Inhoud

Voor sommige (computer)opgaven is geen uitwerking opgenomen.
Deze zijn aangegeven met een *.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Machten en exponenten

Voorkennis Machten en machtsfuncties

Bladzijde 9

1 **a** $x^2 \cdot x^3 = x^5$
b $2p^3 \cdot 3p^2 = 6p^5$
c $4a^2b \cdot 5a^3b^2 = 20a^5b^3$
d $-2p^4q^3 \cdot -3pq = 6p^5q^4$
e $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y = 10x^3y - 3x^3y = 7x^3y$
f $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab = 3a^5b^2 - 8ab$

2 **a** $(p^2q)^3 = p^6q^3$
b $(3x^2)^3 = 27x^6$
c $(-5x^2y^3)^2 = 25x^4y^6$
d $(-4ab^4)^2 = 16a^2b^8$
e $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3 = 9a^2 \cdot 8a^6 = 72a^8$
f $(3a^3)^2 + (2a^2)^3 = 9a^6 + 8a^6 = 17a^6$

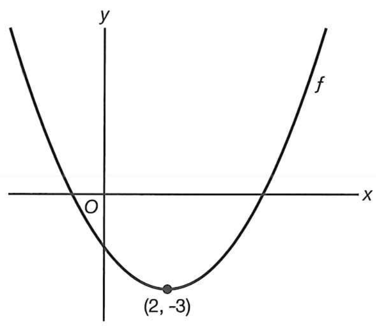
3 **a** $\dfrac{24a^4b^2}{6ab} = 4a^3b$
b $\dfrac{5x^3y^2}{10x^2y} = \frac{1}{2}xy$
c $\dfrac{(2ab)^3}{(3ab)^2} = \dfrac{8a^3b^3}{9a^2b^2} = \frac{8}{9}ab$

4 **a** $(ab)^4 \cdot a = a^4b^4 \cdot a = a^5b^4$
b $(-2ab)^3 \cdot b = -8a^3b^3 \cdot b = -8a^3b^4$
c $(3a)^2 + (2b)^2 = 9a^2 + 4b^2$
d $(3a)^3 - 8a^3 = 27a^3 - 8a^3 = 19a^3$
e $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = 1\frac{1}{4}a^2$
f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4 = 25a^8 + a^8 = 26a^8$

5 **a** $a^{2n} \cdot a^{n-1} = a^{2n+n-1} = a^{3n-1}$
b $a^{n^2-1} \cdot a^{n-1} = a^{n^2-1+n-1} = a^{n^2+n-2}$
c $\dfrac{a^{n^2-n}}{a^{n-1}} = a^{n^2-n-(n-1)} = a^{n^2-n-n+1} = a^{n^2-2n+1}$

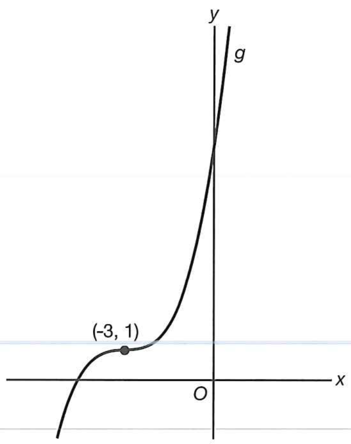
Bladzijde 12

6 **a** $y = x^2$
$\downarrow$ verm. x-as, $\frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}x^2$
$\downarrow$ verschuiving $(2, -3)$
$f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^2 - 3$



De top is $(2, -3)$.

b $y = x^3$
$\downarrow$ verm. x-as, $\frac{1}{4}$
$y = \frac{1}{4}x^3$
$\downarrow$ verschuiving $(-3, 1)$
$g(x) = \frac{1}{4}(x + 3)^3 + 1$



Het punt van symmetrie is $(-3, 1)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

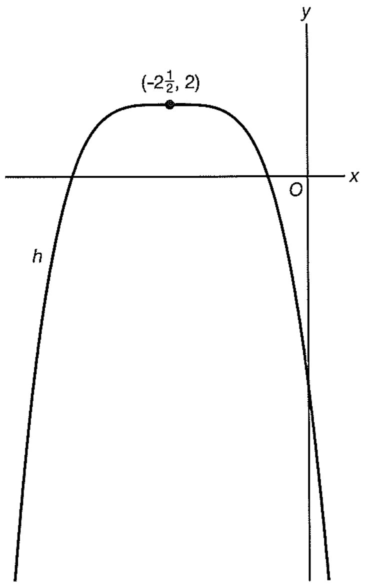
c $y = x^4$

$\downarrow$ verm. x-as, $-0{,}2$

$y = -0{,}2x^4$

$\downarrow$ verschuiving $\left(-2\frac{1}{2}, 2\right)$

$h(x) = -0{,}2\left(x + 2\frac{1}{2}\right)^4 + 2$



De top is $\left(-2\frac{1}{2}, 2\right)$.

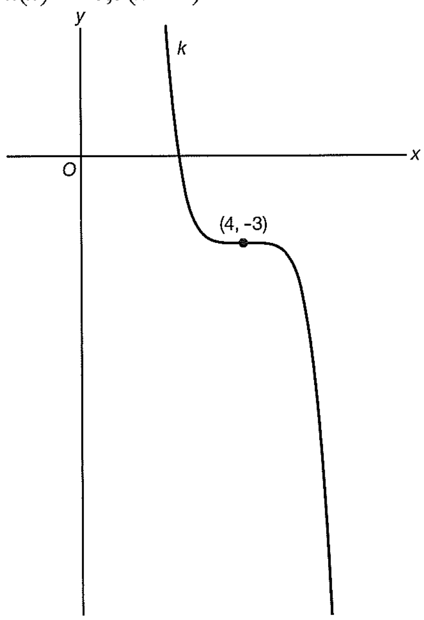
d $y = x^5$

$\downarrow$ verm. x-as, $-0{,}3$

$y = -0{,}3x^5$

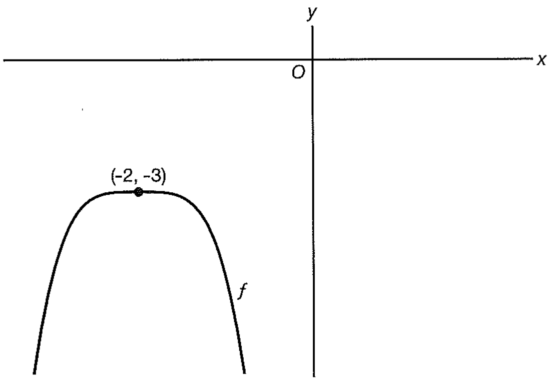
$\downarrow$ verschuiving $(4, -3)$

$k(x) = -0{,}3(x - 4)^5 - 3$



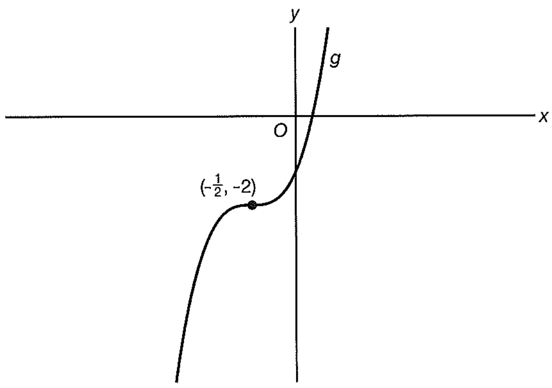
Het punt van symmetrie is $(4, -3)$.

7 a



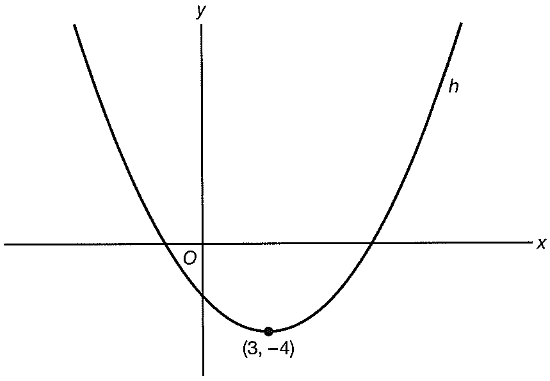
max. is $f(-2) = -3$.

b



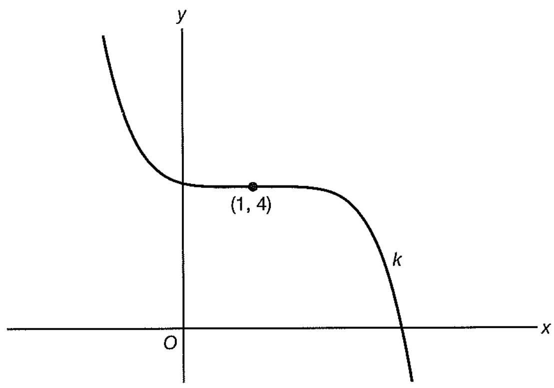
Het punt van symmetrie is $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$.

c



min. is $f(3) = -4$.

d



Het punt van symmetrie is $(1, 4)$.

8 $y = -\frac{1}{2}x^3$

$\downarrow$ verschuiving (-3, -5)

$y = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - 5$

$\downarrow$ verm. x-as, -3

$y = -3\left(-\frac{1}{2}(x+3)^3 - 5\right)$

ofwel $y = 1\frac{1}{2}(x+3)^3 + 15$

9 **a** $y = \frac{1}{2}(x-3)^4 + 7$

$\downarrow$ verschuiving (1, 2)

$y = \frac{1}{2}(x-4)^4 + 9$

$\downarrow$ verm. x-as, $1\frac{1}{2}$

$y = 1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x-4)^4 + 9\right)$

ofwel $y = \frac{3}{4}(x-4)^4 + 13\frac{1}{2}$

De top is $(4, 13\frac{1}{2})$.

b $y = -2\frac{1}{2}(x+4)^6 - 7$

$\downarrow$ verm. x-as, 2

$y = 2\left(-2\frac{1}{2}(x+4)^6 - 7\right)$

$y = -5(x+4)^6 - 14$

$\downarrow$ verschuiving (-1, 3)

$y = -5(x+5)^6 - 11$

De top is $(-5, -11)$.

10 **a** $y = 0{,}3x^4$

$\downarrow$ verschuiving (-5, 6)

$y = 0{,}3(x+5)^4 + 6$

$\downarrow$ verm. x-as, -3

$y = -3(0{,}3(x+5)^4 + 6)$

ofwel $y = -0{,}9(x+5)^4 - 18$

De top is $(-5, -18)$.

b $y = 0{,}3x^4$

$\downarrow$ verm. x-as, -3

$y = -0{,}9x^4$

$\downarrow$ verschuiving (-5, 6)

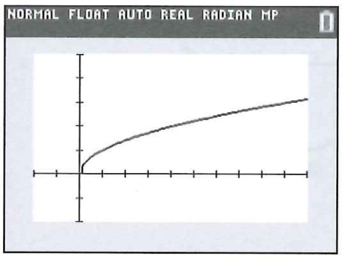
$y = -0{,}9(x+5)^4 + 6$

De top is $(-5, 6)$.

5.1 Wortelvormen en gebroken vormen

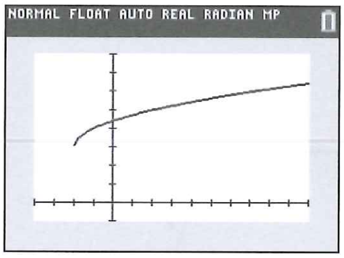
Bladzijde 13

1 **a**



D = [0, →⟩ en B = [0, →⟩.

b



$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{2 naar links}} y = \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{3 omhoog}} y = \sqrt{x+2} + 3$

Bladzijde 14

2 **a** $y = \sqrt{x}$

$\downarrow$ translatie (3, -2)

$f(x) = \sqrt{x-3} - 2$

$y = \sqrt{x}$

$\downarrow$ verm. x-as, -2

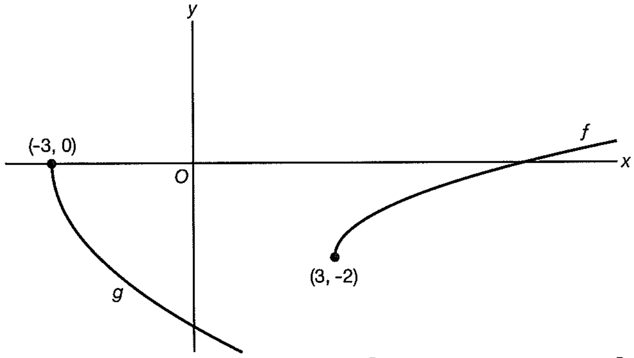
$y = -2\sqrt{x}$

$\downarrow$ translatie (-3, 0)

$g(x) = -2\sqrt{x+3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b



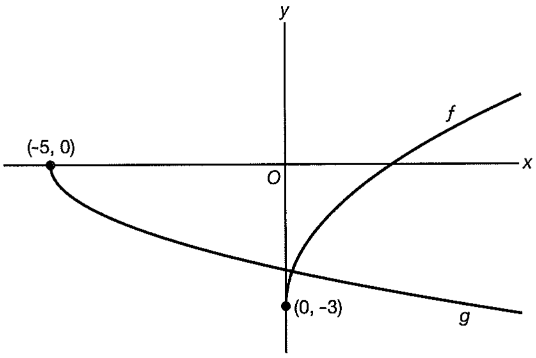
c $D_f = [3, \rightarrow\rangle$, $B_f = [-2, \rightarrow\rangle$, $D_g = [-3, \rightarrow\rangle$ en $B_g = \langle\leftarrow, 0]$.

3 **a**

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 2} y = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (0, -3)} f(x) = 2\sqrt{x} - 3$$

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } -1} y = -\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-5, 0)} g(x) = -\sqrt{x+5}$$

b



c $D_f = [0, \rightarrow\rangle$, $B_f = [-3, \rightarrow\rangle$, $D_g = [-5, \rightarrow\rangle$ en $B_g = \langle\leftarrow, 0]$.

Bladzijde 15

4 **a** beginpunt $(-5, 3)$, $D_f = [-5, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [3, \rightarrow\rangle$.
b beginpunt $(-3, -7)$, $D_g = [-3, \rightarrow\rangle$ en $B_g = [-7, \rightarrow\rangle$.
c beginpunt $(-1, 0)$, $D_h = [-1, \rightarrow\rangle$ en $B_h = \langle\leftarrow, 0]$.
d beginpunt $(0, 1)$, $D_k = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_k = [1, \rightarrow\rangle$.
e beginpunt $(1, -1)$, $D_l = [1, \rightarrow\rangle$ en $B_l = \langle\leftarrow, -1]$.
f beginpunt $(0, -3)$, $D_m = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_m = [-3, \rightarrow\rangle$.

5 Er geldt dat $a - x^2 \geq 0$

$$-x^2 \geq -a$$
$$x^2 \leq a$$
$$-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$$

$D_f = [-4, 4]$ en hieruit volgt dat $a = 16$.
min. is $f(-4) = f(4) = \sqrt{16 - 4^2} + b = b$ geeft $b = 5$.
max. is $f(0) = \sqrt{16 - 0^2} + b = 4 + b$ geeft $c = 4 + b = 4 + 5 = 9$.

6 **a** Het beginpunt is $(-2, 1)$.
b De tracecursor staat niet op het beginpunt van de grafiek van f. Dat komt omdat de GR een beperkt aantal pixels tekent. Eén pixel verder naar links dan het aangegeven punt valt buiten het domein van f.

Bladzijde 17

7 **a** $a < 0$ (verschuiving omlaag)
$b > 0$ (geen spiegeling in de x-as)
$c < 0$ (spiegeling in de y-as)
$d < 0$ (verschuiving naar rechts)

b $a > 0$ (verschuiving omhoog)
$b < 0$ (spiegeling in de x-as)
$c > 0$ (geen spiegeling in de y-as)
$d < 0$ (verschuiving naar rechts)

8 a $8 - 4x \geq 0$
$-4x \geq -8$
$x \leq 2$ dus $D_f = \langle \leftarrow, 2]$,
beginpunt $(2, 3)$ en $B_f = [3, \rightarrow\rangle$.

b $4x - 8 \geq 0$
$4x \geq 8$
$x \geq 2$ dus $D_g = [2, \rightarrow\rangle$,
beginpunt $(2, 3)$ en $B_g = [3, \rightarrow\rangle$.

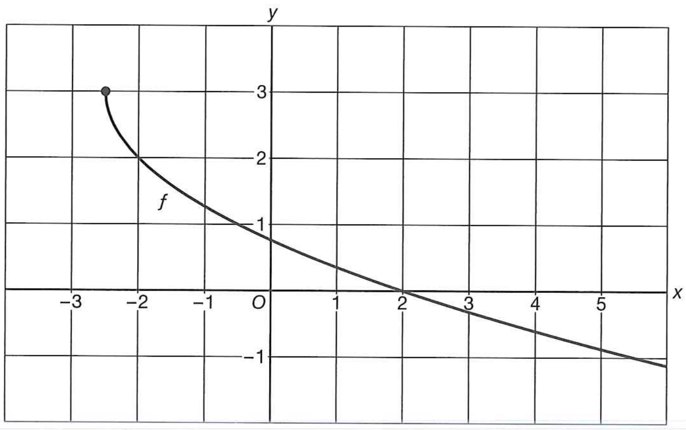
c $2x + 6 \geq 0$
$2x \geq -6$
$x \geq -3$ dus $D_h = [-3, \rightarrow\rangle$,
beginpunt $(-3, 5)$ en $B_h = \langle \leftarrow, 5]$.

d $x \geq 0$ dus $D_k = [0, \rightarrow\rangle$,
beginpunt $(0, 3)$ en $B_k = \langle \leftarrow, 3]$.

9 a $2x + 5 \geq 0$
$2x \geq -5$
$x \geq -2\frac{1}{2}$ dus $D_f = [-2\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$ en beginpunt $(-2\frac{1}{2}, 3)$.

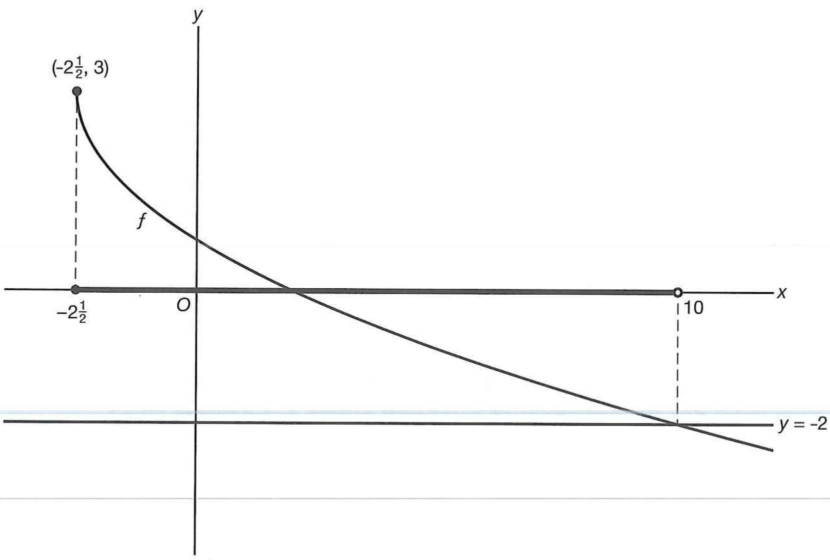
Voer in $y_1 = 3 - \sqrt{2x + 5}$.

x	-2,5	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1,3	0,8	0,4	0	-0,3



$B_f = \langle \leftarrow, 3]$

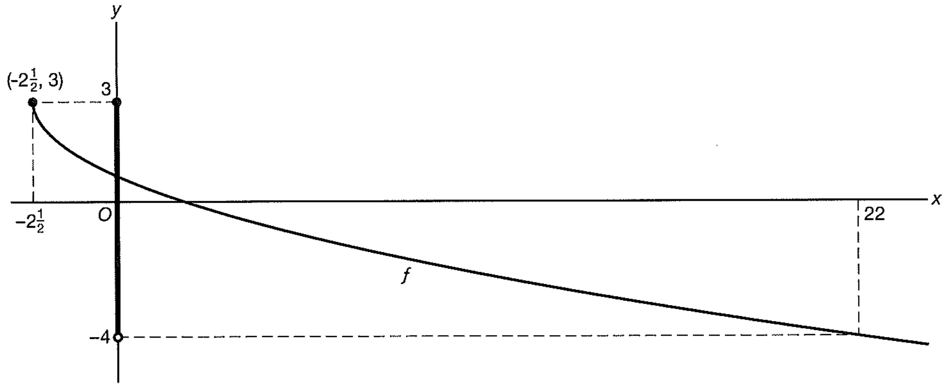
b $f(x) = -2$ geeft $3 - \sqrt{2x + 5} = -2$
$\sqrt{2x + 5} = 5$
kwadrateren geeft
$2x + 5 = 25$
$2x = 20$
$x = 10$
voldoet



$f(x) > -2$ geeft $-2\frac{1}{2} \leq x < 10$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f(22) = -4$



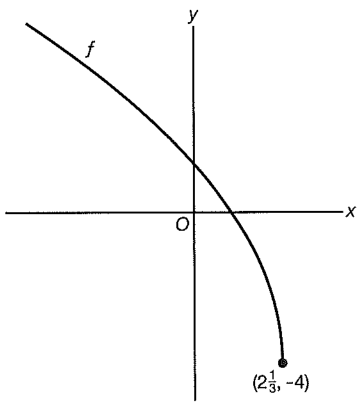
$x < 22$ geeft $-4 < f(x) \leq 3$

10 **a** $7 - 3x \geq 0$

$-3x \geq -7$

$x \leq 2\frac{1}{3}$ dus $D_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{3}]$

beginpunt $(2\frac{1}{3}, -4)$



$B_f = [-4, \rightarrow\rangle$

b $f(x) = -2$ geeft $2\sqrt{7-3x} - 4 = -2$

$2\sqrt{7-3x} = 2$

$\sqrt{7-3x} = 1$

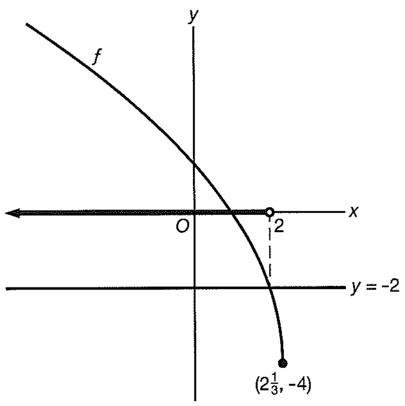
kwadrateren geeft

$7 - 3x = 1$

$-3x = -6$

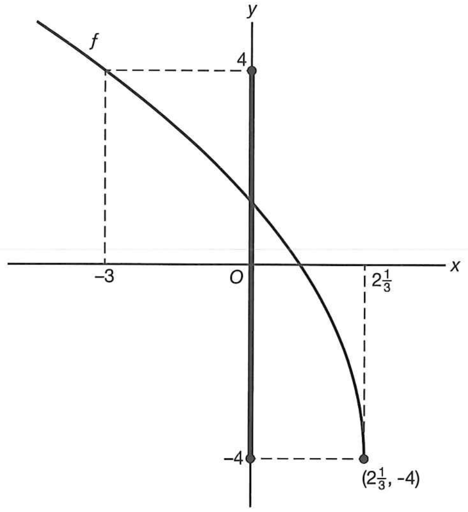
$x = 2$

voldoet



$f(x) > -2$ geeft $x < 2$

c $f(-3) = 4$



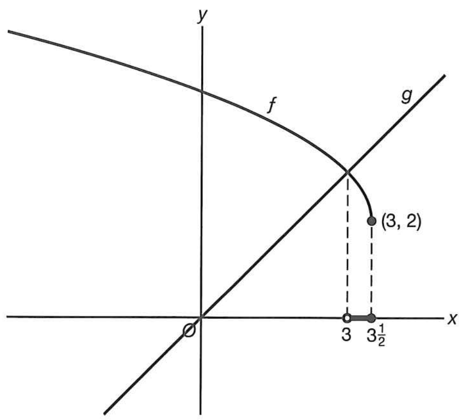
$x \geq -3$ geeft $-4 \leq f(x) \leq 4$

11 $f(x) = g(x)$ geeft $2 + \sqrt{7 - 2x} = x$

$\sqrt{7 - 2x} = x - 2$
kwadrateren geeft
$7 - 2x = x^2 - 4x + 4$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 1)(x - 3) = 0$
$x = -1 \vee x = 3$
vold. niet vold.

