lay-out: OKS, Delhi (India)

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 15

ISBN 978-90-01-84249-9

GETAL&
RUIMTE

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

ISBN 978-90-01-84249-9
9 789001 842499

www.getalenruimte.noordhoff.nl