$7 - 2x \geq 0$
$-2x \geq -7$
$x \leq 3\frac{1}{2}$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2}]$, beginpunt is $(3\frac{1}{2}, 2)$ en $B_f = [2, \rightarrow\rangle$.



Dus $f(x) < g(x)$ geeft $3 < x \leq 3\frac{1}{2}$

12 $5 + ax = 0$
$ax = -5$
$x = -\frac{5}{a}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{beginpunt}\left(-\frac{5}{a}, 4\right)\\ y = 2x - 1\end{array}\right\}\ 2 \cdot -\frac{5}{a} - 1 = 4$$

$-\frac{10}{a} = 5$

$a = -2$

© Noordhoff Uitgevers bv

13 $f(5) = 3$ geeft $a\sqrt{5+b} = 3$, dus $a = \dfrac{3}{\sqrt{5+b}}$

$f(13) = 9$ geeft $a\sqrt{13+b} = 9$, dus $a = \dfrac{9}{\sqrt{13+b}}$

$\dfrac{3}{\sqrt{5+b}} = \dfrac{9}{\sqrt{13+b}}$

$9\sqrt{5+b} = 3\sqrt{13+b}$

$3\sqrt{5+b} = \sqrt{13+b}$

kwadrateren geeft

$9(5+b) = 13+b$

$45 + 9b = 13 + b$

$8b = -32$

$b = -4$

$b = -4$ en $a = \dfrac{3}{\sqrt{5+b}}$ geeft $a = \dfrac{3}{\sqrt{1}} = 3$.

Dus $a = 3$ en $b = -4$.

14 **a** $y = 2\sqrt{x}$

kwadrateren geeft

$y^2 = 4x$

$x = \dfrac{y^2}{4}$

Dus $x = \frac{1}{4}y^2$.

b $y = \sqrt{x-2}$

kwadrateren geeft

$y^2 = x - 2$

$x = y^2 + 2$

Dus uit $y = \sqrt{x-2}$ volgt $x = y^2 + 2$.

c $y = 2\sqrt{x-2}$

kwadrateren geeft

$y^2 = 4(x-2)$

$y^2 = 4x - 8$

$4x = y^2 + 8$

$x = \frac{1}{4}y^2 + 2$

Dus uit $y = 2\sqrt{x-2}$ volgt $x = \frac{1}{4}y^2 + 2$.

Bladzijde 19

15 **a** $F = 3\sqrt{2t-1}$

$3\sqrt{2t-1} = F$

kwadrateren geeft

$9(2t-1) = F^2$

$18t - 9 = F^2$

$18t = F^2 + 9$

$t = \frac{1}{18}F^2 + \frac{1}{2}$

b $A = 5 + \sqrt{4-3B}$.

$5 + \sqrt{4-3B} = A$

$\sqrt{4-3B} = A - 5$

kwadrateren geeft

$4 - 3B = (A-5)^2$

$4 - 3B = A^2 - 10A + 25$

$-3B = A^2 - 10A + 21$

$B = -\frac{1}{3}A^2 + 3\frac{1}{3}A - 7$

c $2x\sqrt{y} - 5 = 0$

$2x\sqrt{y} = 5$

kwadrateren geeft

$4x^2y = 25$

$y = \dfrac{25}{4x^2}$

d $R\sqrt{q} - \sqrt{R} = 6$

$R\sqrt{q} = \sqrt{R} + 6$

$\sqrt{q} = \dfrac{\sqrt{R}+6}{R}$

kwadrateren geeft

$q = \dfrac{R + 12\sqrt{R} + 36}{R^2}$

16 **a** $p = \dfrac{450}{1500} \times 1000 = 30\%$ geeft $a = 1{,}96\sqrt{\dfrac{30 \cdot (100-30)}{1500}}$

$a \approx 2{,}3\%$

De nauwkeurigheid van de schatting is 2,3%.

b $p = \dfrac{82}{400} \times 100 = 20{,}5\%$ geeft $a = 1{,}96\sqrt{\dfrac{20{,}5 \cdot (100-20{,}5)}{400}}$

$a \approx 4{,}0\%$

Bij een steekproef van 400 personen hoort een schatting met een nauwkeurigheid van 4,0%. Dat wil zeggen dat het werkelijke percentage tussen $20{,}5 - 4 = 16{,}5\%$ en $20{,}5 + 4 = 24{,}5\%$ zal liggen.

Van de 28 500 personen kunnen er met een zekerheid van 95% maximaal $28\,500 \times 0{,}245 \approx 6983$ op partij Y gestemd hebben.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $a = 4$ en $p = 40$ geeft $4 = 1{,}96\sqrt{\dfrac{40 \cdot 60}{n}}$

$$1{,}96\sqrt{\frac{2400}{n}} = 4$$

$$\sqrt{\frac{2400}{n}} = \frac{4}{1{,}96}$$

kwadrateren geeft

$$\frac{2400}{n} = \left(\frac{4}{1{,}96}\right)^2$$

$$n = \frac{2400}{\left(\frac{4}{1{,}96}\right)^2} = 576{,}24$$

De steekproef moet een omvang van 576 personen hebben.

d $a = 6$ en $n = 200$ geven $6 = 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(100-p)}{200}}$.

Voer in $y_1 = 1{,}96\sqrt{\dfrac{x(100-x)}{200}}$ en $y_2 = 6$.

De optie intersect geeft $x \approx 24{,}98$ en $x \approx 75{,}02$.

Dus bij de percentages 25% en 75% hoort een nauwkeurigheid van 6%.

e $a = 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(100-p)}{n}}$

kwadrateren geeft

$$3{,}8416 \cdot \frac{p(100-p)}{n} = a^2$$

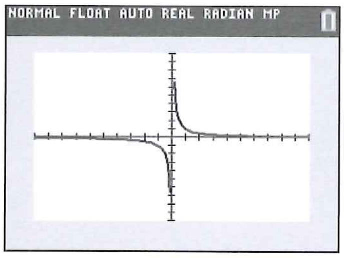
$$n = \frac{3{,}8416p(100-p)}{a^2}$$

$$n = \frac{384{,}16p - 3{,}8416p^2}{a^2}$$

$$n = \frac{-3{,}8416p^2 + 384{,}16p}{a^2}$$

Dus $d \approx -3{,}84$ en $e \approx 384$.

17 **a**



b Als je x steeds groter kiest dan komt $f(x)$ steeds dichter bij 0.
Ook voor heel kleine x komt $f(x)$ heel dicht bij 0.

c

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
PRESS + FOR △Tbl

X	Y1
-.1	-10
-.09	-11.11
-.08	-12.5
-.07	-14.29
-.06	-16.67
-.05	-20
-.04	-25
-.03	-33.33
-.02	-50
-.01	-100
0	ERROR

X=-.1

$f(x)$ wordt heel klein als een negatieve waarde van x heel dicht bij 0 komt.
$f(x)$ wordt heel groot als een positieve waarde van x heel dicht bij 0 komt.

d Bij $\dfrac{1}{0} = \ldots$ hoort $\ldots \times 0 = 1$.

Maar er is niets op de plaats van de stippeltjes in te vullen, want $\ldots \times 0$ is altijd 0 en nooit 1.
Dat betekent dat je niet door 0 kunt delen en dus geeft de GR voor $x = 0$ ERROR.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 21

18 **a** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{5x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\frac{3}{x}}{5-\frac{4}{x}}=\dfrac{4+0}{5-0}=\frac{4}{5}$

b $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-x}{3x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{8}{x}-1}{3+\frac{4}{x}}=\dfrac{0-1}{3+0}=-\frac{1}{3}$

c $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|2x-3|}{4x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{4x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x}}{4-\frac{1}{x}}=\dfrac{2-0}{4-0}=\frac{1}{2}$

d $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x}{|3x-2|}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x}{3x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{5}{x}-1}{3-\frac{2}{x}}=\dfrac{0-1}{3-0}=-\frac{1}{3}$

Bladzijde 22

19 **a** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|3-4x|}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-(3-4x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3+4x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{-3}{x}+4}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{0+4}{1-0}=4$

b $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|2x+5|}{|3-x|}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{-(3-x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{-3+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x}}{\frac{-3}{x}+1}=\dfrac{2+0}{0+1}=2$

c $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|3-x|+x}{|x+5|-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-(3-x)+x}{x+5-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3+x+x}{-x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3+2x}{-x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{-3}{x}+2}{-1+\frac{5}{x}}=\dfrac{0+2}{-1+0}=-2$

d $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|-2}{3-|x|}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{3-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}-1}=\dfrac{1-0}{0-1}=-1$

20 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\dfrac{4-0}{2+0}=2$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y=2$.

Bladzijde 24

21 **a** Neem $a=4$, $b=8$, $c=0$ en $d=2$.

Dit geeft $y=\dfrac{4x+8}{0\cdot x+2}=\dfrac{4x+8}{2}=\dfrac{4x}{2}+\dfrac{8}{2}=2x+4$.

Van $y=2x+4$ is de grafiek geen hyperbool, maar een rechte lijn.

b Neem $a=2$, $d=4$, $b=8$ en $c=1$, dan geldt dat $ad=bc$.

Dit geeft $y=\dfrac{2x+8}{x+4}=\dfrac{2(x+4)}{(x+4)}=2$ mits $x\neq -4$.

De grafiek die hierbij hoort is geen hyperbool, maar een horizontale lijn met perforatie $(-4, 2)$.

c $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}=\dfrac{a+0}{c+0}=\dfrac{a}{c}$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y=\dfrac{a}{c}$.

22 **a** $y = \dfrac{1}{x}$

$\Big\downarrow$ verm. x-as, 3

$y = \dfrac{3}{x}$

$\Big\downarrow$ translatie (-1, 2)

$y = \dfrac{3}{x+1} + 2$

Dit geeft $y = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2(x+1)}{x+1} = \dfrac{3+2x+2}{x+1} = \dfrac{2x+5}{x+1}$.

b $y = \dfrac{3x-4}{x-2} = \dfrac{3(x-2)+2}{x-2} = \dfrac{3(x-2)}{x-2} + \dfrac{2}{x-2} = 3 + \dfrac{2}{x-2}$

$y = \dfrac{1}{x}$

$\Big\downarrow$ verm. x-as, 2

$y = \dfrac{2}{x}$

$\Big\downarrow$ translatie (2, 3)

$y = 3 + \dfrac{2}{x-2}$

Dus de hyperbool $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ ontstaat uit de standaardgrafiek door de vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x-as en de translatie (2, 3).

23 **a** noemer is 0 geeft $2x + 5 = 0$

$2x = -5$

$x = -2\frac{1}{2}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -2\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{2x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}} = \frac{2-0}{2+0} = 1$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

b noemer is 0 geeft $4 - x = 0$

$-x = -4$

$x = 4$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 4$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{3x}{4-x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{3}{\frac{4}{x} - 1}\right) = 2 + \frac{3}{0-1} = 2 - 3 = -1$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -1$.

c noemer is 0 geeft $x + 2 = 0$

$x = -2$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -2$.

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{|3x-8|}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-8}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{8}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{3-0}{1+0} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{|3x-8|}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(3x-8)}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+8}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3 + \frac{8}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{-3+0}{1+0} = -3$$

Dus de horizontale asymptoten zijn de lijnen $\begin{cases} y = 3 \text{ voor } x \to \infty \\ y = -3 \text{ voor } x \to -\infty \end{cases}$

© Noordhoff Uitgevers bv

d Noemer is 0 geeft $|3 - x| = 0$

$$3 - x = 0$$
$$-x = -3$$
$$x = 3$$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 3$.

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{|2x| - 4}{|3 - x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 4}{-(3 - x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 4}{-3 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{\frac{-3}{x} + 1} = \frac{2 - 0}{0 + 1} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} k(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{|2x| - 4}{|3 - x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x - 4}{3 - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2 - \frac{4}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2 - 0}{0 - 1} = 2$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

24 **a** noemer is 0 geeft $x + 3 = 0$

$$x = -3$$

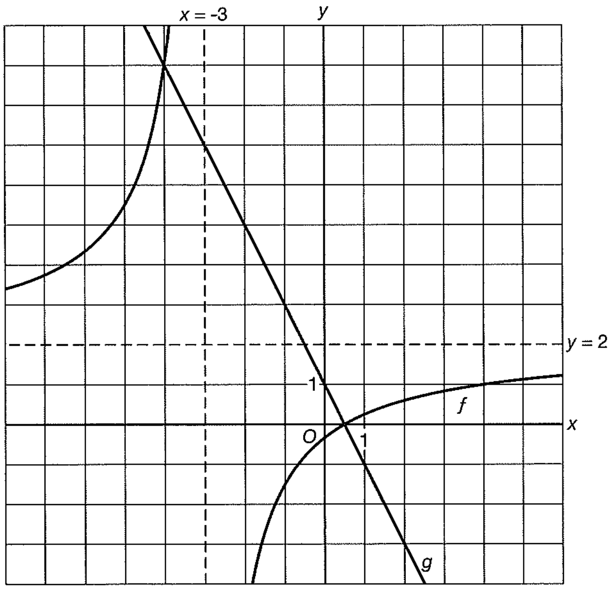
Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 1}{x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

x	-6	-5	-4	-2	-1	1	4
$f(x)$	4,3	5,5	9	-5	-1,5	0,25	1

De grafiek van g is de lijn door de punten $(0, 1)$ en $(1, -1)$.



b $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{2x - 1}{x + 3} = \frac{-2x + 1}{1}$

$$2x - 1 = (x + 3)(-2x + 1)$$
$$2x - 1 = -2x^2 + x - 6x + 3$$
$$2x^2 + 7x - 4 = 0$$
$$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot -4 = 81$$
$$x = \frac{-7 - 9}{4} = -4 \lor x = \frac{-7 + 9}{4} = \tfrac{1}{2}$$

voldoet voldoet

$f(x) \leq g(x)$ geeft $x \leq -4 \lor -3 < x \leq \frac{1}{2}$

c $g(-3) = -2 \cdot -3 + 1 = 7$

$g(x) = 2$ geeft $-2x + 1 = 2$

$$-2x = 1$$
$$x = -\tfrac{1}{2}$$

Dus de oppervlakte van de ingesloten driehoek is $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - -3\right)(7 - 2) = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 5 = 6\frac{1}{4}$.

25 **a** noemer is 0 geeft $x + 1 = 0$

$x = -1$

Dus de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = -1$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 2$.

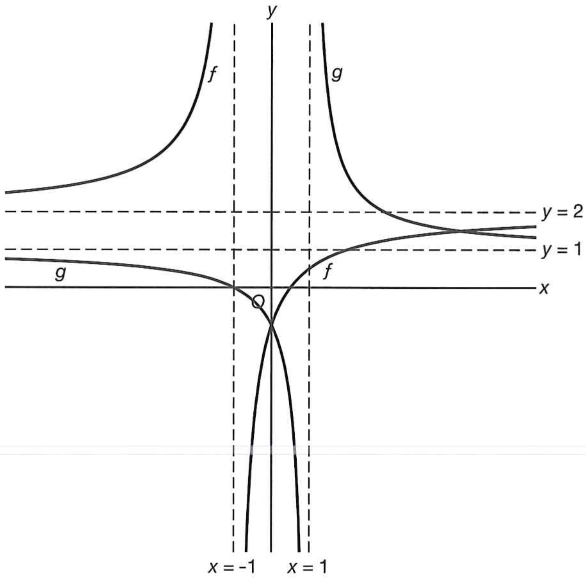
noemer is 0 geeft $x - 1 = 0$

$x = 1$

Dus de verticale asymptoot van g is de lijn $x = 1$.

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $y = 1$.



b $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$

$(2x - 1)(x - 1) = (x + 1)(x + 1)$

$2x^2 - 2x - x + 1 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0 \vee x = 5$

vold. vold.

$f(x) < g(x)$ geeft $-1 < x < 0 \vee 1 < x < 5$

c $f(x) = 4$ geeft $\frac{2x - 1}{x + 1} = 4$

$2x - 1 = 4(x + 1)$

$2x - 1 = 4x + 4$

$-2x = 5$

$x = -2\frac{1}{2}$, dus $A\left(-2\frac{1}{2}, 4\right)$

$g(x) = 4$ geeft $\frac{x + 1}{x - 1} = 4$

$x + 1 = 4(x - 1)$

$x + 1 = 4x - 4$

$-3x = -5$

$x = 1\frac{2}{3}$, dus $B\left(1\frac{2}{3}, 4\right)$

$AB = x_B - x_A = 1\frac{2}{3} - -2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{6}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 25

26 **a** $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v} \\ f = 3 \end{array}\right\} \frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{3} - \frac{1}{v}$$
$$\frac{1}{b} = \frac{v}{3v} - \frac{3}{3v}$$
$$\frac{1}{b} = \frac{v-3}{3v}$$
$$b(v-3) = 3v$$
$$b = \frac{3v}{v-3}$$

b noemer is 0 geeft $v - 3 = 0$

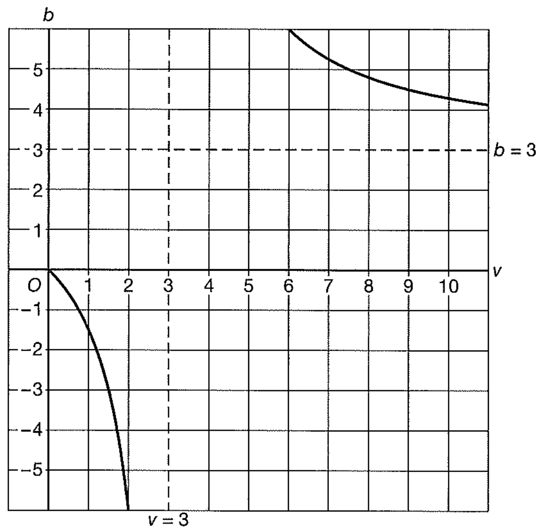
$v = 3$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $v = 3$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3v}{v-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{1 - \frac{3}{v}} = \frac{3}{1-0} = 3$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $b = 3$.

v	0	1	2	4	5	6	9	12
b	0	-1,5	-6	12	7,5	6	4,5	4



De praktische betekenis van $v = 3$ is:
als de voorwerpsafstand 3 is, dan is er geen beeld.
De praktische betekenis van $b = 3$ is:
er is geen voorwerpsafstand waarvoor de beeldpuntsafstand 3 is.

c $\left.\begin{array}{l} b = \frac{3v}{v-3} \\ b = v \end{array}\right\} v = \frac{3v}{v-3}$

$$v(v-3) = 3v$$
$$v^2 - 3v = 3v$$
$$v^2 - 6v = 0$$
$$v(v-6) = 0$$
$$v = 0 \quad \vee \quad v = 6$$

vold. niet vold.

Dus bij $v = 6$ zijn de beeldpuntsafstand en de voorwerpsafstand gelijk.

d $\left|\frac{b}{v}\right| = \left|\frac{\left(\frac{3v}{v-3}\right)}{v}\right| = \left|\frac{3}{v-3}\right|$

$\left|\frac{b}{v}\right| = 2$

$\left|\frac{3}{v-3}\right| = 2$

$\frac{3}{(v-3)} = 2 \vee \frac{3}{(v-3)} = -2$

$3 = 2(v-3) \vee 3 = -2(v-3)$

$3 = 2v - 6 \vee 3 = -2v + 6$

$-2v = -9 \vee 2v = 3$

$v = 4\frac{1}{2} \vee v = 1\frac{1}{2}$

vold. vold.

5.2 Machten met negatieve en gebroken exponenten

Bladzijde 27

27 **a** De exponenten worden telkens 1 minder en de getallen worden steeds door 2 gedeeld.

b $2^{-3} = \frac{1}{8}$ $2^{-4} = \frac{1}{16}$

c $x^{-1} = \frac{1}{x}$ $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

5

Bladzijde 28

28 **a** $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

b $a^4 \cdot \frac{1}{a^6} = a^4 \cdot a^{-6} = a^{-2}$

c $\frac{a^n}{\left(\frac{1}{a^4}\right)} = \frac{a^n}{a^{-4}} = a^{n--4} = a^{n+4}$

d $\frac{a^8}{a^0} = a^{8-0} = a^8$

e $(a^3)^{-2} = a^{-6}$

f $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a} = \frac{a^{-5}}{a^1} = a^{-5-1} = a^{-6}$

g $\frac{a}{a^{12}} = a^{-11}$

h $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n = a^{-8} \cdot a^{3n} = a^{3n-8}$

i $\frac{\left(\frac{1}{a^n}\right)}{a^{-3}} = \frac{a^{-n}}{a^{-3}} = a^{-n+3}$

Bladzijde 29

29 **a** $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

b $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$

c $3 \cdot 5^{-2} = 3 \cdot \frac{1}{5^2} = 3 \cdot \frac{1}{25} = \frac{3}{25}$

d $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

e $4 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot \frac{1}{10^3} = 4 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250}$

f $\frac{1}{2} : 6^{-2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{6^2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$

30 **a** $6a^{-5}b^3 = 6 \cdot \frac{1}{a^5} \cdot b^3 = \frac{6b^3}{a^5}$

b $\frac{1}{3}a^{-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{3a^3}$

c $5a^{-4}b^2 = 5 \cdot \frac{1}{a^4} \cdot b^2 = \frac{5b^2}{a^4}$

d $\frac{3}{5}a^{-4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{a^4} = \frac{3}{5a^4}$

e $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-3} = \left(2^{-1} \cdot a\right)^{-3} = 2^3 \cdot a^{-3} = 8 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{8}{a^3}$

f $\frac{1}{6}a^{-2}b^4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b^4 = \frac{b^4}{6a^2}$

g $-4 \cdot (3a)^{-2} = -4 \cdot \frac{1}{(3a)^2} = -4 \cdot \frac{1}{9a^2} = -\frac{4}{9a^2}$

h $(3a)^{-2}b^{-3} = \frac{1}{(3a)^2} \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{1}{9a^2b^3}$

i $\frac{3}{8}a^{-1}b = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{a} \cdot b = \frac{3b}{8a}$

31 **a** $y = \frac{1}{3}(3x^2)^3 \cdot \frac{2}{x^{10}} = \frac{1}{3} \cdot 27x^6 \cdot 2 \cdot x^{-10} = 18x^{-4}$

Dus $y = 18x^{-4}$.

b $y = \frac{162}{(3x^2)^4} = \frac{162}{81x^8} = \frac{2}{x^8} = 2x^{-8}$

Dus $y = 2x^{-8}$.

c $y = 3(3x)^{-2} \cdot 4x = 3 \cdot 3^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 4x^1 = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot 4 \cdot x^{-1} = \frac{4}{3}x^{-1}$

Dus $y = 1\frac{1}{3}x^{-1}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

32 **a** $y = \left(\frac{1}{3}x^2\right)^{-1} \cdot x^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot x^{-2} \cdot x^4 = 3x^2$
Dus $y = 3x^2$.

b $y = 75 \cdot (5x)^{-2} \cdot 3x^{12} = 75 \cdot 5^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 3x^{12} = 75 \cdot \frac{1}{25} \cdot 3 \cdot x^{10} = 9x^{10}$
Dus $y = 9x^{10}$.

c $y = \dfrac{5}{x^2} \cdot (3x^{-2})^3 = 5 \cdot x^{-2} \cdot 27 \cdot x^{-6} = 135x^{-8}$
Dus $y = 135x^{-8}$.

33 $$\left.\begin{array}{l} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x \\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \\ x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \end{array}$$

Bladzijde 31

34 **a** $5a^{\frac{1}{3}} = 5 \cdot \sqrt[3]{a}$

b $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b = \dfrac{b}{2a^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{b}{2 \cdot \sqrt[4]{a}}$

c $3a^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$

d $\frac{2}{3}a^{-3} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \dfrac{2b^{\frac{1}{3}}}{3a^3} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{b}}{3a^3}$

e $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{5a^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt[3]{b}}{5\sqrt{a}}$

f $(5a)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(5a)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{5a}}$

35 **a** $a \cdot \sqrt[3]{a} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{1\frac{1}{3}}$

b $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$

c $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a^1} = a^{-1}$

d $\dfrac{1}{a^3} = a^{-3}$

e $a^2 \cdot \sqrt{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{2\frac{1}{2}}$

f $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}} = \sqrt[3]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{3}}$

g $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$

h $\dfrac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{-4} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{-4+\frac{1}{3}} = a^{-3\frac{2}{3}}$

i $\dfrac{a^3}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{a^3}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{3-\frac{1}{3}} = a^{2\frac{2}{3}}$

36 **a** $8\sqrt{2} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}}$

b $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{-1+\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

c $\dfrac{8}{\sqrt{2}} = \dfrac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{3-\frac{1}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}}$

d $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{-1+\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}$

e $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{2\frac{1}{6}}$

f $\sqrt[4]{\frac{1}{9}} = \sqrt[4]{3^{-2}} = 3^{-\frac{2}{4}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

g $\frac{1}{100}\sqrt{10} = 10^{-2} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-2+\frac{1}{2}} = 10^{-1\frac{1}{2}}$

h $\frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^{-2}} = 2^{-3} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{-3-\frac{2}{3}} = 2^{-3\frac{2}{3}}$

i $10 \cdot \sqrt[3]{0{,}1} = 10^1 \cdot \sqrt[3]{10^{-1}} = 10^1 \cdot 10^{-\frac{1}{3}} = 10^{1-\frac{1}{3}} = 10^{\frac{2}{3}}$

37 **a** $x^{2\frac{1}{3}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

b $2^{2\frac{1}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$

c $2^{x+\frac{1}{3}} = 2^x \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^x \cdot \sqrt[3]{2}$

d $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$

e $5^{a+1} = 5^a \cdot 5^1 = 5 \cdot 5^a$

f $\left(\frac{1}{2}\right)^{a-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot (2^{-1})^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot 2^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^a$

g $4^{a-3} = 4^a \cdot 4^{-3} = 4^a \cdot \dfrac{1}{4^3} = \frac{1}{64} \cdot 4^a$

h $2^{2a-1} = 2^{2a} \cdot 2^{-1} = (2^2)^a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4^a$

i $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-3x} = (3^{-1})^{1-3x} = 3^{-1+3x} = 3^{-1} \cdot 3^{3x} = \frac{1}{3} \cdot (3^3)^x = \frac{1}{3} \cdot 27^x$

5

© Noordhoff Uitgevers bv

38 **a** $\dfrac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \dfrac{x^6}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^6}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{6-2\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

b $x \cdot \sqrt[7]{x^3} = x^1 \cdot x^{\frac{3}{7}} = x^{1\frac{3}{7}}$

c $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x}} = \dfrac{x^1}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{1-\frac{1}{5}} = x^{\frac{4}{5}}$

d $x^4 \cdot \sqrt{x} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{4\frac{1}{2}}$

e $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}}$

f $\dfrac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-2-\frac{1}{2}} = x^{-2\frac{1}{2}}$

g $x^2 \cdot \dfrac{1}{x^3} = x^2 \cdot x^{-3} = x^{2-3} = x^{-1}$

h $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}}$

i $\dfrac{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}} = \dfrac{x^4 \cdot x^{\frac{1}{5}}}{x^5 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{x^{4\frac{1}{5}}}{x^{5\frac{1}{4}}} = x^{4\frac{1}{5}-5\frac{1}{4}} = x^{-1\frac{1}{20}}$

39 **a** $y = \dfrac{5}{x\sqrt{x}} = \dfrac{5}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{5}{x^{1\frac{1}{2}}} = 5x^{-1\frac{1}{2}}$
Dus $y = 5x^{-1\frac{1}{2}}$.

b $y = 5x\sqrt{x^3} = 5x^1 \cdot x^{\frac{3}{2}} = 5x^{1+1\frac{1}{2}} = 5x^{2\frac{1}{2}}$
Dus $y = 5x^{2\frac{1}{2}}$.

c $y = \dfrac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x} = 5 \cdot x^{-3} \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 10x^{-3+\frac{1}{2}} = 10x^{-2\frac{1}{2}}$
Dus $y = 10x^{-2\frac{1}{2}}$.

d $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3x^{\frac{3}{4}}$
Dus $y = 3x^{\frac{3}{4}}$.

e $y = 5x^{-0{,}2} \cdot x^{1{,}3} = 5x^{-0{,}2+1{,}3} = 5x^{1{,}1}$
Dus $y = 5x^{1{,}1}$.

f $y = \dfrac{50x^{1{,}9}}{10x^{1{,}1}} = 5 \cdot x^{1{,}9-1{,}1} = 5x^{0{,}8}$
Dus $y = 5x^{0{,}8}$.

Bladzijde 33

40 **a** $x^{1{,}6} = 50$
$x = 50^{\frac{1}{1{,}6}} \approx 11{,}531$

b $x^{-4{,}1} = 5$
$x = 5^{\frac{1}{-4{,}1}} \approx 0{,}675$

c $\left(\frac{1}{2}x\right)^{-1{,}3} = 11$
$\frac{1}{2}x = 11^{\frac{1}{-1{,}3}}$
$x = 2 \cdot 11^{\frac{1}{-1{,}3}} \approx 0{,}316$

d $x^{-1} = 21$
$x = 21^{\frac{1}{-1}} = 21^{-1} = \frac{1}{21} \approx 0{,}048$

e $(5x)^{0{,}55} = 18$
$5x = 18^{\frac{1}{0{,}55}}$
$x = \frac{1}{5} \cdot 18^{\frac{1}{0{,}55}} \approx 38{,}313$

f $\sqrt[3]{x^2} = 28$
$x^{\frac{2}{3}} = 28$
$x = 28^{\frac{3}{2}} \approx 148{,}162$

41 **a** $3x^{2{,}25} + 1 = 27$
$3x^{2{,}25} = 26$
$x^{2{,}25} = \frac{26}{3}$
$x = \left(\frac{26}{3}\right)^{\frac{1}{2{,}25}} \approx 2{,}611$

b $(5x)^{-1{,}3} + 8 = 21$
$(5x)^{-1{,}3} = 13$
$5x = 13^{\frac{1}{-1{,}3}}$
$x = \frac{1}{5} \cdot 13^{\frac{1}{-1{,}3}} \approx 0{,}028$

c $4x^{-1{,}8} + 16 = 5000$
$4x^{-1{,}8} = 4984$
$x^{-1{,}8} = 1246$
$x = 1246^{\frac{1}{-1{,}8}} \approx 0{,}019$

d $8 - 3x^{1{,}16} = 1$
$-3x^{1{,}16} = -7$
$x^{1{,}16} = \frac{7}{3}$
$x = \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{1{,}16}} \approx 2{,}076$

e $5 \cdot \sqrt[3]{2x} = 8$
$\sqrt[3]{2x} = \frac{8}{5}$
$(2x)^{\frac{1}{3}} = \frac{8}{5}$
$2x = \left(\frac{8}{5}\right)^3$
$x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^3 = 2{,}048$

f $3 \cdot \sqrt[4]{x^3} - 1 = 36$
$3 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 37$
$\sqrt[4]{x^3} = \frac{37}{3}$
$x^{\frac{3}{4}} = \frac{37}{3}$
$x = \left(\frac{37}{3}\right)^{\frac{4}{3}} \approx 28{,}495$

© Noordhoff Uitgevers bv

42 $y = 20x^3$

$20x^3 = y$

$x^3 = \frac{1}{20}y$

$x = \left(\frac{1}{20}y\right)^{\frac{1}{3}}$

$x = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$

Dus $a = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}37$ en $b = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Bladzijde 34

43 **a** $y = 5x^{1{,}2}$ geeft $5x^{1{,}2} = y$

$x^{1{,}2} = 0{,}2y$

$x = (0{,}2y)^{\frac{1}{1{,}2}}$

$x = 0{,}2^{\frac{1}{1{,}2}} \cdot y^{\frac{1}{1{,}2}}$

$x \approx 0{,}26y^{0{,}83}$

Dus $x = 0{,}26y^{0{,}83}$.

b $y = 0{,}1x^{-1{,}7}$ geeft $0{,}1x^{-1{,}7} = y$

$x^{-1{,}7} = 10y$

$x = (10y)^{\frac{1}{-1{,}7}}$

$x = 10^{\frac{1}{-1{,}7}} \cdot y^{\frac{1}{-1{,}7}}$

$x \approx 0{,}26y^{0{,}59}$

Dus $x = 0{,}26y^{0{,}59}$.

c $y = 125x^{-2{,}3}$ geeft $125x^{-2{,}3} = y$

$x^{-2{,}3} = 0{,}008y$

$x = (0{,}008y)^{\frac{1}{-2{,}3}}$

$x = 0{,}008^{\frac{1}{-2{,}3}} \cdot y^{\frac{1}{-2{,}3}}$

$x \approx 8{,}16y^{-0{,}43}$

Dus $x = 8{,}16y^{-0{,}43}$.

44 **a** $y = 15x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 15x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 15x^{2\frac{1}{3}}$

$y = 15x^{2\frac{1}{3}}$ geeft $15x^{2\frac{1}{3}} = y$

$x^{\frac{7}{3}} = \frac{1}{15}y$

$x = \left(\frac{1}{15}y\right)^{\frac{3}{7}}$

$x = \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot y^{\frac{3}{7}}$

$x \approx 0{,}31y^{0{,}43}$

Dus $x = 0{,}31y^{0{,}43}$.

b $y = \dfrac{6}{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}} = \dfrac{6}{x^4 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{6}{x^{4\frac{1}{3}}} = 6x^{-4\frac{1}{3}}$

$y = 6x^{-4\frac{1}{3}}$ geeft $6x^{-4\frac{1}{3}} = y$

$x^{-\frac{13}{3}} = \frac{1}{6}y$

$x = \left(\frac{1}{6}y\right)^{-\frac{3}{13}}$

$x = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{3}{13}} \cdot y^{-\frac{3}{13}}$

$x \approx 1{,}51y^{-0{,}23}$

Dus $x = 1{,}51y^{-0{,}23}$.

c $y = \dfrac{12}{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x} = 12 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}} = 12 \cdot \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{1\frac{1}{2}}} = 12x^{-1\frac{1}{6}}$

$y = 12x^{-1\frac{1}{6}}$ geeft $12x^{-1\frac{1}{6}} = y$

$x^{-\frac{7}{6}} = \frac{1}{12}y$

$x = \left(\frac{1}{12}y\right)^{-\frac{6}{7}}$

$x = \left(\frac{1}{12}\right)^{-\frac{6}{7}} \cdot y^{-\frac{6}{7}}$

$x \approx 8{,}41y^{-0{,}86}$

Dus $x = 8{,}41y^{-0{,}86}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

45 **a** $K = 15q^{-1,6}$ geeft $15q^{-1,6} = K$

$$q^{-1,6} = \tfrac{1}{15}K$$
$$q = \left(\tfrac{1}{15}K\right)^{\frac{1}{-1,6}}$$
$$q = \left(\tfrac{1}{15}\right)^{\frac{1}{-1,6}} \cdot K^{\frac{1}{-1,6}}$$
$$q \approx 5{,}43K^{-0,625}$$

Dus $q = 5{,}43K^{-0,625}$.

b $v = 25t\sqrt{t} = 25t \cdot t^{\frac{1}{2}} = 25t^{1\frac{1}{2}}$

$v = 25t^{1\frac{1}{2}}$ geeft $25t^{1\frac{1}{2}} = v$

$$t^{\frac{3}{2}} = 0{,}04v$$
$$t = (0{,}04v)^{\frac{2}{3}}$$
$$t = (0{,}04)^{\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}}$$
$$t \approx 0{,}12v^{0,67}$$

Dus $t = 0{,}12v^{0,67}$.

46 $F = \dfrac{m\sqrt{m}}{m\sqrt{m} - 1}$

$$F(m\sqrt{m} - 1) = m\sqrt{m}$$
$$m\sqrt{m} \cdot F - F = m\sqrt{m}$$
$$m\sqrt{m} \cdot F - m\sqrt{m} = F$$
$$m\sqrt{m}(F - 1) = F$$
$$m\sqrt{m} = \frac{F}{F-1}$$
$$m^{1\frac{1}{2}} = \frac{F}{F-1}$$
$$m = \left(\frac{F}{F-1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

47 **a** $P = 800 \cdot l^{-2,25}$

$$P = \frac{800}{l^{2,25}}$$

Een grotere waarde voor l geeft een grotere noemer en dus een kleinere uitkomst van de breuk.
Dus een grotere waarde voor l geeft een kleinere waarde voor P, dus grotere dieren leven gemiddeld verder van elkaar af.

b $l = 2{,}15$ geeft $P = 800 \cdot 2{,}15^{-2,25} \approx 143$ exemplaren per km^2.
In het gebied leven ongeveer $250 \cdot 143 = 35\,750$ kariboes.

c $P = 800 \cdot l^{-2,25}$ geeft $800 \cdot l^{-2,25} = P$

$$l^{-2,25} = \tfrac{1}{800}P$$
$$l = \left(\tfrac{1}{800}P\right)^{\frac{1}{-2,25}}$$
$$l = \left(\tfrac{1}{800}\right)^{\frac{1}{-2,25}} \cdot P^{\frac{1}{-2,25}}$$
$$l \approx 19{,}5P^{-0,44}$$

Dus $l = 19{,}5 \cdot P^{-0,44}$.

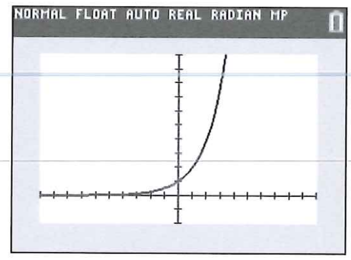
d 160 000 per 5 km^2 geeft $P = \dfrac{160\,000}{5} = 32\,000$ per km^2

$P = 32\,000$ geeft $l = 19{,}5 \cdot 32\,000^{-0,44} \approx 0{,}20$, dus de gemiddelde lengte is ongeveer 20 cm.

5.3 De standaardfunctie $f(x) = g^x$

Bladzijde 36

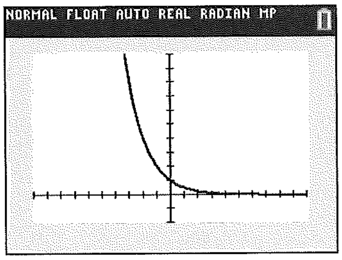
48 **a**



Hoe kleiner de waarden van x, hoe meer de grafiek nadert naar $y = 0$.

b Er geldt dat $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ en hoe groter de waarden van x, hoe groter de waarden van $f(x)$.
Dus $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c 

Hoe groter de waarden van x, hoe meer de grafiek nadert naar $y = 0$.

d $B_g = \langle 0, \rightarrow \rangle$

Bladzijde 38

49 **a** $y = 3^x$

$\downarrow$ translatie (-1, 5)

$f(x) = 3^{x+1} + 5$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 5$.

$B_f = \langle 5, \rightarrow \rangle$

b $y = 0{,}5^x$

$\downarrow$ verm. x-as, -2

$y = -2 \cdot 0{,}5^x$

$\downarrow$ translatie (0, 3)

$g(x) = 3 - 2 \cdot 0{,}5^x$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

$B_g = \langle \leftarrow, 3 \rangle$

c $y = 1{,}1^x$

$\downarrow$ verm. x-as, 4

$y = 4 \cdot 1{,}1^x$

$\downarrow$ translatie (0, 6)

$h(x) = 6 + 4 \cdot 1{,}1^x$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 6$.

$B_h = \langle 6, \rightarrow \rangle$

d $y = 12{,}5^x$

$\downarrow$ verm. x-as, 0,01

$y = 0{,}01 \cdot 12{,}5^x$

$\downarrow$ translatie (0, -150)

$k(x) = 0{,}01 \cdot 12{,}5^x - 150$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -150$.

$B_k = \langle -150, \rightarrow \rangle$

50 **a** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (25 - 5 \cdot 1{,}5^x) = 25 - 5 \cdot 0 = 25$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 25$.

b $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (60 + 10 \cdot 0{,}8^x) = 60 + 10 \cdot 0 = 60$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 60$.

c $h(x) = 1{,}5 \cdot 1{,}8^{1-x} - 12 = 1{,}5 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}8^{-x} - 12 = 1{,}5 \cdot 1{,}8 \cdot (1{,}8^{-1})^x - 12 = 2{,}7 \cdot 0{,}55...^x - 12$

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (2{,}7 \cdot 0{,}55...^x - 12) = 2{,}7 \cdot 0 - 12 = -12$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -12$.

d $k(x) = 180 \cdot 0{,}98^{x+1} - 50 = 180 \cdot 0{,}98^x \cdot 0{,}98 - 50 = 176{,}4 \cdot 0{,}98^x - 50$

$\lim\limits_{x \to \infty} k(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (176{,}4 \cdot 0{,}98^x - 50) = 176{,}4 \cdot 0 - 50 = -50$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -50$.

51 **a** $y = 3^x$

$\downarrow$ verm. x-as, $\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2} \cdot 3^x$

$\downarrow$ translatie (0, 3)

$y = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 3$

b $y = 3^x$

$\downarrow$ spiegelen in de x-as

$y = -3^x$

$\downarrow$ translatie (0, -1)

$y = -3^x - 1$

c $y = 3^x$

$\downarrow$ translatie (4, -5)

$y = 3^{x-4} - 5$

$\downarrow$ verm. x-as, 3

$y = 3(3^{x-4} - 5)$

ofwel $y = 3 \cdot 3^{x-4} - 15$

ofwel $y = 3^{x-3} - 15$

d $y = 3^x$

$\downarrow$ verm. x-as, 3

$y = 3 \cdot 3^x$

$\downarrow$ translatie (4, -5)

$y = 3 \cdot 3^{x-4} - 5$

ofwel $y = 3^{x-3} - 5$

Bladzijde 39

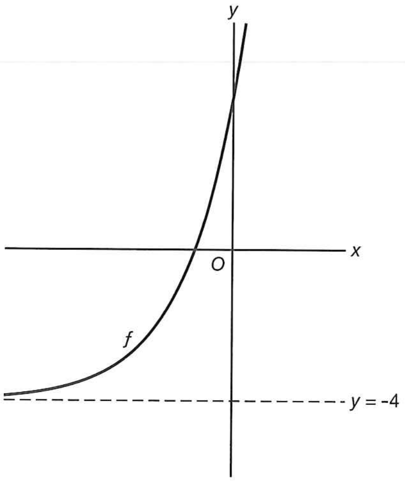
52 **a** $f(3) = 2^{3+3} - 4 = 60$

$y = 2^x$

$\downarrow$ translatie (-3, -4)

$f(x) = 2^{x+3} - 4$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -4$.



$x \leq 3$ geeft $-4 < f(x) \leq 60$

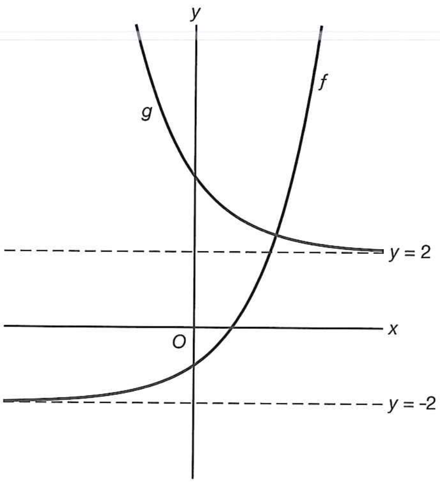
b Voer in $y_1 = 2^{x+3} - 4$ en $y_2 = -1$.

Intersect geeft $x \approx -1{,}42$.

$f(x) \leq -1$ geeft $x \leq -1{,}42$

53 **a** Voer in $y_1 = 2^x - 2$ en $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

Intersect geeft $x \approx 2{,}15$.



$f(x) \geq g(x)$ geeft $x \geq 2{,}15$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2^x - 2) = 0 - 2 = -2$, dus $B_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$.

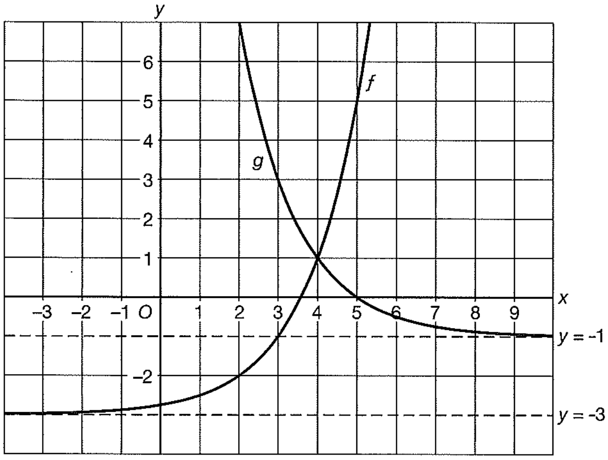
Dus $f(x) = p$ heeft geen oplossingen voor $p \leq -2$.

Bladzijde 40

54 **a** Voer in $y_1 = 2^{x-2} - 3$ en $y_2 = 4 \cdot 0{,}5^{x-3} - 1$.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-2,9	-2,8	-2,5	-2	-1	1	5	13	29
$g(x)$	63	31	15	7	3	1	0	-0,5	-0,8

© Noordhoff Uitgevers bv



b $B_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$ en $B_g = \langle -1, \rightarrow \rangle$, dus $f(x) = p$ heeft één oplossing voor $p > -3$ en $g(x) = p$ heeft geen oplossing voor $p \leq -1$.
Dus het antwoord is $-3 < p \leq -1$.

c $f(2) = -2$
$x \leq 2$ geeft $-3 < f(x) \leq -2$

d $f(1) = -2{,}5$ en $g(1) = 15$, dus $A(1; -2{,}5)$ en $B(1, 15)$.
$AB = y_B - y_A = 15 - -2{,}5 = 17{,}5$

e Voer in $y_3 = 5$.
Intersect van y_1 met y_3 geeft $x = 5$, dus $P(5, 5)$.
Intersect van y_2 met y_3 geeft $x \approx 2{,}415$, dus $Q(2{,}415; 5)$.
$PQ = x_P - x_Q \approx 5 - 2{,}415 = 2{,}585$

55 **a** $a < 0$ (verschuiving omlaag)
$b > 0$ (geen spiegeling in de x-as)
$c < 0$ (spiegeling in de y-as)

b $a > 0$ (verschuiving omhoog)
$b < 0$ (spiegeling in de x-as)
$c > 0$ (geen spiegeling in de y-as)

56 $2^{x-3} = \sqrt{2}$
$2^{x-3} = 2^{\frac{1}{2}}$
$x - 3 = \frac{1}{2}$
$x = 3\frac{1}{2}$

Bladzijde 41

57 **a** $2^x = \frac{1}{8}\sqrt{2}$
$2^x = 2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
$2^x = 2^{-2\frac{1}{2}}$
$x = -2\frac{1}{2}$

b $2^{3x-1} = 16$
$2^{3x-1} = 2^4$
$3x - 1 = 4$
$3x = 5$
$x = 1\frac{2}{3}$

c $2 \cdot 3^{x+1} = 162$
$3^{x+1} = 81$
$3^{x+1} = 3^4$
$x + 1 = 4$
$x = 3$

d $6^{2x+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
$6^{2x+1} = (6^{-1})^x$
$6^{2x+1} = 6^{-x}$
$2x + 1 = -x$
$3x = -1$
$x = -\frac{1}{3}$

e $4^{3x+1} = \frac{1}{2}$
$(2^2)^{3x+1} = 2^{-1}$
$2^{6x+2} = 2^{-1}$
$6x + 2 = -1$
$6x = -3$
$x = -\frac{1}{2}$

f $5 \cdot 16^{2-x} = 40$
$16^{2-x} = 8$
$(2^4)^{2-x} = 2^3$
$2^{8-4x} = 2^3$
$8 - 4x = 3$
$-4x = -5$
$x = 1\frac{1}{4}$

58 **a** $2^{x+1} = 64$
$2^{x+1} = 2^6$
$x + 1 = 6$
$x = 5$

b $2^{x-3} = \frac{1}{8}$
$2^{x-3} = 2^{-3}$
$x - 3 = -3$
$x = 0$

c $2^{2x} = 2$
$2^{2x} = 2^1$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$

d $2^x = 1$
$2^x = 2^0$
$x = 0$

e $2^x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
$2^x = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
$2^x = 2^{-1\frac{1}{2}}$
$x = -1\frac{1}{2}$

f $5^{x+6} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
$5^{x+6} = (5^{-1})^x$
$5^{x+6} = 5^{-x}$
$x + 6 = -x$
$2x = -6$
$x = -3$

© Noordhoff Uitgevers bv

59 **a** $3^{2x+1} = 27\sqrt{3}$
$3^{2x+1} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
$3^{2x+1} = 3^{3\frac{1}{2}}$
$2x + 1 = 3\frac{1}{2}$
$2x = 2\frac{1}{2}$
$x = 1\frac{1}{4}$

b $10^{2x+1} = 0{,}01$
$10^{2x+1} = 10^{-2}$
$2x + 1 = -2$
$2x = -3$
$x = -1\frac{1}{2}$

c $3^x - 2 = 25$
$3^x = 27$
$3^x = 3^3$
$x = 3$

d $5 \cdot 2^x = 80$
$2^x = 16$
$2^x = 2^4$
$x = 4$

e $10 \cdot 3^x = 270$
$3^x = 27$
$3^x = 3^3$
$x = 3$

f $3 \cdot 8^{2-x} = 48$
$8^{2-x} = 16$
$(2^3)^{2-x} = 2^4$
$2^{6-3x} = 2^4$
$6 - 3x = 4$
$-3x = -2$
$x = \frac{2}{3}$

60 **a** $3 \cdot 2^x + 4 = 28$
$3 \cdot 2^x = 24$
$2^x = 8$
$2^x = 2^3$
$x = 3$

b $5^{2x-6} = 0{,}04$
$5^{2x-6} = \frac{1}{25}$
$5^{2x-6} = 5^{-2}$
$2x - 6 = -2$
$2x = 4$
$x = 2$

c $3 \cdot 7^{3x+1} = 147$
$7^{3x+1} = 49$
$7^{3x+1} = 7^2$
$3x + 1 = 2$
$3x = 1$
$x = \frac{1}{3}$

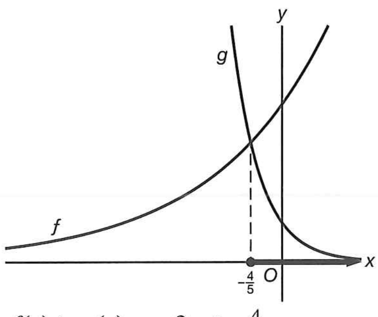
d $32^{x-2} = \frac{1}{16}$
$(2^5)^{x-2} = 2^{-4}$
$2^{5x-10} = 2^{-4}$
$5x - 10 = -4$
$5x = 6$
$x = 1\frac{1}{5}$

e $5 \cdot 4^{x-1} = 2\frac{1}{2}$
$4^{x-1} = \frac{1}{2}$
$(2^2)^{x-1} = 2^{-1}$
$2^{2x-2} = 2^{-1}$
$2x - 2 = -1$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$

f $8 \cdot 2^x = 4^{x+1}$
$2^3 \cdot 2^x = (2^2)^{x+1}$
$2^{3+x} = 2^{2x+2}$
$3 + x = 2x + 2$
$-x = -1$
$x = 1$

61 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $(\sqrt{2})^{x+4} = (\frac{1}{4})^x$
$(2^{\frac{1}{2}})^{x+4} = (2^{-2})^x$
$2^{\frac{1}{2}x+2} = 2^{-2x}$
$\frac{1}{2}x + 2 = -2x$
$2\frac{1}{2}x = -2$
$x = -\frac{4}{5}$

$y = (\sqrt{2})^x$
$\downarrow$ translatie (-4, 0)
$f(x) = (\sqrt{2})^{x+4}$



$f(x) \geq g(x)$ geeft $x \geq -\frac{4}{5}$

© Noordhoff Uitgevers bv

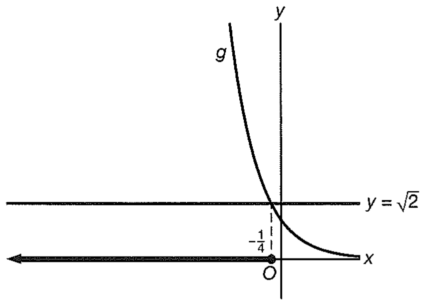
b $g(x) = \sqrt{2}$ geeft $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \sqrt{2}$

$$(2^{-2})^x = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{-2x} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$-2x = \tfrac{1}{2}$$

$$x = -\tfrac{1}{4}$$



$g(x) \geq \sqrt{2}$ geeft $x \leq -\frac{1}{4}$

62 $f(x) = 2^x$

$\big\downarrow$ verm. x-as, 6

$y = 6 \cdot 2^x$

$\big\downarrow$ translatie $(0, -10)$

$g(x) = 6 \cdot 2^x - 10$

$f(x) = g(x)$ geeft $2^x = 6 \cdot 2^x - 10$

$$-5 \cdot 2^x = -10$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

$f(1) = 2$, dus het snijpunt is $S(1, 2)$.

63 **a** $2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2^x \cdot 2 = 2 \cdot 2^x$

Dus uit $2^{x+1} + 2^x = 48$ volgt $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$.

b $2 \cdot 2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x + 1 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^x$

Dus uit $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$ volgt $3 \cdot 2^x = 48$.

$3 \cdot 2^x = 48$

$2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

Bladzijde 42

64 **a** $3^{x+2} + 3^x = 810$

$3^x \cdot 3^2 + 3^x = 810$

$9 \cdot 3^x + 3^x = 810$

$10 \cdot 3^x = 810$

$3^x = 81$

$3^x = 3^4$

$x = 4$

b $2^{x-1} + 2^{x+1} = 10$

$2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^1 = 10$

$\frac{1}{2} \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x = 10$

$2\frac{1}{2} \cdot 2^x = 10$

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$x = 2$

c $2^{x+3} - 2^x = \frac{7}{8}$

$2^x \cdot 2^3 - 2^x = \frac{7}{8}$

$8 \cdot 2^x - 2^x = \frac{7}{8}$

$7 \cdot 2^x = \frac{7}{8}$

$2^x = \frac{1}{8}$

$2^x = 2^{-3}$

$x = -3$

d $3^{x+2} = 24 + 3^x$

$3^x \cdot 3^2 = 24 + 3^x$

$9 \cdot 3^x - 3^x = 24$

$8 \cdot 3^x = 24$

$3^x = 3$

$x = 1$

e $3^x - 3^{x-1} = 2\sqrt{3}$

$3^x - 3^x \cdot 3^{-1} = 2\sqrt{3}$

$3^x - \frac{1}{3} \cdot 3^x = 2\sqrt{3}$

$\frac{2}{3} \cdot 3^x = 2\sqrt{3}$

$3^x = 3\sqrt{3}$

$3^x = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

$3^x = 3^{1\frac{1}{2}}$

$x = 1\frac{1}{2}$

f $5^{x-1} + 5^{x-2} = 6\sqrt{5}$

$5^x \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5^{-2} = 6\sqrt{5}$

$\frac{1}{5} \cdot 5^x + \frac{1}{25} \cdot 5^x = 6\sqrt{5}$

$\frac{6}{25} \cdot 5^x = 6\sqrt{5}$

$5^x = 25\sqrt{5}$

$5^x = 5^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$

$5^x = 5^{2\frac{1}{2}}$

$x = 2\frac{1}{2}$

65 **a** $3^{x+1} = 9^{x+2}$
$3^{x+1} = (3^2)^{x+2}$
$3^{x+1} = 3^{2x+4}$
$x + 1 = 2x + 4$
$-x = 3$
$x = -3$

b $3^{x+1} - 3^{x-1} = 8\sqrt{3}$
$3^x \cdot 3^1 - 3^x \cdot 3^{-1} = 8\sqrt{3}$
$3 \cdot 3^x - \frac{1}{3} \cdot 3^x = 8\sqrt{3}$
$2\frac{2}{3} \cdot 3^x = 8\sqrt{3}$
$3^x = 3\sqrt{3}$
$3^x = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
$3^x = 3^{1\frac{1}{2}}$
$x = 1\frac{1}{2}$

c $3^{x^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$
$3^{x^2} = (3^{-1})^{x-6}$
$3^{x^2} = 3^{-x+6}$
$x^2 = -x + 6$
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x-2)(x+3) = 0$
$x = 2 \vee x = -3$

d $5^x + 5^{x+1} = \frac{6}{25}$
$5^x + 5^x \cdot 5^1 = \frac{6}{25}$
$5^x + 5 \cdot 5^x = \frac{6}{25}$
$6 \cdot 5^x = \frac{6}{25}$
$5^x = \frac{1}{25}$
$5^x = 5^{-2}$
$x = -2$

e $5^{x^2+5} = 125^{x+1}$
$5^{x^2+5} = (5^3)^{x+1}$
$5^{x^2+5} = 5^{3x+3}$
$x^2 + 5 = 3x + 3$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x-1)(x-2) = 0$
$x = 1 \vee x = 2$

f $2^{x+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} = 28$
$2^x \cdot 2^2 - (2^{-1})^{-x+1} = 28$
$4 \cdot 2^x - 2^{x-1} = 28$
$4 \cdot 2^x - 2^x \cdot 2^{-1} = 28$
$4 \cdot 2^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x = 28$
$3\frac{1}{2} \cdot 2^x = 28$
$2^x = 8$
$2^x = 2^3$
$x = 3$

g $4^{x^2+1} = 8^{x^2-1}$
$(2^2)^{x^2+1} = (2^3)^{x^2-1}$
$2^{2x^2+2} = 2^{3x^2-3}$
$2x^2 + 2 = 3x^2 - 3$
$-x^2 = -5$
$x^2 = 5$
$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

h $2^{x+3} - 4^{\frac{1}{2}x-1} = 3\frac{7}{8}$
$2^x \cdot 2^3 - (2^2)^{\frac{1}{2}x-1} = 3\frac{7}{8}$
$8 \cdot 2^x - 2^{x-2} = 3\frac{7}{8}$
$8 \cdot 2^x - 2^x \cdot 2^{-2} = 3\frac{7}{8}$
$8 \cdot 2^x - \frac{1}{4} \cdot 2^x = 3\frac{7}{8}$
$7\frac{3}{4} \cdot 2^x = 3\frac{7}{8}$
$2^x = \frac{1}{2}$
$2^x = 2^{-1}$
$x = -1$

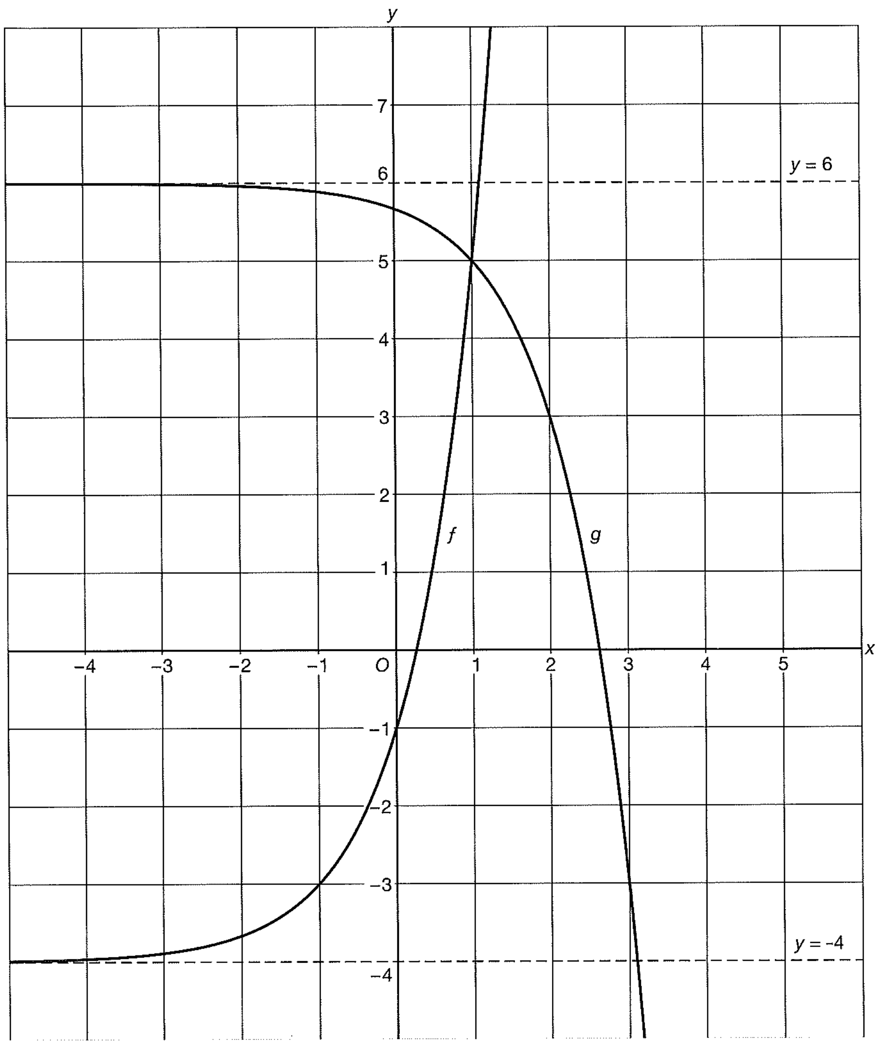
66 **a** $y = 3^x$
$\downarrow$ translatie (-1, -4)
$f(x) = 3^{x+1} - 4$

$y = 3^x$
$\downarrow$ verm. x-as, -1
$y = -3^x$
$\downarrow$ translatie (1, 6)
$g(x) = 6 - 3^{x-1}$

b Voer in $y_1 = 3^{x+1} - 4$ en $y_2 = 6 - 3^{x-1}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3,9	-3,7	-3	-1	5	23	77
$g(x)$	6,0	6,0	5,9	5,7	5	3	-3

© Noordhoff Uitgevers bv



c $B_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$ en $B_g = \langle \leftarrow, 6 \rangle$

d $f(x) = g(x)$ geeft $3^{x+1} - 4 = 6 - 3^{x-1}$

$$3^x \cdot 3^1 - 4 = 6 - 3^x \cdot 3^{-1}$$
$$3 \cdot 3^x - 4 = 6 - \tfrac{1}{3} \cdot 3^x$$
$$3\tfrac{1}{3} \cdot 3^x = 10$$
$$3^x = 3$$
$$x = 1$$

$f(x) \leq g(x)$ geeft $x \leq 1$

e $f(2\frac{1}{2}) = 3^{2\frac{1}{2}+1} - 4 = 3^{3\frac{1}{2}} - 4 = 27\sqrt{3} - 4$, dus $A(2\frac{1}{2}, 27\sqrt{3} - 4)$.

$g(2\frac{1}{2}) = 6 - 3^{2\frac{1}{2}-1} = 6 - 3^{1\frac{1}{2}} = 6 - 3\sqrt{3}$, dus $B(2\frac{1}{2}, 6 - 3\sqrt{3})$.

$AB = y_A - y_B = 27\sqrt{3} - 4 - (6 - 3\sqrt{3}) = 30\sqrt{3} - 10$

f $f(x) - g(x) = 80$ geeft $3^{x+1} - 4 - (6 - 3^{x-1}) = 80$

$$3^{x+1} - 4 - 6 + 3^{x-1} = 80$$
$$3^x \cdot 3^1 - 10 + 3^x \cdot 3^{-1} = 80$$
$$3 \cdot 3^x + \tfrac{1}{3} \cdot 3^x = 90$$
$$3\tfrac{1}{3} \cdot 3^x = 90$$
$$3^x = 27$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$

g $g(x) - f(x) = p$ betekent de grafiek van g ligt p boven de grafiek van f. Dit geldt alleen voor $p < 10$.
Dus de vergelijking heeft geen oplossingen voor $p \geq 10$.

5.4 Exponentiële groei

Bladzijde 44

67 **a** Jaarlijkse toename van 5%, dus de vermenigvuldigingsfactor is 1,05.
Het bedrag op 1 januari 2011 is $1000 \cdot 1{,}05 = 1050$ euro.
Het bedrag op 1 januari 2015 is $1000 \cdot 1{,}05^5 = 1276{,}28$ euro.
b $g = 1{,}05$

Bladzijde 45

68 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}127$
b $g_{\text{maand}} = 0{,}932$
c 73,5%
d 15,5%
e 142%
f $g_{\text{dag}} = 0{,}993$

69 **a** $\left.\begin{array}{l}\text{Stel } L = b \cdot g^t \\ b = 11{,}9 \\ g = 0{,}988\end{array}\right\} L = 11{,}9 \cdot 0{,}988^t$
b Voer in $y_1 = 11{,}9 \cdot 0{,}988^x$ en $y_2 = 7{,}5$.
Intersect geeft $x \approx 38{,}24$.
Dus in het jaar $2005 + 39 = 2044$.

70 **a**

tijd in jaren	0	1	2	3	4	5
hoeveelheid N	2	18	162	1458	13 122	118 098

b Per twee jaar met $9^2 = 81$.
c Per half jaar met 4,5 geeft per jaar met $4{,}5^2 = 20{,}25$.
Dus met (veel) minder dan 4,5 per half jaar.

Bladzijde 47

71 **a** $g_{\text{kwartier}} = 1{,}12$.
$g_{\text{uur}} = 1{,}12^4 \approx 1{,}574$
De toename per uur is 57,4%.
b $g_{5\text{ minuten}} = 1{,}12^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}038$
De toename per vijf minuten is 3,8%.
c $g_{5\text{ uur}} = 1{,}12^{20} \approx 9{,}65$
De toename per vijf uur is 865%.

72 **a** $g_{\text{dag}} = 0{,}84$
$g_{\text{week}} = 0{,}84^7 \approx 0{,}295$
b $g_{\text{uur}} = 0{,}84^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}993$
De afname is 0,7% per uur.
c $g_{\text{kwartier}} = 0{,}992...^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}9982$
Het groeipercentage is −1,18% per kwartier.

73 **a** $g_{\text{week}} = 1{,}3^7 \approx 6{,}27$
Het groeipercentage per week is 527%.
b $g_{4\text{ uur}} = 1{,}3^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}045$
Het groeipercentage per 4 uur is 4,5%.

74 **a** $g_{\text{uur}} = 0{,}805$
$g_{\text{kwartier}} = 0{,}805^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}947$
De afname is 5,3% per kwartier.
b $g_{\text{jaar}} = 1{,}086$
$g_{25\text{ jaar}} = 1{,}086^{25} \approx 7{,}87$
De toename is 687% per 25 jaar.
c $g_{\text{week}} = 2{,}80$
$g_{\text{dag}} = 2{,}80^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}158$
De toename is 15,8% per dag.

© Noordhoff Uitgevers bv

75 **a** $g_{3\,\text{jaar}} = 2{,}5$
$g_{\text{jaar}} = 2{,}5^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}357$
Het groeipercentage per jaar is 35,7%.

b $g_{10\,\text{jaar}} = 5$
$g_{\text{jaar}} = 5^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}175$
Het groeipercentage per jaar is 17,5%.

c $g_{8\,\text{jaar}} = 0{,}85$
$g_{\text{jaar}} = 0{,}85^{\frac{1}{8}} \approx 0{,}980$
Een afname van 2,0% per jaar.

76 **a** Tussen $t = 5$ en $t = 9$ zit 4 uur en de groeifactor in deze 4 uur is $\dfrac{300\,000}{50\,000} = 6$.

b $g_{4\,\text{uur}} = 6$
$g_{\text{uur}} = 6^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}565$

Bladzijde 49

77 **a** Stel $N = b \cdot g^t$.

$$g_{7\,\text{uur}} = \frac{4100}{1600} = 2{,}5625$$
$$g_{\text{uur}} = 2{,}5625^{\frac{1}{7}} = 1{,}143...$$
$$\left.\begin{aligned} &N = b \cdot 1{,}143...^t \\ &t = 3 \text{ en } N = 1600 \end{aligned}\right\} \; b \cdot 1{,}143...^3 = 1600$$
$$b = \frac{1600}{1{,}143...^3} \approx 1070$$

Dus $N = 1070 \cdot 1{,}144^t$.

b Stel $N = b \cdot g^t$.

$$g_{6\,\text{uur}} = \frac{1\,250\,000}{150\,000} = 8{,}333...$$
$$g_{\text{uur}} = 8{,}333...^{\frac{1}{6}} = 1{,}423...$$
$$\left.\begin{aligned} &N = b \cdot 1{,}423...^t \\ &t = 2 \text{ en } N = 150\,000 \end{aligned}\right\} \; b \cdot 1{,}423...^2 = 150\,000$$
$$b = \frac{150\,000}{1{,}423...^2} \approx 74\,000$$

Dus $N = 74\,000 \cdot 1{,}42^t$.

c Stel $H = b \cdot g^t$.

$$g_{3\,\text{dagen}} = \frac{0{,}47}{0{,}60} = 0{,}783...$$
$$g_{\text{dag}} = 0{,}783...^{\frac{1}{3}} = 0{,}921...$$
$$\left.\begin{aligned} &H = b \cdot 0{,}921...^t \\ &t = 5 \text{ en } H = 0{,}60 \end{aligned}\right\} \; b \cdot 0{,}921...^5 = 0{,}60$$
$$b = \frac{0{,}60}{0{,}921...^5} \approx 0{,}90$$

Dus $H = 0{,}90 \cdot 0{,}922^t$.

78 Grafiek door (4, 1000) en (10, 2500), dus $g_{6\,\text{dagen}} = \dfrac{2500}{1000} = 2{,}5$.

$$g_{\text{dag}} = 2{,}5^{\frac{1}{6}} = 1{,}164...$$
$$\left.\begin{aligned} &\text{Stel } N = b \cdot g^t \\ &g = 1{,}164... \end{aligned}\right\} \; \left.\begin{aligned} &N = b \cdot 1{,}164...^t \\ &t = 4 \text{ en } N = 1000 \end{aligned}\right\} \; b \cdot 1{,}164...^4 = 1000$$
$$b = \frac{1000}{1{,}164...^4} \approx 543$$

Dus $N = 543 \cdot 1{,}165^t$.

79 Stel $N = b \cdot g^t$.

$$g_{2\,\text{jaar}} = \frac{606{,}63}{574{,}03} = 1{,}056...$$
$$g_{\text{jaar}} = 1{,}056...^{\frac{1}{2}} = 1{,}02800...$$

Dus het rentepercentage was 2,8%.

Het bedrag op 1 januari 2008 was $\dfrac{574{,}03}{1{,}028^5} \approx 500$ euro.

Bladzijde 49

80 **a** Op $t = 3$ is $A = 31$ en op $t = 7$ is $A = 11$, dus $g_{4\text{ dagen}} = \dfrac{11}{31} = 0{,}354...$

$g_{\text{dag}} = 0{,}354...^{\frac{1}{4}} = 0{,}771...$

$$\left.\begin{array}{l} A = b \cdot g^t \\ g = 0{,}771... \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A = b \cdot 0{,}771...^t \\ t = 3 \text{ en } A = 31 \end{array}\right\} b \cdot 0{,}771...^3 = 31$$

$$b = \frac{31}{0{,}771...^3} \approx 67$$

Dus $A = 67 \cdot 0{,}772^t$.

b De oorspronkelijke wond was 67 mm².

c 60 uur $= \frac{60}{24}$ dag $= 2{,}5$ dag

$t = 2{,}5$ geeft $A = 67 \cdot 0{,}772^{2,5} \approx 35$ mm².

81 **a** $\dfrac{897}{1013} = 0{,}885...$ $\dfrac{793}{897} = 0{,}884...$ $\dfrac{702}{793} = 0{,}885...$ $\dfrac{621}{702} = 0{,}884...$ $\dfrac{550}{621} = 0{,}885...$

Elke factor is bij benadering 0,885, dus er is sprake van een exponentieel verband.

b $$\left.\begin{array}{l} \text{Stel } P = b \cdot g^h \\ b = 1013 \\ g = 0{,}885 \end{array}\right\} P = 1013 \cdot 0{,}885^h$$

c $g_{\text{km stijgen}} = 0{,}885$

$g_{11,5\text{ km dalen}} = 0{,}885^{-11,5} \approx 4{,}08$, dus de luchtdruk is met 308% toegenomen.

82 **a** $$\left.\begin{array}{l} \text{Stel } P_r = b \cdot g^d \\ g_{5\text{ m}} = 0{,}08 \text{ geeft } g_m = 0{,}08^{\frac{1}{5}} \approx 0{,}603 \\ P_r = 100 \cdot 0{,}603^d \end{array}\right\} P_r = 100 \cdot 0{,}603^d$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Stel } P_b = b \cdot g^d \\ g_{5\text{ m}} = 0{,}17 \text{ geeft } g_m = 0{,}17^{\frac{1}{5}} \approx 0{,}702 \\ b = 100 \end{array}\right\} P_b = 100 \cdot 0{,}702^d$$

b $P_r = 1$ geeft $100 \cdot 0{,}603^d = 1$

Voer in $y_1 = 100 \cdot 0{,}603^x$ en $y_2 = 1$.

Intersect geeft $x \approx 9{,}10$.

Dus tot een diepte van 9,1 meter dringt 1% rood licht door.

$d = 9{,}10$ geeft $P_b = 100 \cdot 0{,}702^{9,10} \approx 4\%$

Dus 4% blauw licht dringt tot dezelfde diepte door.

Bladzijde 50

83 **a** Voor A0 is $\dfrac{l}{b} = \dfrac{1189}{841} = 1{,}41... \approx \dfrac{\sqrt{2}}{1}$ en voor A4 is $\dfrac{l}{b} = \dfrac{297}{210} = 1{,}41... \approx \dfrac{\sqrt{2}}{1}$.

b $n = 4$ geeft $841 \cdot g^4 = 210$

$$g^4 = \frac{210}{841}$$

$$g = \left(\frac{210}{841}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}707$$

c $$\left.\begin{array}{l} \text{Stel } l_n = b \cdot g^n \\ g_4 = \dfrac{297}{1189} \text{ geeft } g = \left(\dfrac{297}{1189}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}707 \\ b = 1189 \end{array}\right\} l_n = 1189 \cdot 0{,}707^n$$

d $A_n = l_n \cdot b_n = 1{,}189 \cdot 0{,}707^n \cdot 0{,}841 \cdot 0{,}707^n = 0{,}99... \cdot 0{,}707^{2n} = 0{,}99... \cdot (0{,}707^2)^n = 0{,}99... \cdot 0{,}499...^n$

Dus $A_n = 0{,}5^n$.

e $A_n = 0{,}01$ geeft $0{,}5^n = 0{,}01$

Voer in $y_1 = 0{,}5^x$ en $y_2 = 0{,}01$.

Intersect geeft $x \approx 6{,}64$.

Dus vanaf het formaat A7.

© Noordhoff Uitgevers bv

84 **a** De bal heeft $4 + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}8^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}8^3 = 1961{,}6$ cm afgelegd.

b Stel $H = b \cdot g^n$ met $g = 0{,}8$ en $b = 4$, dus $H = 4 \cdot 0{,}8^n$.
$H = 0{,}1$ geeft $4 \cdot 0{,}8^n = 0{,}1$
Voer in $y_1 = 4 \cdot 0{,}8^x$ en $y_2 = 0{,}1$.
Intersect geeft $x \approx 16{,}53$.
Dus na 17 keer stuiteren.

c Stel $H = b \cdot g^n$.
$g = 0{,}8$
$$\left.\begin{array}{l} H = b \cdot 0{,}8^n \\ n = 3 \text{ en } H = 4 \end{array}\right\} b \cdot 0{,}8^3 = 4$$
$$b = \frac{4}{0{,}8^3} = 7{,}8125$$
Dus de bal is op een hoogte van 7,8 m losgelaten.

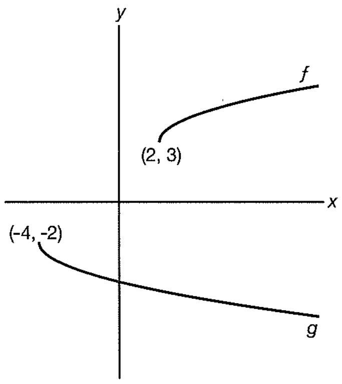
Diagnostische toets

Bladzijde 52

1 **a** $y = \sqrt{x}$ $\xrightarrow{\text{translatie } (2,\,3)}$ $f(x) = 3 + \sqrt{x - 2}$

$y = \sqrt{x}$ $\xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } -1}$ $y = -\sqrt{x}$ $\xrightarrow{\text{translatie } (-4,\,-2)}$ $g(x) = -2 - \sqrt{x + 4}$

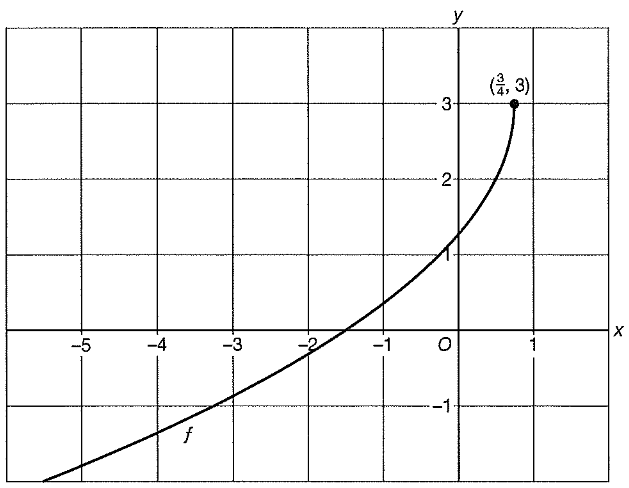
b



c $D_f = [2, \rightarrow\rangle$
$B_f = [3, \rightarrow\rangle$
$D_g = [-4, \rightarrow\rangle$
$B_g = \langle\leftarrow, -2]$

2 **a** $3 - 4x \geq 0$
$-4x \geq -3$
$x \leq \frac{3}{4}$
Dus $D_f = \langle\leftarrow, \frac{3}{4}]$, beginpunt $\left(\frac{3}{4}, 3\right)$ en $B_f = \langle\leftarrow, 3]$.

x	−5	−2	−1	0	$\frac{3}{4}$
$f(x)$	−1,8	−0,3	0,4	1,3	3



b $f(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $3 - \sqrt{3 - 4x} = 1\frac{1}{2}$

$-\sqrt{3 - 4x} = -1\frac{1}{2}$
kwadrateren geeft
$3 - 4x = 2\frac{1}{4}$
$-4x = -\frac{3}{4}$
$x = \frac{3}{16}$
voldoet

$f(x) > 1\frac{1}{2}$ geeft $\frac{3}{16} < x \leq \frac{3}{4}$

c $f(-\frac{1}{4}) = 1$, dus $x \geq -\frac{1}{4}$ geeft $1 \leq f(x) \leq 3$

3 **a** $N = 2\sqrt{-5t + 1}$

$2\sqrt{-5t + 1} = N$
kwadrateren geeft
$4(-5t + 1) = N^2$
$-20t + 4 = N^2$
$-20t = N^2 - 4$
$t = -\frac{1}{20}N^2 + \frac{1}{5}$

b $2x\sqrt{y} - 6\sqrt{x} = 1$

$2x\sqrt{y} = 6\sqrt{x} + 1$
kwadrateren geeft
$4x^2y = 36x + 12\sqrt{x} + 1$

$$y = \frac{36x + 12\sqrt{x} + 1}{4x^2}$$

4 **a** $$\lim_{x\to\infty} \frac{7 - 2x}{3x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7}{x} - 2}{3 - \frac{5}{x}} = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

b $$\lim_{x\to\infty} \frac{6x + 1}{|3 - 2x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x + 1}{-(3 - 2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x + 1}{-3 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6 + \frac{1}{x}}{\frac{-3}{x} + 2} = \frac{6 + 0}{0 + 2} = 3$$

c $$\lim_{x\to\infty} \frac{3 - |5 - x|}{|x| + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - -(5 - x)}{x + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + 5 - x}{x + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{8 - x}{x + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x} - 1}{1 + \frac{6}{x}} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

5 **a** noemer is 0 geeft $3 - 2x = 0$

$-2x = -3$
$x = 1\frac{1}{2}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4x}{3 - 2x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{\frac{3}{x} - 2}\right) = 1 + \frac{4}{0 - 2} = 1 - 2 = -1$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -1$.

b noemer is 0 geeft $2x + 3 = 0$

$2x = -3$
$x = -1\frac{1}{2}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -1\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{|6 - 5x|}{2x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-(6 - 5x)}{2x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6 + 5x}{2x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-6}{x} + 5}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{0 + 5}{2 + 0} = 2\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{|6 - 5x|}{2x + 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6 - 5x}{2x + 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6}{x} - 5}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{0 - 5}{2 + 0} = -2\frac{1}{2}$$

Dus de horizontale asymptoten zijn de lijnen $\begin{cases} y = 2\frac{1}{2} \text{ voor } x \to \infty \\ y = -2\frac{1}{2} \text{ voor } x \to -\infty \end{cases}$

c Noemer is 0 geeft $|2 - x| = 0$

$2 - x = 0$
$x = 2$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{|3x| - 4}{|2-x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{-(2-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{-2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{x}}{\frac{-2}{x} + 1} = \frac{3-0}{0+1} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{|3x| - 4}{|2-x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x-4}{2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3 - \frac{4}{x}}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{-3-0}{0-1} = 3$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

6 **a** noemer = 0 geeft $x + 1 = 0$

$x = -1$

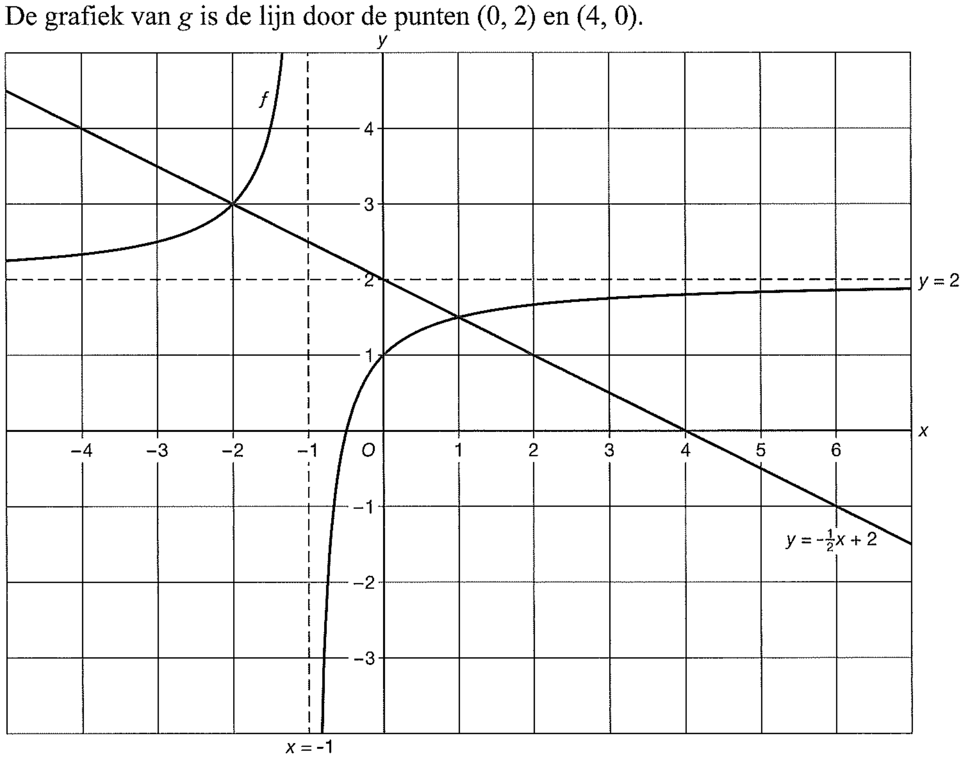
Dus de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = -1$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 2$.

x	-3	-3	0	1	3
$f(x)$	2,5	3	1	1,5	1,75

De grafiek van g is de lijn door de punten (0, 2) en (4, 0).



b $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{1}{2}x + 2$

$2x + 1 = (x+1)(-\frac{1}{2}x + 2)$

$2x + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}x + 2$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2 \vee x = 1$

$f(x) \geq g(x)$ geeft $-2 \leq x < -1 \vee x \geq 1$

7 **a** $\frac{\sqrt{a}}{a^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2} = a^{-1\frac{1}{2}}$

b $a^2 \cdot \sqrt[3]{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{2\frac{1}{3}}$

c $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}}$

8 **a** $(a^{-\frac{1}{4}})^3 = a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

b $a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{a^2} \cdot \sqrt[5]{b} = \frac{\sqrt[5]{b}}{a^2}$

c $7a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{3}{5}} = 7 \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \cdot b^{\frac{3}{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[3]{a}}$

9 **a** $y = \dfrac{1}{5x^2} = \frac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \frac{1}{5}x^{-2}$

Dus $y = \frac{1}{5}x^{-2}$.

b $y = \dfrac{12}{5x^{-3}} = \frac{12}{5} \cdot \dfrac{1}{x^{-3}} = 2\frac{2}{5}x^3$

Dus $y = 2\frac{2}{5}x^3$.

c $y = 3 \cdot x^{0,3} \cdot (4x^{0,5})^4 = 3 \cdot x^{0,3} \cdot 4^4 \cdot x^2 = 768x^{2,3}$

Dus $y = 768x^{2,3}$.

10 **a** $\frac{1}{4}x^{-3,7} = 160$

$x^{-3,7} = 640$

$x = 640^{\frac{1}{-3,7}} \approx 0,174$

b $7 \cdot \sqrt[5]{x^3} = 48$

$\sqrt[5]{x^3} = \frac{48}{7}$

$x^{\frac{3}{5}} = \frac{48}{7}$

$x = \left(\frac{48}{7}\right)^{\frac{5}{3}} \approx 24,750$

c $(3x)^{1,6} + 2 = 7$

$(3x)^{1,6} = 5$

$3x = 5^{\frac{1}{1,6}}$

$x = \frac{1}{3} \cdot 5^{\frac{1}{1,6}} \approx 0,911$

Bladzijde 53

11 $K = 7 \cdot (5q)^{-1,3}$ geeft $7 \cdot (5q)^{-1,3} = K$

$(5q)^{-1,3} = \frac{1}{7}K$

$5q = \left(\frac{1}{7}K\right)^{\frac{1}{-1,3}}$

$q = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{-1,3}} \cdot K^{\frac{1}{-1,3}}$

$q \approx 0,89 \cdot K^{-0,77}$

Dus $q = 0,89 \cdot K^{-0,77}$.

12 **a** $y = 4^x$

$\downarrow$ verm. x-as, 0,3

$y = 0,3 \cdot 4^x$

$\downarrow$ translatie $(0, -130)$

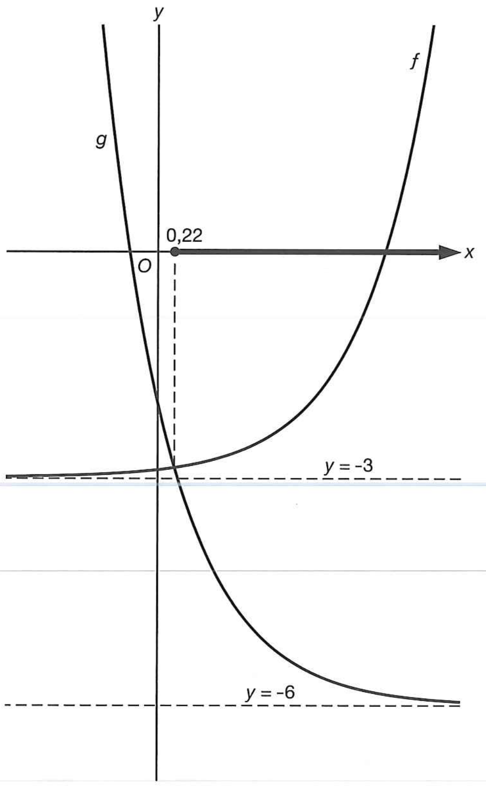
$f(x) = 0,3 \cdot 4^x - 130$

b $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(45 + 12 \cdot 0,5^{x+3}) = \lim\limits_{x\to\infty}(45 + 12 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^x) = \lim\limits_{x\to\infty}(45 + 1,5 \cdot 0,5^x) = 45 + 1,5 \cdot 0 = 45$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 45$.

13 **a** Voer in $y_1 = 3^{x-2} - 3$ en $y_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 6$.

Intersect geeft $x \approx 0,22$.



$f(x) \geq g(x)$ geeft $x \geq 0,22$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f(4) = 6$
Voor $x \leq 4$ is $-3 < f(x) \leq 6$.
c De grafiek van g en de lijn $y = p$ hebben één snijpunt voor $p > -6$.
Dus $g(x) = p$ heeft één oplossing voor $p > -6$.

14 **a** $5^{x-1} = 125 \cdot \sqrt{5}$
$5^{x-1} = 5^3 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$
$5^{x-1} = 5^{3\frac{1}{2}}$
$x - 1 = 3\frac{1}{2}$
$x = 4\frac{1}{2}$

b $3^{2x-5} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$
$3^{2x-5} = (3^{-3})^x$
$3^{2x-5} = 3^{-3x}$
$2x - 5 = -3x$
$5x = 5$
$x = 1$

c $2 \cdot 4^{2x-1} - 3 = 61$
$2 \cdot 4^{2x-1} = 64$
$4^{2x-1} = 32$
$(2^2)^{2x-1} = 2^5$
$2^{4x-2} = 2^5$
$4x - 2 = 5$
$4x = 7$
$x = 1\frac{3}{4}$

15 **a** $9^{x-1} = 27^{x+1}$
$(3^2)^{x-1} = (3^3)^{x+1}$
$3^{2x-2} = 3^{3x+3}$
$2x - 2 = 3x + 3$
$-x = 5$
$x = -5$

b $2^{x+2} + 2^{x+1} = 36$
$2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} = 36$
$4 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 36$
$4\frac{1}{2} \cdot 2^x = 36$
$2^x = 8$
$2^x = 2^3$
$x = 3$

c $2^{x^2} = \left(\frac{1}{8}\right)^x$
$2^{x^2} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^x$
$2^{x^2} = (2^{-3})^x$
$2^{x^2} = 2^{-3x}$
$x^2 = -3x$
$x^2 + 3x = 0$
$x(x + 3) = 0$
$x = 0 \vee x = -3$

16 **a** $g_{\text{dag}} = 1{,}10$
$g_{\text{week}} = 1{,}10^7 \approx 1{,}949$.
Het groeipercentage per week is 94,9%.
b $g_{8\text{ uur}} = 1{,}10^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}032$
Het groeipercentage per 8 uur is 3,2%.

17 **a** $g_{\text{jaar}} = 0{,}64$
$g_{\text{maand}} = 0{,}64^{\frac{1}{12}} \approx 0{,}963$
De afname per maand is 3,7%.
b $g_{5\text{ jaar}} = 0{,}64^5 \approx 0{,}107$
De afname per 5 jaar is 89,3%.

18 Stel $N = b \cdot g^t$.
$g_{3\text{ dagen}} = \dfrac{1200}{1500} = 0{,}8$, dus $g_{\text{dag}} = 0{,}8^{\frac{1}{3}} = 0{,}928...$
$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 0{,}928...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 1500 \end{array}\right\} b \cdot 0{,}928...^4 = 1500$$
$$b = \frac{1500}{0{,}928...^4} \approx 2020$$
Dus $N = 2020 \cdot 0{,}928^t$.

6 Differentiaalrekening

Voorkennis Differentiëren

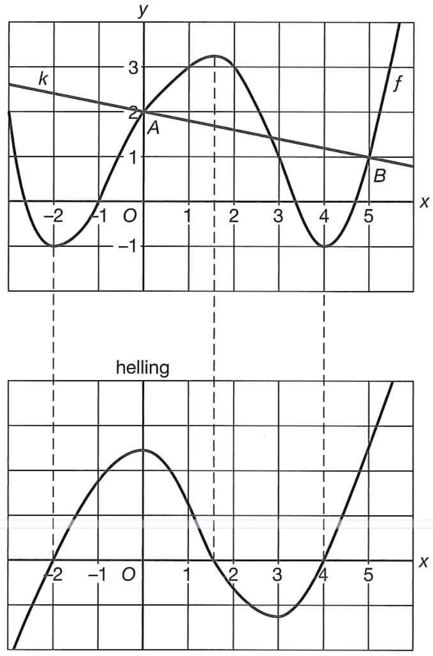
Bladzijde 57

1 **a** De gemiddelde verandering op [-1, 3] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{3--1} = \frac{1}{4}$.

b Het differentiequotiënt op [1, 4] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-3}{4-1} = \frac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}$.

c De helling van lijn k is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{5-0} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$.

d



2 **a** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ geeft $f'(x) = 2x^3 - 6x + 6$

b $g(x) = (5x^2 - 2)^2 = 25x^4 - 20x^2 + 4$ geeft $g'(x) = 100x^3 - 40x$

c $h(x) = \frac{x-3}{x^2+4}$ geeft $h'(x) = \frac{(x^2+4)\cdot 1 - (x-3)\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2+6x}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+6x+4}{(x^2+4)^2}$

d $k(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$ geeft $k'(p) = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{5}p$

e $l(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$ geeft $l'(q) = -10q + 27q^2$

f $m(x) = 2x^2 - \frac{6}{x+1}$ geeft $m'(x) = 4x - \frac{(x+1)\cdot 0 - 6\cdot 1}{(x+1)^2} = 4x + \frac{6}{(x+1)^2}$

Bladzijde 59

3 **a** $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ geeft $f'(x) = -2x + 4$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(3) = -2\cdot 3 + 4 = -2$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(3) = 8, \text{ dus } A(3, 8) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2\cdot 3 + b = 8 \\ -6 + b = 8 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus k: $y = -2x + 14$.

b $f'(x) = 8$ geeft $-2x + 4 = 8$

$-2x = 4$

$x = -2$

$f(-2) = -7$, dus $B(-2, -7)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 **a** $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$
Stel k: $y = ax + b$.
$a = f'(0) = -4$
$$\left.\begin{array}{l} y = -4x + b \\ f(0) = 2, \text{ dus } A(0, 2) \end{array}\right\} b = 2$$
Dus k: $y = -4x + 2$.

b $f'(x) = 1$ geeft $3x^2 - 2x - 4 = 1$
$3x^2 - 2x - 5 = 0$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$
$x = \frac{2 - 8}{6} = -1 \vee x = \frac{2 + 8}{6} = 1\frac{2}{3}$
$f(-1) = 4$ en $f\left(1\frac{2}{3}\right) = -2\frac{22}{27}$, dus $B(-1, 4)$ en $C\left(1\frac{2}{3}, -2\frac{22}{27}\right)$.

5 **a** $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x + 1) \cdot 2 - (2x - 1) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 1}{(x + 1)^2} = \frac{3}{(x + 1)^2}$
Stel k: $y = ax + b$.
$a = f'(2) = \frac{3}{(2 + 1)^2} = \frac{1}{3}$
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ f(2) = 1, \text{ dus } A(2, 1) \end{array}\right\} \frac{1}{3} \cdot 2 + b = 1$$
$\frac{2}{3} + b = 1$
$b = \frac{1}{3}$
Dus k: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

b $f'(x) = \frac{3}{4}$ geeft $\frac{3}{(x + 1)^2} = \frac{3}{4}$
$(x + 1)^2 = 4$
$x + 1 = 2 \vee x + 1 = -2$
$x = 1 \vee x = -3$
$f(-3) = 3\frac{1}{2}$ en $f(1) = \frac{1}{2}$, dus $B\left(-3, 3\frac{1}{2}\right)$ en $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

6 **a** $s(t) = 1{,}5t^2$ geeft $v(t) = s'(t) = 3t$
$v(5) = 3 \cdot 5 = 15$ en $v(10) = 3 \cdot 10 = 30$.
Dus na 5 seconden is de snelheid $15 \cdot 3{,}6 = 54$ km/uur
en na 10 seconden is de snelheid $30 \cdot 3{,}6 = 108$ km/uur.

b 100 km/uur is $\frac{100}{3{,}6}$ m/s geeft $3t = \frac{100}{3{,}6}$
$t = \frac{100}{3{,}6 \cdot 3} \approx 9{,}26$
Dus na ongeveer 9,26 seconden is de snelheid gelijk aan 100 km/uur.

c Gedurende de eerste 10 seconden legt de auto $s(10) = 1{,}5 \cdot 10^2 = 150$ m af.
Op $t = 10$ is de snelheid van de auto $s'(10) = 3 \cdot 10 = 30$ m/s.
Tussen $t = 10$ en $t = 20$ legt de auto $10 \cdot 30 = 300$ m af.
Dus in totaal legt de auto in de eerste 20 seconden $150 + 300 = 450$ m af.

6.1 Toppen en buigpunten

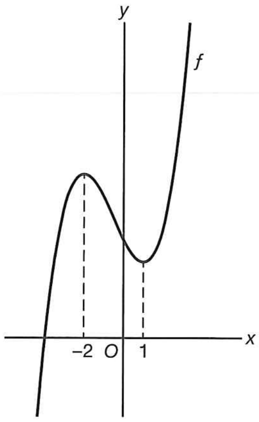
Bladzijde 60

1 In de toppen is de richtingscoëfficient van de raaklijn gelijk aan 0.
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 18x + 50$ geeft $f'(x) = x^2 - 3x - 18$
$f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 3x - 18 = 0$
$(x + 3)(x - 6) = 0$
$x = -3 \vee x = 6$
Dus $x_A = -3$ en $x_B = 6$.

© Noordhoff Uitgevers bv

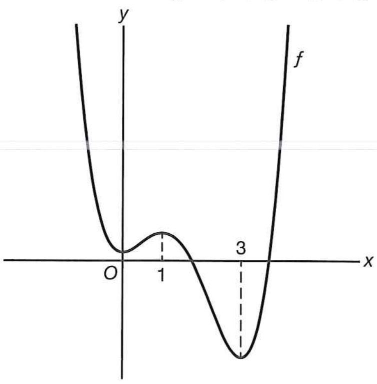
Bladzijde 61

2 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = x^2 + x - 2$
$f'(x) = 0$ geeft $x^2 + x - 2 = 0$
$(x + 2)(x - 1) = 0$
$x = -2 \vee x = 1$



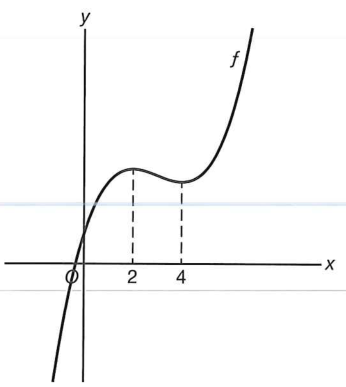
max. is $f(-2) = 8\frac{1}{3}$ en min. is $f(1) = 3\frac{5}{6}$.

3 **a** $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 2$ geeft $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$
$f'(x) = 0$ geeft $12x^3 - 48x^2 + 36x = 0$
$12x(x^2 - 4x + 3) = 0$
$12x(x - 3)(x - 1) = 0$
$x = 0 \vee x = 3 \vee x = 1$



min. is $f(0) = 2$, max. is $f(1) = 7$ en min. is $f(3) = -25$.
b $B_f = [-25, \rightarrow\rangle$

4 **a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 3$ geeft $f'(x) = x^2 - 6x + 8$
$f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 6x + 8 = 0$
$(x - 2)(x - 4) = 0$
$x = 2 \vee x = 4$



max. is $f(2) = 9\frac{2}{3}$ en min. is $f(4) = 8\frac{1}{3}$.
b $f(0) = 3$ en $f(3) = 9$, dus $B_f = [3, 9\frac{2}{3}]$.
c $f(3) = 9$, dus $B_f = [8\frac{1}{3}, \rightarrow\rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 **a** $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+4}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2+4)\cdot 5 - 5x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{5x^2+20-10x^2}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}$

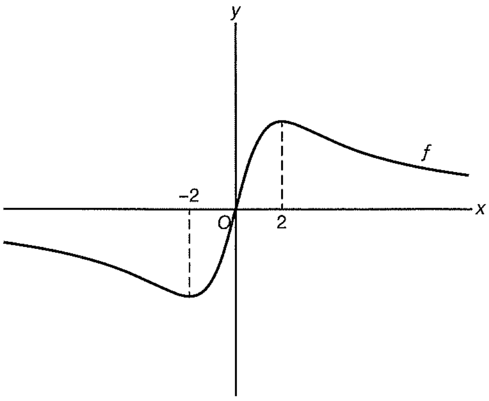
$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2} = 0$

$-5x^2 + 20 = 0$

$-5x^2 = -20$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$



min. is $f(-2) = -1\frac{1}{4}$ en max. is $f(2) = 1\frac{1}{4}$.

$f(x) = 0$ geeft $5x = 0$

$x = 0$

De grafiek snijdt de x-as alleen in (0, 0), dus $B_f = \left[-1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}\right]$.

b Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(6) = \dfrac{-5\cdot 6^2 + 20}{(6^2+4)^2} = -\frac{1}{10}$

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{10}x + b \\ f(6) = \frac{3}{4}, \text{ dus } A\left(6, \frac{3}{4}\right) \end{array}\right\} -\frac{1}{10}\cdot 6 + b = \frac{3}{4}$

$-\frac{3}{5} + b = \frac{3}{4}$

$b = 1\frac{7}{20}$

Dus k: $y = -\frac{1}{10}x + 1\frac{7}{20}$.

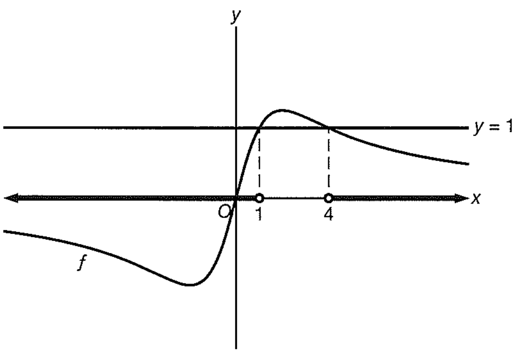
c $f(x) = 1$ geeft $\dfrac{5x}{x^2+4} = 1$

$5x = x^2 + 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1 \vee x = 4$



$f(x) < 1$ geeft $x < 1 \vee x > 4$

6 **a** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$ geeft $f'(x) = x^3 - 2x - 4$

b $f'(2) = 2^3 - 2\cdot 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

c Uit de schets blijkt dat er een laagste punt is met een horizontale raaklijn en omdat $f'(2) = 0$ is er dus een extreme waarde voor $x = 2$.

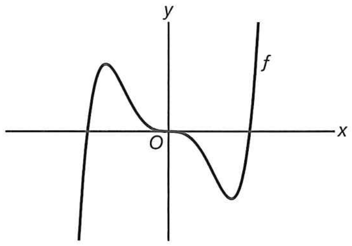
Bladzijde 62

7 **a** $f(x) = 2x^5 - 6x^3$ geeft $f'(x) = 10x^4 - 18x^2$
Stel $l: y = ax + b$.
$a = f'(2) = 10 \cdot 2^4 - 18 \cdot 2^2 = 88$

$$\left.\begin{array}{l} y = 88x + b \\ f(2) = 16, \text{ dus } B(2, 16) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 88 \cdot 2 + b = 16 \\ 176 + b = 16 \\ b = -160 \end{array}$$

Dus $l: y = 88x - 160$.

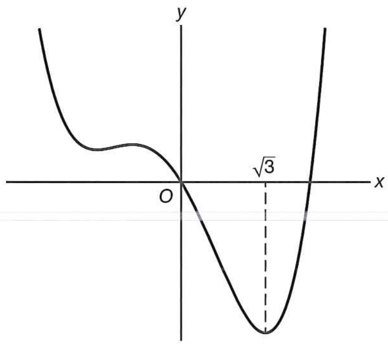
b $f'(0) = 10 \cdot 0^4 - 18 \cdot 0^2 = 0$



In de schets is te zien dat de grafiek geen top heeft voor $x = 0$.
Dus f heeft geen extreme waarde voor $x = 0$.

8 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$ geeft $f'(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

$f'(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} + 3 - 3\sqrt{3} - 3 = 0$

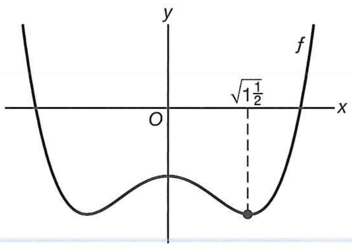


$f'(\sqrt{3}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{3}$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{3}$.

Bladzijde 63

9 **a** $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 6x$
$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = 4 - 6 = -2$
$f'(1)$ is niet gelijk aan 0, dus f heeft geen extreme waarde voor $x = 1$.

b $f'\left(\sqrt{1\frac{1}{2}}\right) = 4 \cdot \left(\sqrt{1\frac{1}{2}}\right)^3 - 6 \cdot \sqrt{1\frac{1}{2}} = 4 \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 6\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 0$

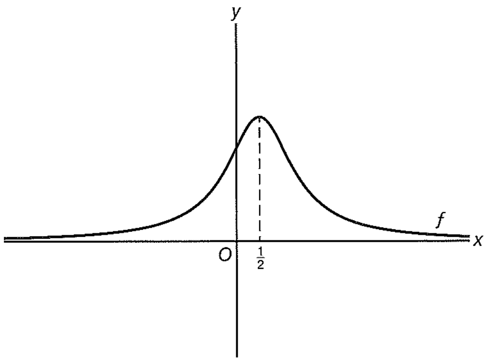


$f'\left(\sqrt{1\frac{1}{2}}\right) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.
Dus de functie heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

 © Noordhoff Uitgevers bv

10 **a** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^3+1)\cdot 1 - (x+1)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{x^3+1-3x^3-3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{-2x^3-3x^2+1}{(x^3+1)^2}$

$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3+1\right)^2} = \dfrac{-2\cdot\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{4}+1}{\left(\frac{1}{8}+1\right)^2} = \dfrac{-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+1}{\left(\frac{9}{8}\right)^2} = \dfrac{0}{\frac{81}{64}} = 0$



$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \tfrac{1}{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \tfrac{1}{2}$.

b $(x+1)(x^2-x+1) = x^3-x^2+x+x^2-x+1 = x^3+1$

c $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{1}{x^2-x+1}$ mits $x \neq -1$.

De grafiek van f heeft een perforatie voor $x = -1$.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x^2-x+1} = \tfrac{1}{3}$

De perforatie is dus $\left(-1, \tfrac{1}{3}\right)$

d $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{1}{x^2-x+1}$ mits $x \neq -1$ geeft

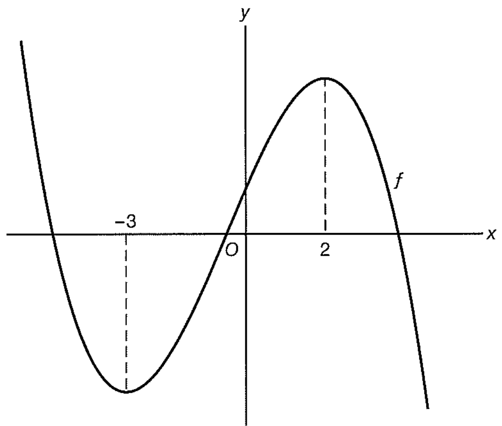
$f'(x) = \dfrac{(x^2-x+1)\cdot 0 - 1\cdot(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $-2x+1 = 0$

$-2x = -1$

$x = \tfrac{1}{2}$

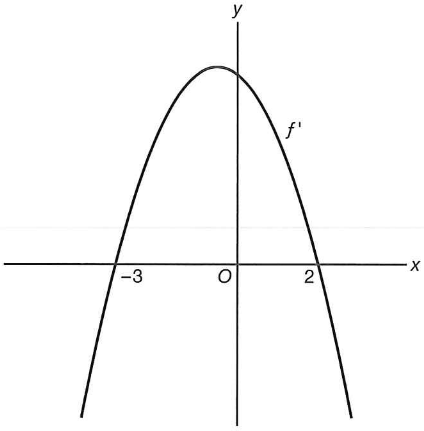
11 **a** Voer in $y_1 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x + 3$.



b De optie minimum geeft $x = -3$ en $y = -10\tfrac{1}{2}$.
De optie maximum geeft $x = 2$ en $y = 10\tfrac{1}{3}$.
dalend op $\langle\leftarrow, -3\rangle$ en $\langle 2, \rightarrow\rangle$
stijgend op $\langle -3, 2\rangle$
toenemend stijgend op $\langle -3, -\tfrac{1}{2}\rangle$
afnemend stijgend op $\langle -\tfrac{1}{2}, 2\rangle$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f'(x) = -x^2 - x + 6$



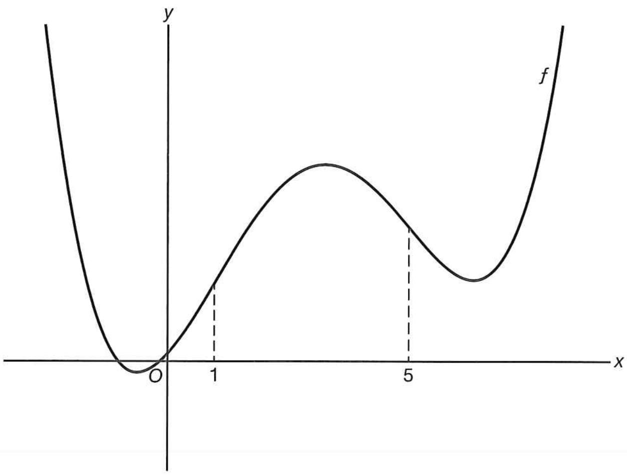
d $x_P = -\dfrac{-1}{-2} = -\frac{1}{2}$

e Bij $x = x_P$ gaat de grafiek over van toenemend stijgend in afnemend stijgend.

12 **a** De raaklijnen raken aan de bovenkant voor $x < 3$.
b De overgang vindt plaats in $\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$.
c onderkant, bovenkant

Bladzijde 65

13 $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48x + 5$
$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 48$
$f''(x) = 12x^2 - 72x + 60$
$f''(x) = 0$ geeft $12x^2 - 72x + 60 = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x - 1)(x - 5) = 0$
$x = 1 \vee x = 5$
$f(1) = 72$ en $f(5) = 120$.



Uit de schets volgt dat de buigpunten (1, 72) en (5, 120) zijn.

14 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x + 4$
$f'(x) = x^2 - 6x + 6$
$f''(x) = 2x - 6$
$f''(x) = 0$ geeft $2x - 6 = 0$
$2x = 6$
$x = 3$
Stel k: $y = ax + b$.
$a = f'(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 6 = -3$

$$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ f(3) = 4, \text{ dus } A(3, 4) \end{array}\right\} -3 \cdot 3 + b = 4$$

$-9 + b = 4$
$b = 13$

Dus k: $y = -3x + 13$.

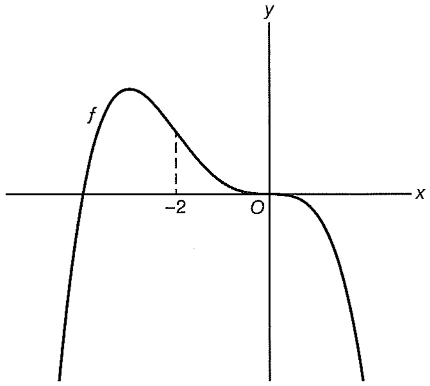
© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 66

15 **a** $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$

$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$
$f''(x) = -x^2 - 2x$
$f''(x) = 0$ geeft $-x^2 - 2x = 0$
$-x(x + 2) = 0$
$x = 0 \vee x = -2$

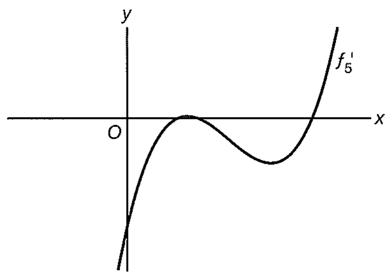
$f(0) = 0$ en $f(-2) = 1\frac{1}{3}$.



Uit de schets volgt dat $\left(-2, 1\frac{1}{3}\right)$ en $(0, 0)$ de buigpunten zijn.

b $f''(0) = 0$ en $f'(0) = 0$, dus in het punt $(0, 0)$ is er sprake van een horizontale buigraaklijn.

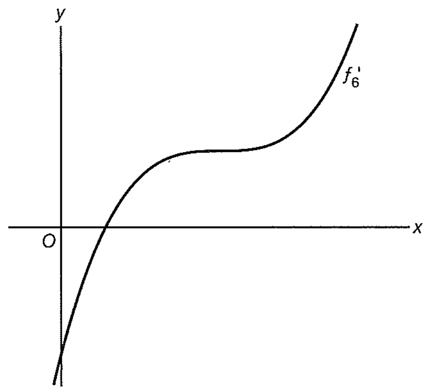
16 **a** $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 5$
$f_5{}'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$
$f_5{}''(x) = 3x^2 - 12x + 10$
$f_5{}''(x) = 0$ geeft $3x^2 - 12x + 10 = 0$
$D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 24 > 0$, dus twee oplossingen



De grafiek van f_5 heeft twee buigpunten, omdat $f_5{}'$ twee extremen heeft.

b $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x - 5$
$f_6{}'(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$
$f_6{}''(x) = 3x^2 - 12x + 12$
$f_6{}''(x) = 0$ geeft $3x^2 - 12x + 12 = 0$
$D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0$

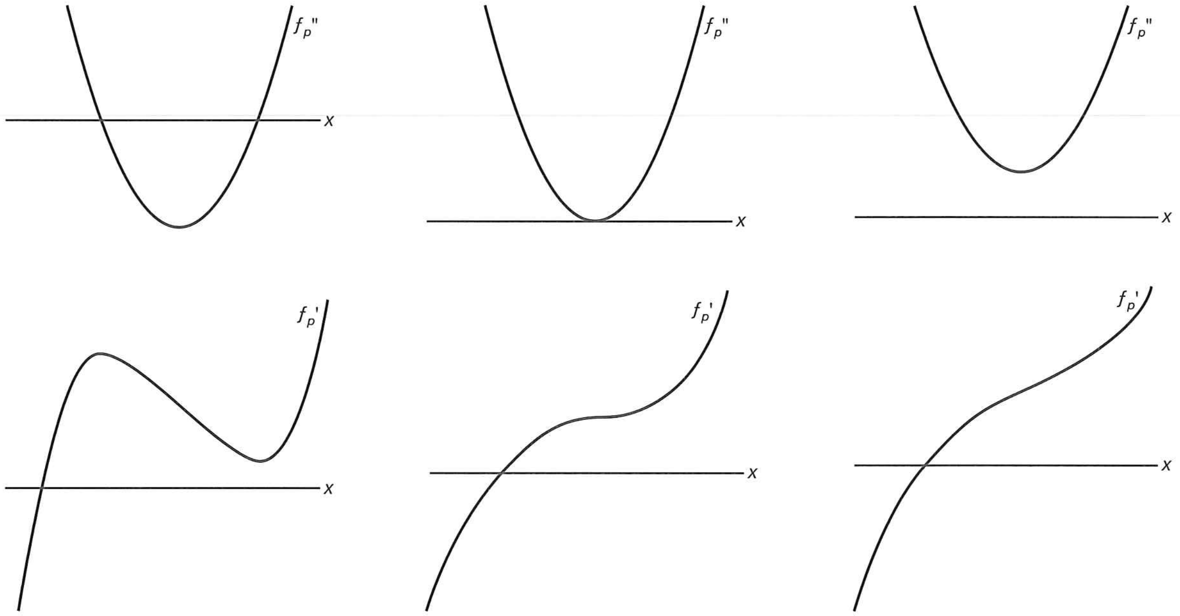
De vergelijking $f_6{}''(x) = 0$ heeft één oplossing.



De grafiek van f_6 heeft geen buigpunten omdat de grafiek van $f_6{}'$ geen extremen heeft.

6

17 $f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + px^2 - 5x - 5$
$f_p'(x) = x^3 - 6x^2 + 2px - 5$
$f_p''(x) = 3x^2 - 12x + 2p$
De grafiek van f_p'' is een dalparabool met nul, één of twee snijpunten met de x-as.



Heeft de grafiek van f_p'' twee snijpunten met de x-as, dan is de grafiek van f_p' stijgend-dalend-stijgend en heeft de grafiek van f_p' twee extremen, dus de grafiek van f heeft twee buigpunten.

Heeft de grafiek van f_p'' één raakpunt met de x-as, dan is de grafiek van f_p' stijgend-stijgend en heeft de grafiek van f_p' geen extremen, dus de grafiek van f heeft geen buigpunten.

Heeft de grafiek van f_p'' geen snijpunten met de x-as, dan is de grafiek van f_p' stijgend en heeft de grafiek van f_p' geen extremen, dus de grafiek van f heeft geen buigpunten.

Dus de grafiek van f_p heeft óf twee óf geen buigpunten.

18 **a** $f(x) = (\frac{1}{2}x^3 - 4)^2 - 5 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 16 - 5 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 11$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^5 - 12x^2$
Stel k: $y = ax + b$.
$a = f'(0) = 0$
$$\left.\begin{array}{l} y = b \\ f(0) = 11, \text{ dus } A(0, 11) \end{array}\right\} b = 11$$
Dus k: $y = 11$.

b $f'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x^5 - 12x^2 = 0$
$3x^5 - 24x^2 = 0$
$3x^2(x^3 - 8) = 0$
$x^2 = 0 \vee x^3 = 8$
$x = 0 \vee x = 2$
In de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$.
$f(2) = -5$, dus top$(2, -5)$.

c $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^5 - 12x^2$ geeft $f''(x) = 7\frac{1}{2}x^4 - 24x$
$f''(x) = 0$ geeft $7\frac{1}{2}x^4 - 24x = 0$
$x(7\frac{1}{2}x^3 - 24) = 0$
$x = 0 \vee 7\frac{1}{2}x^3 = 24$
$x = 0 \vee x^3 = 3\frac{1}{5}$
$x = 0 \vee x = \sqrt[3]{3\frac{1}{5}}$
$f(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}) = (\frac{1}{2} \cdot (\sqrt[3]{3\frac{1}{5}})^3 - 4)^2 - 5 = (\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} - 4)^2 - 5 = \frac{19}{25}$
Dus $B(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}, \frac{19}{25})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

19 $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$
$f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + 1\frac{1}{2}x$
$f_p''(x) = 12x^2 + 6px + 1\frac{1}{2}$
De grafiek van f_p heeft twee buigpunten als de grafiek van f_p' twee extremen heeft, dus als $f_p''(x) = 0$ twee oplossingen heeft.

$$\left.\begin{array}{l}\text{twee oplossingen, dus } D > 0\\ D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1\frac{1}{2} = 36p^2 - 72\end{array}\right\} 36p^2 - 72 > 0$$
$$36p^2 > 72$$
$$p^2 > 2$$
$$p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}$$

Dus de grafiek heeft twee buigpunten voor $p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}$.

20 **a** f heeft twee extreme waarden wanneer $f'(x) = 0$ twee oplossingen heeft en de grafiek van f' twee snijpunten met de x-as heeft.
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geeft $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
De grafiek van f' is een parabool, dus indien de vergelijking $f'(x) = 0$ twee oplossingen heeft, heeft de grafiek van f' ook twee snijpunten met de x-as.
$f'(x) = 0$ geeft $3ax^2 + 2bx + c = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{twee oplossingen, dus } D > 0\\ D = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 12ac\end{array}\right\} 4b^2 - 12ac > 0$$
$$4b^2 > 12ac$$
$$b^2 > 3ac$$

b $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
De grafiek van f' heeft een extreme waarde voor $x = -\dfrac{2b}{2 \cdot 3a} = -\dfrac{b}{3a}$.
Voor een derdegraadsfunctie geldt dat $a \neq 0$ dus er is precies één buigpunt.
Indien twee toppen, dan zijn de x-coördinaten van de toppen de oplossingen van
$f'(x) = 0$ geeft $3ax^2 + 2bx + c = 0$
$D = 4b^2 - 12ac$

$$x = \frac{-2b - \sqrt{D}}{6a} \vee x = \frac{-2b + \sqrt{D}}{6a}$$

$$x_A + x_B = \frac{-2b - \sqrt{D} - 2b + \sqrt{D}}{6a} = \frac{-4b}{6a} = \frac{-2b}{3a} = 2 \cdot \frac{-b}{3a} = 2x_C$$

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

Bladzijde 68

21 **a** $\dfrac{4}{x^2} = 4x^{-2}$ $\quad \dfrac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ $\quad \dfrac{5}{x^4} = 5x^{-4}$ $\quad \dfrac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}$

b $x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$ $\quad 3x^{-2} = \dfrac{3}{x^2}$ $\quad -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$ $\quad \frac{1}{7}x^{-6} = \dfrac{1}{7x^6}$

22 **a** $\dfrac{x^3 + 5x^2}{x} = \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{5x^2}{x} = x^2 + 5x$

$\dfrac{4x^2 + 7x}{x^3} = \dfrac{4x^2}{x^3} + \dfrac{7x}{x^3} = 4x^{-1} + 7x^{-2}$

$\dfrac{2x^5 + 5x^2}{3x^4} = \dfrac{2x^5}{3x^4} + \dfrac{5x^2}{3x^4} = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}x^{-2}$

b $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x}{2x^2} + \dfrac{4}{2x^2} = \dfrac{x + 4}{2x^2}$

$\frac{1}{2}x + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x^3}{2x^2} + \dfrac{6}{2x^2} = \dfrac{x^3 + 6}{2x^2}$

$\frac{2}{3}x^2 - \dfrac{3}{4x} = \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{3}{4x} = \dfrac{8x^3}{12x} - \dfrac{9}{12x} = \dfrac{8x^3 - 9}{12x}$

23 **a** $\left[\dfrac{1}{x^2}\right]' = \dfrac{x^2 \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3}$

b
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}\\[2ex] \left[\dfrac{1}{x^2}\right]' = -\dfrac{2}{x^3} = -2 \cdot x^{-3}\end{array}\right\} [x^{-2}]' = -2x^{-3}$$

c $[x^{-5}]' = \left[\dfrac{1}{x^5}\right]' = \dfrac{x^5 \cdot 0 - 1 \cdot 5x^4}{(x^5)^2} = \dfrac{-5x^4}{x^{10}} = \dfrac{-5}{x^6} = -5x^{-6}$

Bladzijde 69

24 De functies g en h zijn zonder quotiëntregel te differentiëren, omdat de noemers uit slechts één term bestaan.

25 **a** $f(x) = \frac{1}{x^6} = x^{-6}$ geeft $f'(x) = -6x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$

b $g(x) = 5 - \frac{3}{x^2} = 5 - 3x^{-2}$ geeft $g'(x) = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3}$

c $h(x) = ax^4 - \frac{b}{x^4} = ax^4 - bx^{-4}$ geeft $h'(x) = 4ax^3 + 4bx^{-5} = 4ax^3 + \frac{4b}{x^5}$

26 **a** $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2} = \frac{2x}{3x^2} - \frac{1}{3x^2} = \frac{2}{3}x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-2}$ geeft $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-3} = -\frac{2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$

b $g(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$ geeft $g'(x) = \frac{(2x-1)\cdot 6x - 3x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{12x^2 - 6x - 6x^2}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2}$

c $h(x) = \frac{3x^6 - 3}{x^3} = \frac{3x^6}{x^3} - \frac{3}{x^3} = 3x^3 - 3x^{-3}$ geeft $h'(x) = 9x^2 + 9x^{-4} = 9x^2 + \frac{9}{x^4} = \frac{9x^6}{x^4} + \frac{9}{x^4} = \frac{9x^6 + 9}{x^4}$

27 **a** $f(x) = 5x^2 - \frac{5}{x^2} = 5x^2 - 5x^{-2}$ geeft $f'(x) = 10x + 10x^{-3} = 10x + \frac{10}{x^3}$

b $g(x) = \frac{5}{2x^2} - \frac{2x^2}{5} = \frac{5}{2}x^{-2} - \frac{2}{5}x^2$ geeft $g'(x) = -5x^{-3} - \frac{4}{5}x = -\frac{5}{x^3} - \frac{4}{5}x$

c $h(x) = 6 - \frac{x^2 - 1}{x} = 6 - \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}\right) = 6 - x + x^{-1}$ geeft $h'(x) = -1 - x^{-2} = -1 - \frac{1}{x^2}$

6

Bladzijde 70

28 **a** $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2-1)^2}$

Stel $k: y = ax + b$.

$a = f'(2) = \frac{-4-1}{(4-1)^2} = -\frac{5}{9}$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{5}{9}x + b \\ f(2) = \frac{2}{3} \text{ dus } A\left(2, \frac{2}{3}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{5}{9}\cdot 2 + b = \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{9} + b = \frac{2}{3} \\ b = 1\frac{7}{9} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{5}{9}x + 1\frac{7}{9}$.

b $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - x^{-1}$ geeft $g'(x) = 1 + x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

Stel $l: y = ax + b$.

$a = g'(2) = \frac{4+1}{4} = 1\frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{4}x + b \\ g(2) = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } B\left(2, 1\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{4}\cdot 2 + b = 1\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} + b = 1\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{array}$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{4}x - 1$.

c $g(x) = x - x^{-1}$

$g'(x) = 1 + x^{-2}$

$g''(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

$g''(x) = 0$ geeft $\frac{-2}{x^3} = 0$ en deze vergelijking heeft geen oplossingen.

g' heeft geen extreme waarden, dus de grafiek van g heeft geen buigpunten.

© Noordhoff Uitgevers bv

29 **a** $f(x) = 0$ geeft $3x + 3 = 0$

$3x = -3$

$x = -1$

Dus $A(-1, 0)$.

$f(x) = \frac{3x+3}{x} = \frac{3x}{x} + \frac{3}{x} = 3 + 3x^{-1}$ geeft $f'(x) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$

Stel $k: y = ax + b$.

$a = f'(-1) = -\frac{3}{(-1)^2} = -3$

$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ A(-1, 0) \end{array}\right\}$ $-3 \cdot -1 + b = 0$

$3 + b = 0$

$b = -3$

Dus $k: y = -3x - 3$.

b $f'(x) = -\frac{3}{4}$ geeft $-\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{4}$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$

$f(2) = 4\frac{1}{2}$ en $f(-2) = 1\frac{1}{2}$, dus de raakpunten zijn $\left(2, 4\frac{1}{2}\right)$ en $\left(-2, 1\frac{1}{2}\right)$.

30 **a** $f(x) = \frac{x^2+4}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{4}{x} = x + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

Stel $k: y = ax + b$.

$a = f'(3) = 1 - \frac{4}{3^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{5}{9}x + b \\ f(3) = 4\frac{1}{3}, \text{dus } A\left(3, 4\frac{1}{3}\right) \end{array}\right\}$ $\frac{5}{9} \cdot 3 + b = 4\frac{1}{3}$

$1\frac{2}{3} + b = 4\frac{1}{3}$

$b = 2\frac{2}{3}$

Dus $k: y = \frac{5}{9}x + 2\frac{2}{3}$.

b $f'(x) = -3$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = -3$

$-\frac{4}{x^2} = -4$

$x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

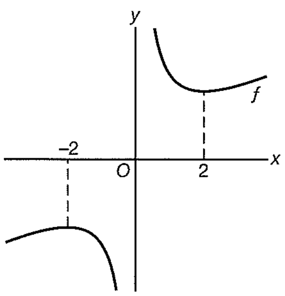
$f(1) = 5$ en $f(-1) = -5$, dus de raakpunten zijn $(1, 5)$ en $(-1, -5)$.

c $f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = 0$

$1 = \frac{4}{x^2}$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$



max. is $f(-2) = -4$ en min. is $f(2) = 4$.

d $f'(x) = 2$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = 2$

$-\frac{4}{x^2} = 1$

$x^2 = -4$

geen oplossingen

Dus er is geen raaklijn met richtingscoëfficiënt 2.

31 a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

b $x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$

c $\dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

d $x^3 \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

32 a $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b $2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

c $-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\dfrac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\dfrac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

Bladzijde 71

33 a $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$

$[x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}]' = [x]'$

$[x^{\frac{1}{2}}]' \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

$2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

b $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

$x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}$

$[x^{\frac{1}{2}}]' = \dfrac{\frac{1}{2}}{x^{\frac{1}{2}}}$

$[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

34 a $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = -1\frac{1}{2} \cdot x^{-2\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\dfrac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\dfrac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

c $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}} = \dfrac{x^2}{x\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} = \dfrac{x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^2}{x^{1\frac{1}{2}}} - \dfrac{2}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft

$h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{3}{x^{2\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3) = x^3 \cdot \sqrt{x} - 3x^2 = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x^2 = x^{3\frac{1}{2}} - 3x^2$ geeft

$k'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} - 6x$

Bladzijde 72

35 a $f(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1\frac{1}{3}}$ geeft $g'(x) = 1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}} = -\dfrac{1}{2x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3} = x^3 \cdot x^{\frac{3}{5}} = x^{3\frac{3}{5}}$ geeft $k'(x) = 3\frac{3}{5}x^{2\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

36 a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{2\frac{1}{4}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{4}x^{1\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot \sqrt[4]{x}$

b $g(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{4x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4x^2}{x^{1\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = 4x^{\frac{1}{2}} + x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft

$g'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

c $h(x) = (x^2 + 1)(1 + \sqrt{x}) = x^2 + x^2 \cdot \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} = x^2 + x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}} = x^2 + x^{2\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}}$ geeft

$h'(x) = 2x + 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2x + 2\frac{1}{2}x \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x + 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d $k(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{4}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{3}}$ geeft

$k'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-1\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + \dfrac{4}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

37 **a** $f(x)=\left(x\sqrt{x}-3\right)^2=x^3-6x\sqrt{x}+9=x^3-6x\cdot x^{\frac{1}{2}}+9=x^3-6x^{1\frac{1}{2}}+9$ geeft $f'(x)=3x^2-9x^{\frac{1}{2}}=3x^2-9\sqrt{x}$

b $g(x)=\dfrac{2x-3}{x^2\cdot\sqrt{x}}=\dfrac{2x}{x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{3}{x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2x}{x^{2\frac{1}{2}}}-\dfrac{3}{x^{2\frac{1}{2}}}=2x^{-1\frac{1}{2}}-3x^{-2\frac{1}{2}}$ geeft

$g'(x)=-3x^{-2\frac{1}{2}}+7\tfrac{1}{2}x^{-3\frac{1}{2}}=-\dfrac{3}{x^{2\frac{1}{2}}}+\tfrac{15}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{3\frac{1}{2}}}=-\dfrac{3}{x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{15}{2x^3\cdot x^{\frac{1}{2}}}=-\dfrac{3}{x^2\cdot\sqrt{x}}+\dfrac{15}{2x^3\cdot\sqrt{x}}$

c $h(x)=\left(x-\sqrt[3]{x}\right)^2=\left(x-x^{\frac{1}{3}}\right)^2=x^2-2\cdot x\cdot x^{\frac{1}{3}}+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2=x^2-2x^{1\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$ geeft

$h'(x)=2x-2\tfrac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}+\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=2x-2\tfrac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{x}+\tfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=2x-2\tfrac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$

d $k(x)=\dfrac{x^2+4}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{x^2}{x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{4}{x^{\frac{1}{4}}}=x^{1\frac{3}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}$ geeft

$k'(x)=1\tfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}}-x^{-1\frac{1}{4}}=1\tfrac{3}{4}\cdot\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{1}{x^{1\frac{1}{4}}}=1\tfrac{3}{4}\cdot\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{1}{x\cdot x^{\frac{1}{4}}}=1\tfrac{3}{4}\cdot\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{1}{x\cdot\sqrt[4]{x}}$

38 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x)=\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\tfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$

Stel $k: y=ax+b$.

$a=f'\left(\tfrac{1}{8}\right)=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=\dfrac{2}{3\cdot\frac{1}{2}}=1\tfrac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l}y=1\tfrac{1}{3}x+b\\ f\left(\tfrac{1}{8}\right)=\tfrac{1}{4},\text{ dus }A\left(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{4}\right)\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}+b=\tfrac{1}{4}\\ \tfrac{1}{6}+b=\tfrac{1}{4}\\ b=\tfrac{1}{12}\end{array}$$

Dus $k: y=1\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{12}$.

Stel $l: y=ax+b$.

$a=f'(8)=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{8}}=\dfrac{2}{3\cdot 2}=\tfrac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l}y=\tfrac{1}{3}x+b\\ f(8)=4,\text{ dus }B(8,4)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}\cdot 8+b=4\\ 2\tfrac{2}{3}+b=4\\ b=1\tfrac{1}{3}\end{array}$$

Dus $l: y=\tfrac{1}{3}x+1\tfrac{1}{3}$.

Snijden van k en l geeft $1\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{12}=\tfrac{1}{3}x+1\tfrac{1}{3}$

$$\begin{array}{l}4x+\tfrac{1}{4}=x+4\\ 3x=3\tfrac{3}{4}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=1\tfrac{1}{4}\\ y=1\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{12}\end{array}\right\}\;y=1\tfrac{1}{3}\cdot 1\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}=1\tfrac{3}{4}$$

Dus $C\left(1\tfrac{1}{4},1\tfrac{3}{4}\right)$.

39 **a** $f(x)=x\sqrt{x}-3x=x^{1\frac{1}{2}}-3x$ geeft $f'(x)=1\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-3=1\tfrac{1}{2}\sqrt{x}-3$

$f'(x)=0$ geeft $1\tfrac{1}{2}\sqrt{x}-3=0$

$$\begin{array}{l}1\tfrac{1}{2}\sqrt{x}=3\\ \sqrt{x}=2\\ x=4\end{array}$$

$f(4)=4\sqrt{4}-3\cdot 4=-4$

min. is $f(4)=-4$.

b Stel $k: y=ax$.

$a=f'(0)=1\tfrac{1}{2}\sqrt{0}-3=-3$

Dus $k: y=-3x$.

c $f'(x)=3$ geeft $1\tfrac{1}{2}\sqrt{x}-3=3$

$$\begin{array}{l}1\tfrac{1}{2}\sqrt{x}=6\\ \sqrt{x}=4\\ x=16\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}l: y=3x+b\\ f(16)=16,\text{ dus }A(16,16)\end{array}\right\}\begin{array}{l}3\cdot 16+b=16\\ 48+b=16\\ b=-32\end{array}$$

Dus $A(16,16)$ en $l: y=3x-32$.

© Noordhoff Uitgevers bv

40 **a** $f(x) = \dfrac{x^3+2}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - x^{-1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x \cdot x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

Stel $k{:}\ y = ax + b$.

$a = f'(1) = 2\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} - \dfrac{1}{1 \cdot \sqrt{1}} = 2\frac{1}{2} - 1 = 1\frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ f(1) = 3, \text{dus } A(1,3) \end{array}\right\}\ 1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 3$

$1\frac{1}{2} + b = 3$

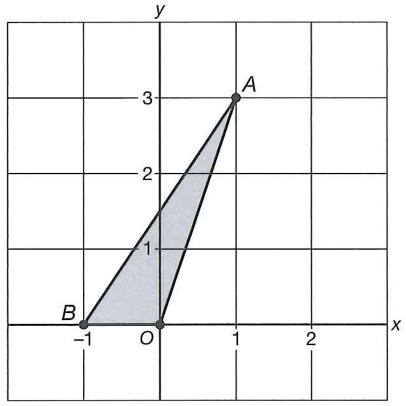
$b = 1\frac{1}{2}$

Dus $k{:}\ y = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

Snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$

$1\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{2}$

$x = -1$, dus $B(-1, 0)$



$O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$

b $f'(x) = 0$ geeft $2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = 0$

$2\frac{1}{2}x\sqrt{x} = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$2\frac{1}{2}x\sqrt{x} \cdot x\sqrt{x} = 1$

$2\frac{1}{2}x^3 = 1$

$x^3 = \frac{2}{5}$

$x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

Dus $p = \frac{2}{5}$.

Bladzijde 73

41 **a** $s(t) = 10t\sqrt{t} = 10t^{1\frac{1}{2}}$ geeft $v(t) = s'(t) = 15t^{\frac{1}{2}} = 15\sqrt{t}$

$v(8) = 15\sqrt{8} = 15 \cdot 2\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

Dus de snelheid na 8 seconden is $30\sqrt{2}$ m/s.

b 108 km/uur $= \dfrac{108}{3{,}6} = 30$ m/s

$v(t) = 30$ geeft $15\sqrt{t} = 30$

$\sqrt{t} = 2$

$t = 4$

Dus na 4 seconden is de snelheid 108 km/uur.

c $s(9) = 10 \cdot 9 \cdot \sqrt{9} = 90 \cdot 3 = 270$ en $v(9) = 15 \cdot \sqrt{9} = 15 \cdot 3 = 45$

Dus in de eerste 9 seconden legt de trein 270 meter af en in de volgende 51 seconden $51 \cdot 45 = 2295$ meter.

Dus in de eerste minuut legt de trein $270 + 2295 = 2565$ meter af.

© Noordhoff Uitgevers bv

6.3 De kettingregel

Bladzijde 75

42 **a** $v(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 = 9 - 15 = -6$

$u(v(3)) = u(-6) = (-6)^4 = 1296$

b $u(v(4)) = u(4^2 - 5 \cdot 4) = u(16 - 20) = u(-4) = (-4)^4 = 256$

43 **a** $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = v^6$ en $v(x) = 3 - x^5$.

b $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \sqrt{v}$ en $v(x) = x^2 + 1$.

c $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \dfrac{2}{v^3}$ en $v(x) = x + 8$.

Bladzijde 77

44 **a** $f(x) = (4x + 3)^3$ geeft $f'(x) = 3(4x + 3)^2 \cdot 4 = 12(4x + 3)^2$

b $g(x) = 6\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^5$ geeft $g'(x) = 5 \cdot 6\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = 15\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^4$

c $h(x) = 3x^2 - \left(\frac{1}{4}x - 2\right)^3$ geeft $h'(x) = 6x - 3\left(\frac{1}{4}x - 2\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = 6x - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}x - 2\right)^2$

d $j(x) = (4x^2 - 3)^4$ geeft $j'(x) = 4(4x^2 - 3)^3 \cdot 8x = 32x(4x^2 - 3)^3$

e $k(x) = 5x - \dfrac{4}{(3x + 2)^3} = 5x - 4(3x + 2)^{-3}$ geeft

$k'(x) = 5 - -3 \cdot 4(3x + 2)^{-4} \cdot 3 = 5 + 36(3x + 2)^{-4} = 5 + \dfrac{36}{(3x + 2)^4}$

f $l(x) = \sqrt{4x + 1}$ geeft $l'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4x + 1}} \cdot 4 = \dfrac{2}{\sqrt{4x + 1}}$

45 **a** $f(x) = -2(2x + 1)^4$ geeft $f'(x) = 4 \cdot -2(2x + 1)^3 \cdot 2 = -16(2x + 1)^3$

b $g(x) = \dfrac{1}{(3x - 2)^2} = (3x - 2)^{-2}$ geeft $g'(x) = -2(3x - 2)^{-3} \cdot 3 = \dfrac{-6}{(3x - 2)^3}$

c $h(x) = \sqrt{2x^2 + 4x}$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 + 4x}} \cdot (4x + 4) = \dfrac{2x + 2}{\sqrt{2x^2 + 4x}}$

d $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - 1}} = (4x - 1)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $j'(x) = -\frac{1}{2}(4x - 1)^{-1\frac{1}{2}} \cdot 4 = \dfrac{-2}{(4x - 1)\sqrt{4x - 1}}$

e $k(x) = (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3} = (x^2 + 3)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $k'(x) = 1\frac{1}{2}(x^2 + 3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 + 3}$

f $l(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = (x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$l'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)^{-1\frac{1}{2}} \cdot (2x + 2) = \dfrac{-x - 1}{(x^2 + 2x + 3)\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

46 **a** $f(x) = 4(x^3 + 7x - 2)^2$ geeft $f'(x) = 2 \cdot 4(x^3 + 7x - 2) \cdot (3x^2 + 7) = 8(3x^2 + 7)(x^3 + 7x - 2)$

b $g(x) = -\dfrac{6}{(x^2 + 3x)^3} = -6(x^2 + 3x)^{-3}$ geeft $g'(x) = -3 \cdot -6(x^2 + 3x)^{-4} \cdot (2x + 3) = \dfrac{18(2x + 3)}{(x^2 + 3x)^4}$

c $h(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x} = (x^3 + 3x)^{\frac{1}{3}}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 3x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 + 3) = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x^2 + 3x)^2}}$

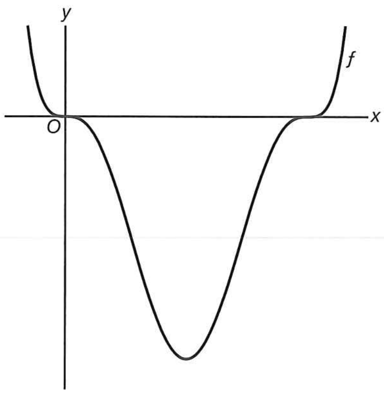
d $j(x) = \dfrac{1}{(4 - x)\sqrt{4 - x}} = (4 - x)^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $j'(x) = -1\frac{1}{2} \cdot (4 - x)^{-2\frac{1}{2}} \cdot -1 = \dfrac{3}{2(4 - x)^2 \cdot \sqrt{4 - x}}$

e $k(x) = 5\sqrt{2x^4 + x^2} + 4x^2$ geeft $k'(x) = 5 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x^4 + x^2}} \cdot (8x^3 + 2x) + 8x = \dfrac{5(4x^3 + x)}{\sqrt{2x^4 + x^2}} + 8x$

f $l(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{x^2 + 4}$ geeft $l'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

47 **a** Voer in $y_1 = (\frac{1}{2}x^2 - 2x)^3$.



b $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 2x)^3$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 \cdot (x - 2)$

$f'(x) = 0$ geeft $3(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 \cdot (x - 2) = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \vee x - 2 = 0$

$x^2 - 4x = 0 \vee x = 2$

$x(x - 4) = 0 \vee x = 2$

$x = 0 \vee x = 4 \vee x = 2$

c Stel l: $y = ax + b$.

$a = f'(6) = 3(\frac{1}{2} \cdot 6^2 - 2 \cdot 6)^2 \cdot (6 - 2) = 432$

$\left.\begin{array}{l} y = 432x + b \\ f(6) = 216, \text{ dus } A(6, 216) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 432 \cdot 6 + b = 216 \\ 2592 + b = 216 \\ b = -2376 \end{array}$

Dus l: $y = 432x - 2376$.

48 **a** $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$ geeft $f'(x) = 4 \cdot (\frac{1}{4}x - 1)^3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1$

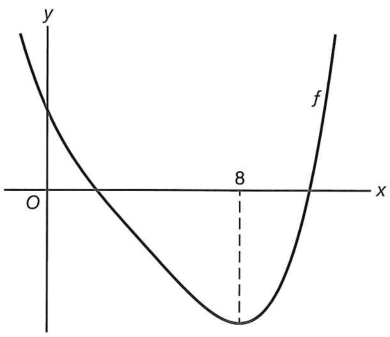
$f'(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = 0$

$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 1$

$\frac{1}{4}x - 1 = 1$

$\frac{1}{4}x = 2$

$x = 8$



min. is $f(8) = -5$, dus $B_f = [-5, \rightarrow\rangle$.

b Stel k: $y = ax + b$.

$a = rc_k = rc_l = -2$

$f'(x) = -2$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = -2$

$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = -1$

$\frac{1}{4}x - 1 = -1$

$\frac{1}{4}x = 0$

$x = 0$

$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(0) = 3, \text{ dus door } (0, 3) \end{array}\right\} b = 3$

Dus k: $y = -2x + 3$.

c $f(4) = (\frac{1}{4} \cdot 4 - 1)^4 - 4 + 2 = -2$

Voer in $y_1 = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$ en $y_2 = -2$.

Intersect geeft $x = 4$ en $x \approx 10{,}35$, dus $A(4, -2)$ en $B(10{,}35; -2)$.

$AB \approx 10{,}35 - 4 = 6{,}35$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 79

49 **a** $f(3) = \frac{1}{4}(2 \cdot 3 - 5)^3 + 2 = \frac{1}{4} \cdot 1^3 + 2 = 2\frac{1}{4}$
$g(3) = -\frac{1}{4}(3 \cdot 3 - 10)^4 + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot 1 + 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$
$f(3) = g(3)$ dus A ligt zowel op de grafiek van f als op die van g.

b $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 5)^3 + 2$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{4}(2x - 5)^2 \cdot 2 = 1\frac{1}{2}(2x - 5)^2$
$f'(3) = 1\frac{1}{2}(2 \cdot 3 - 5)^2 = 1\frac{1}{2}$
$g(x) = -\frac{1}{4}(3x - 10)^4 + 2\frac{1}{2}$ geeft $g'(x) = 4 \cdot -\frac{1}{4}(3x - 10)^3 \cdot 3 = -3(3x - 10)^3$
$g'(3) = -3 \cdot (3 \cdot 3 - 10)^3 = 3$
$f'(3) \neq g'(3)$ dus de raaklijnen in A hebben niet dezelfde richting. Emma heeft dus geen gelijk.

c $f'(x) = 13\frac{1}{2}$ geeft $1\frac{1}{2}(2x - 5)^2 = 13\frac{1}{2}$
$(2x - 5)^2 = 9$
$2x - 5 = 3 \vee 2x - 5 = -3$
$2x = 8 \vee 2x = 2$
$x = 4 \vee x = 1$
$f(4) = 8\frac{3}{4}$ en $f(1) = -4\frac{3}{4}$, dus de punten zijn $\left(4, 8\frac{3}{4}\right)$ en $\left(1, -4\frac{3}{4}\right)$.

50 **a** $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - x^2 + 5x$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x - 2x + 5 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 2x + 5$
Stel k: $y = ax + b$.
$a = f'(4) = \dfrac{4}{\sqrt{4^2 + 9}} - 2 \cdot 4 + 5 = -2\frac{1}{5}$
$$\left.\begin{array}{l} y = -2\frac{1}{5}x + b \\ f(4) = 9, \text{ dus } A(4, 9) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2\frac{1}{5} \cdot 4 + b = 9 \\ -8\frac{4}{5} + b = 9 \\ b = 17\frac{4}{5} \end{array}$$
Dus k: $y = -2\frac{1}{5}x + 17\frac{4}{5}$.

b $f'(3) = \dfrac{3}{\sqrt{3^2 + 9}} - 2 \cdot 3 + 5 = \dfrac{3}{\sqrt{18}} - 1 \neq 0$
Dus de grafiek heeft geen horizontale raaklijn voor $x = 3$.

c Stel l: $y = ax + b$.
$a = \text{rc}_l = \text{rc}_m = 5$
$f'(x) = 5$ geeft $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 2x + 5 = 5$
$\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = 2x$
kwadrateren geeft
$\dfrac{x^2}{x^2 + 9} = 4x^2$
$4x^2(x^2 + 9) = x^2$
$4x^4 + 36x^2 = x^2$
$4x^4 + 35x^2 = 0$
$x^2(4x^2 + 35) = 0$
$x^2 = 0 \vee 4x^2 = -35$
$x = 0$ geen opl.
$$\left.\begin{array}{l} y = 5x + b \\ f(0) = 3, \text{ dus door } (0, 3) \end{array}\right\} b = 3$$
Dus l: $y = 5x + 3$.

51 **a** De tijd nodig van A naar B via C is $\frac{2}{80} + \frac{10}{100} = \frac{1}{8}$ uur = 450 seconden.
De afstand $AB = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$ km.
De tijd nodig van A direct naar B is $\dfrac{2\sqrt{26}}{80} = \frac{1}{40}\sqrt{26}$ uur $= 458{,}9...$ seconden.
Het verschil is $458{,}9... - 450 \approx 9$ seconden.

b $t = \dfrac{AD}{80} + \dfrac{BD}{100} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2^2}}{80} + \dfrac{10 - x}{100} = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + \dfrac{10}{100} - \dfrac{x}{100} = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0{,}1 - 0{,}01x$
Dus $t = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0{,}1 - 0{,}01x$.

6

c $t(x) = \frac{1}{80}\sqrt{x^2+4} + 0{,}1 - 0{,}01x$ geeft $t'(x) = \frac{1}{80} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x - 0{,}01 = \dfrac{x}{80\sqrt{x^2+4}} - 0{,}01$

$t'(x) = 0$ geeft $\dfrac{x}{80\sqrt{x^2+4}} - 0{,}01 = 0$

$\dfrac{x}{80\sqrt{x^2+4}} = 0{,}01$

kwadrateren geeft

$\dfrac{x^2}{6400(x^2+4)} = 0{,}0001$

$x^2 = 0{,}64(x^2+4)$

$x^2 = 0{,}64x^2 + 2{,}56$

$0{,}36x^2 = 2{,}56$

$x^2 = \frac{64}{9}$

$x = 2\frac{2}{3}$

$t\left(2\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{80}\sqrt{\left(2\frac{2}{3}\right)^2+4} + 0{,}1 - 0{,}01 \cdot 2\frac{2}{3} = 0{,}115$ uur $= 414$ seconden

De snelste route is $450 - 414 = 36$ seconden sneller dan via C naar B.

Bladzijde 79

52 $f(x) = (ax-2)^4 + \frac{1}{2}ax$ geeft $f'(x) = 4(ax-2)^3 \cdot a + \frac{1}{2}a = 4a(ax-2)^3 + \frac{1}{2}a$

$f'(3) = 0$ geeft $4a(a \cdot 3 - 2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$

$4a(3a-2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$

$a\left(4(3a-2)^3 + \frac{1}{2}\right) = 0$

$a = 0 \vee 4(3a-2)^3 + \frac{1}{2} = 0$

$a = 0 \vee 4(3a-2)^3 = -\frac{1}{2}$

$a = 0 \vee (3a-2)^3 = -\frac{1}{8}$

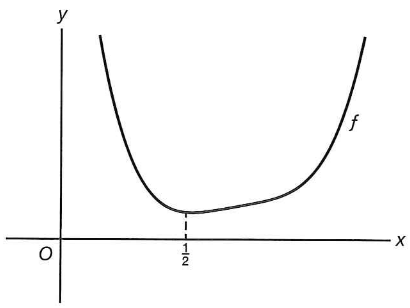
$a = 0 \vee 3a - 2 = -\frac{1}{2}$

$a = 0 \vee 3a = 1\frac{1}{2}$

$a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$

$a = 0$ geeft $f(x) = (-2)^4 + 0 = 16$ en deze functie heeft geen extreme waarde voor $x = 3$.

$a = \frac{1}{2}$ geeft $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^4 + \frac{1}{4}x$



f heeft een extreme waarde voor $a = \frac{1}{2}$.

53 $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ is het product van de factoren x en $\sqrt{2x+1}$.
Dus volgens de productregel is $f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]'$.
De afgeleide van $\sqrt{2x+1}$ bereken je met de kettingregel.

54 **a** $f(x) = x\sqrt{3x+1}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{3x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \sqrt{3x+1} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{2(3x+1)}{2\sqrt{3x+1}} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+1}}$$

$$= \frac{6x+2+3x}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{9x+2}{2\sqrt{3x+1}}$$

b $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ geeft

$$g'(x) = \frac{(2x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x - \sqrt{x^2+1} \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1) \cdot x - (x^2+1) \cdot 2}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2 + x - 2x^2 - 2}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x-2}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $h(x) = x(3x+1)^3$ geeft $h'(x) = 1 \cdot (3x+1)^3 + x \cdot 3(3x+1)^2 \cdot 3 = (3x+1)^3 + 9x(3x+1)^2$

d $k(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{4x+1}}$ geeft

$$k'(x) = \frac{\sqrt{4x+1} \cdot 2x - (x^2-1) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4}{4x+1} = \frac{(4x+1) \cdot 2x - (x^2-1) \cdot 2}{(4x+1)\sqrt{4x+1}} = \frac{8x^2+2x-2x^2+2}{(4x+1)\sqrt{4x+1}}$$
$$= \frac{6x^2+2x+2}{(4x+1)\sqrt{4x+1}}$$

Bladzijde 80

55 $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{3x+1}$ geeft

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3x+1} + \tfrac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3x+1} + \frac{3x}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{2(3x+1)}{4\sqrt{3x+1}} + \frac{3x}{4\sqrt{3x+1}}$$
$$= \frac{6x+2+3x}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{9x+2}{4\sqrt{3x+1}}$$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(8) = \dfrac{9 \cdot 8 + 2}{4\sqrt{3 \cdot 8 + 1}} = 3\frac{7}{10}$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3\frac{7}{10}x + b \\ f(8) = 20, \text{ dus } A(8, 20) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3\frac{7}{10} \cdot 8 + b = 20 \\ 29\frac{3}{5} + b = 20 \\ b = -9\frac{3}{5} \end{array}$$

Dus k: $y = 3\frac{7}{10}x - 9\frac{3}{5}$.

56 **a** $8 - 2x \geq 0$
$-2x \geq -8$
$x \leq 4$
Dus $D_f = \langle \leftarrow, 4]$.

b $f(x) = x\sqrt{8-2x}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{8-2x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-2x}} \cdot -2 = \sqrt{8-2x} + \frac{-x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-2x}{\sqrt{8-2x}} + \frac{-x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}$$

c $f'(x) = 0$ geeft $8 - 3x = 0$
$3x = 8$
$x = \frac{8}{3}$

$$f(\tfrac{8}{3}) = \tfrac{8}{3}\sqrt{\tfrac{8}{3}} = \tfrac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \tfrac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \tfrac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{8 \cdot 2\sqrt{6}}{9} = \tfrac{16}{9}\sqrt{6} = 1\tfrac{7}{9}\sqrt{6}$$

Dus de top is $(\frac{8}{9}, 1\frac{7}{9}\sqrt{6})$ en $B_f = \langle \leftarrow, 1\frac{7}{9}\sqrt{6}]$.

d $f'(x) = 1$ geeft $\dfrac{8-3x}{\sqrt{8-2x}} = 1$
$8 - 3x = \sqrt{8-2x}$
kwadrateren geeft
$(8-3x)^2 = 8 - 2x$
$64 - 48x + 9x^2 = 8 - 2x$
$9x^2 - 46x + 56 = 0$
$D = (-46)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 56 = 100$
$x = \dfrac{46-10}{18} = 2 \vee x = \dfrac{46+10}{18} = 3\frac{1}{9}$
voldoet voldoet niet

$f(2) = 4$, dus $A(2, 4)$.

57 **a** $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot 1 - (x+1) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x}{x^2+4} = \frac{x^2+4-(x+1) \cdot x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4-x^2-x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{4-x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

$f'(x) = 0$ geeft $4 - x = 0$

$x = 4$

$$f(4) = \frac{4+1}{\sqrt{4^2+4}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

De coördinaten van de top zijn $\left(4, \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)$.

b $f(0) = \dfrac{0+1}{\sqrt{0^2+4}} = \tfrac{1}{2}$, dus $A\left(0, \tfrac{1}{2}\right)$.

Stel k: $y = ax + b$.

$$a = f'(0) = \frac{4-0}{(0^2+4)\sqrt{0^2+4}} = \tfrac{1}{2}$$

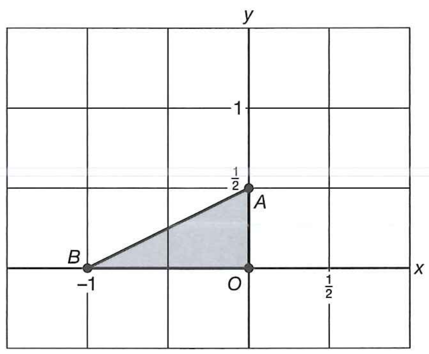
$$\left.\begin{array}{l} y = \tfrac{1}{2}x + b \\ \text{door } A\left(0, \tfrac{1}{2}\right) \end{array}\right\} b = \tfrac{1}{2}$$

Dus k: $y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}$.

k snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} = 0$

$\tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}$

$x = -1$, dus $B(-1, 0)$



$O(\triangle OAB) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$

58 **a** $f(x) = 2x\sqrt{9-2x} - 3$ geeft

$$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{9-2x} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-2x}} \cdot -2 = 2\sqrt{9-2x} + \frac{-2x}{\sqrt{9-2x}} = \frac{2(9-2x)}{\sqrt{9-2x}} + \frac{-2x}{\sqrt{9-2x}}$$

$$= \frac{18-4x-2x}{\sqrt{9-2x}} = \frac{18-6x}{\sqrt{9-2x}}$$

Stel k: $y = ax + b$.

$$a = f'(0) = \frac{18 - 6 \cdot 0}{\sqrt{9 - 2 \cdot 0}} = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x + b \\ f(0) = -3, \text{ dus } A(0, -3) \end{array}\right\} b = -3$$

Dus k: $y = 6x - 3$.

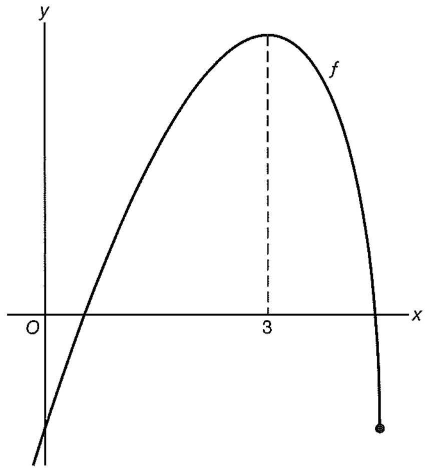
© Noordhoff Uitgevers bv

b $f'(x) = 0$ geeft $18 - 6x = 0$

$-6x = -18$

$x = 3$

voldoet



max. is $f(3) = 6\sqrt{3} - 3$.

c $9 - 2x \geq 0$

$-2x \geq -9$

$x \leq 4\frac{1}{2}$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 4\frac{1}{2}]$.

$B_f = \langle \leftarrow, 6\sqrt{3} - 3]$

d Raaklijn evenwijdig met $y = 1\frac{1}{2}x$ dus $f'(x) = 1\frac{1}{2}$.

$f'(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\dfrac{18 - 6x}{\sqrt{9 - 2x}} = \dfrac{3}{2}$

$36 - 12x = 3\sqrt{9 - 2x}$

$12 - 4x = \sqrt{9 - 2x}$

kwadrateren geeft

$(12 - 4x)^2 = 9 - 2x$

$144 - 96x + 16x^2 = 9 - 2x$

$16x^2 - 94x + 135 = 0$

$D = (-94)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 135 = 196$

$x = \dfrac{94 - 14}{32} = 2\frac{1}{2} \vee x = \dfrac{94 + 14}{32} = 3\frac{3}{8}$

voldoet voldoet niet

$f\left(2\frac{1}{2}\right) = 7$ dus $B\left(2\frac{1}{2}, 7\right)$.

59 **a** $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^3}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - x^{-1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{2\frac{1}{2}x\sqrt{x} \cdot x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{2\frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$ geeft $2\frac{1}{2}x^3 - 1 = 0$

$2\frac{1}{2}x^3 = 1$

$x^3 = \frac{2}{5}$

$x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right) = \dfrac{\frac{2}{5} + 2}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}} = \dfrac{2\frac{2}{5}}{\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2\frac{2}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{2\frac{2}{5}}{\sqrt[6]{\frac{2}{5}}}$

Dus $a = 2\frac{2}{5}$, $b = 6$ en $c = \frac{2}{5}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f'(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\dfrac{2\frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}$

$5x^3 - 2 = 3x\sqrt{x}$
$5x^3 - 3x\sqrt{x} - 2 = 0$
Stel $x\sqrt{x} = u$.
$5u^2 - 3u - 2 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -2 = 49$
$u = \dfrac{3-7}{10} \vee u = \dfrac{3+7}{10}$
$u = -0{,}4 \vee u = 1$
$x\sqrt{x} = -0{,}4 \vee x\sqrt{x} = 1$
vold. niet $\quad x = 1$
vold.

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 1\frac{1}{2}x + b \\ f(1) = 3, \text{ dus door } (1, 3) \end{array}\right\} \; 1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 3$
$1\frac{1}{2} + b = 3$
$b = 1\frac{1}{2}$

Dus $k\colon y = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

6.4 Toppen en snijpunten

Bladzijde 82

60 De lijn $y = 10$ ligt boven de top $B\left(5, 8\frac{1}{3}\right)$, dus de lijn $y = 10$ snijdt de grafiek van f in één punt, dus de vergelijking $-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x = 10$ heeft één oplossing.
De top $A\left(1, -2\frac{1}{3}\right)$ ligt op de lijn $y = -2\frac{1}{3}$, dus de lijn $y = -2\frac{1}{3}$ heeft twee punten met de grafiek gemeen, dus de vergelijking $-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x = -2\frac{1}{3}$ heeft twee oplossingen.

61 **a** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ geeft $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
$f'(x) = 0$ geeft $6x^2 - 6x - 36 = 0$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x + 2)(x - 3) = 0$
$x = -2 \vee x = 3$
$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 36 \cdot -2 + 10 = 54$
$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 + 10 = -71$
Dus de toppen zijn $(-2, 54)$ en $(3, -71)$.
b De vergelijking $f(x) = 25$ heeft drie oplossingen.
De vergelijking $f(x) = 75$ heeft één oplossing.
c De vergelijking $f(x) = p$ heeft drie oplossingen als de lijn $y = p$ tussen de toppen ligt.
Dus voor $-71 < p < 54$.
d De vergelijking $f(x) = p$ heeft één oplossing als de lijn $y = p$ hoger ligt dan $(-2, 54)$ of lager dan $(3, -71)$ dus voor $p < -71 \vee p > 54$.
e Dat zijn $p = -71$ en $p = 54$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 83

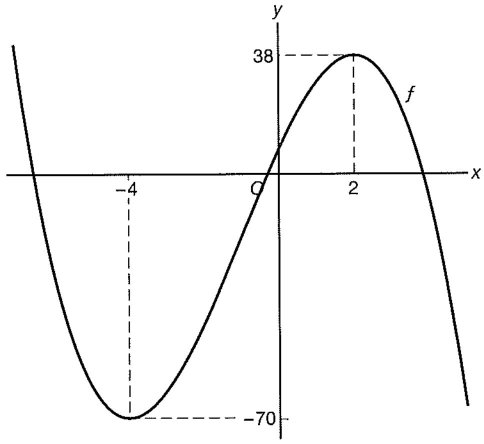
62 **a** $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x + 10$ geeft $f'(x) = -3x^2 - 6x + 24$

$f'(x) = 0$ geeft $-3x^2 - 6x + 24 = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x - 2)(x + 4) = 0$

$x = 2 \vee x = -4$



min. is $f(-4) = -70$ en max. is $f(2) = 38$.

b De vergelijking $f(x) = -50$ heeft drie oplossingen.

De vergelijking $f(x) = 50$ heeft één oplossing.

c De vergelijking $f(x) = p$ heeft drie oplossingen voor $-70 < p < 38$.

d De vergelijking $f(x) = p$ heeft één oplossing voor $p < -70 \vee p > 38$.

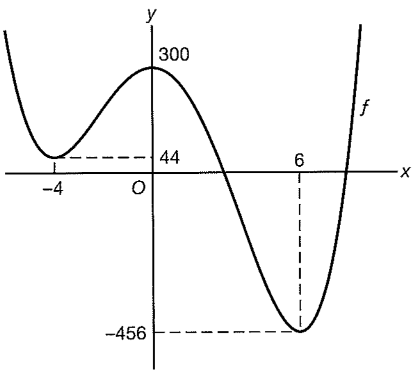
63 $f(x) = 0{,}75x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 300$ geeft $f'(x) = 3x^3 - 6x^2 - 72x$

$f'(x) = 0$ geeft $3x^3 - 6x^2 - 72x = 0$

$3x(x^2 - 2x - 24) = 0$

$3x(x + 4)(x - 6) = 0$

$x = 0 \vee x = -4 \vee x = 6$



min. is $f(-4) = 44$

max. is $f(0) = 300$

min. is $f(6) = -456$

De vergelijking $f(x) = p$ heeft

precies vier oplossingen voor $44 < p < 300$

precies drie oplossingen voor $p = 44 \vee p = 300$

precies twee oplossingen voor $-456 < p < 44 \vee p > 300$

precies één oplossing voor $p = -456$

geen oplossingen voor $p < -456$

© Noordhoff Uitgevers bv

64 **a** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x+5} - 6$ geeft

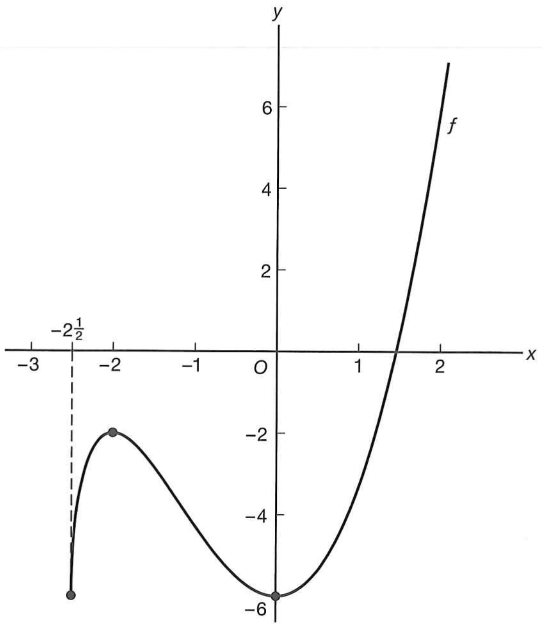
$f'(x) = 2x \cdot \sqrt{2x+5} + x^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot 2 = \dfrac{2x(2x+5)}{\sqrt{2x+5}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}} = \dfrac{4x^2+10x+x^2}{\sqrt{2x+5}} = \dfrac{5x^2+10x}{\sqrt{2x+5}}$

$f'(x) = 0$ geeft $5x^2 + 10x = 0$

$5x(x+2) = 0$

$x = 0 \vee x = -2$

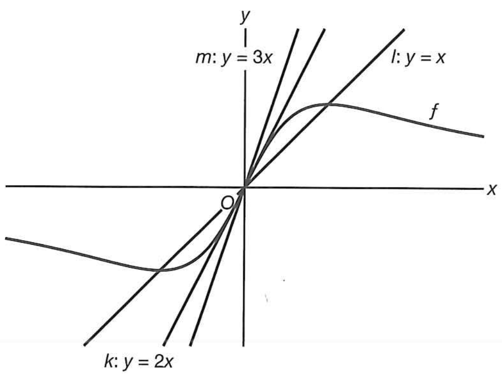
vold. vold.



$2x + 5 = 0$ geeft $x = -2\frac{1}{2}$, dus $f\left(-2\frac{1}{2}\right) = -6$, $f(-2) = -2$ en $f(0) = -6$, dus de toppen zijn $(-2, -2)$ en $(0, -6)$.

b De vergelijking $f(x) = p$ heeft
geen oplossingen voor $p < -6$
precies één oplossing voor $p > -2$
precies twee oplossingen voor $p = -6 \vee p = -2$
precies drie oplossingen voor $-6 < p < -2$.

65 **a** De lijn l: $y = x$ heeft drie snijpunten met de grafiek van f.
De lijn m: $y = 3x$ heeft één snijpunt met de grafiek van f.



b $f(x) = 0$ geeft $6x = 0$, dus $x = 0$.
Dus de grafiek snijdt de x-as alleen in $(0, 0)$.
Voor $0 < a < 2$ ligt de lijn $y = ax$ tussen de x-as en de raaklijn k: $y = 2x$.
Er zijn dus drie snijpunten met de grafiek van f voor $0 < a < 2$.
Dus de vergelijking $f(x) = ax$ heeft drie oplossingen voor $0 < a < 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

66 **a** $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+5}$ geeft

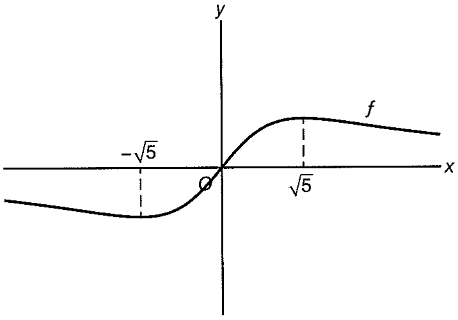
$f'(x) = \dfrac{(x^2+5)\cdot 6 - 6x \cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \dfrac{6x^2+30-12x^2}{(x^2+5)^2} = \dfrac{-6x^2+30}{(x^2+5)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $-6x^2 + 30 = 0$

$-6x^2 = -30$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

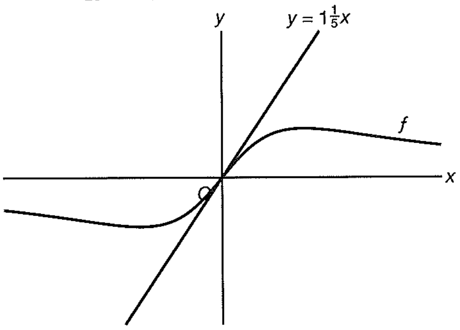


min. is $f(-\sqrt{5}) = \dfrac{6\cdot -\sqrt{5}}{(-\sqrt{5})^2+5} = \dfrac{-6\sqrt{5}}{10} = -\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

max. is $f(\sqrt{5}) = \dfrac{6\cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2+5} = \dfrac{6\sqrt{5}}{10} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$.

$B_f = [-\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{3}{5}\sqrt{5}]$

b $f'(0) = \frac{30}{25} = 1\frac{1}{5}$



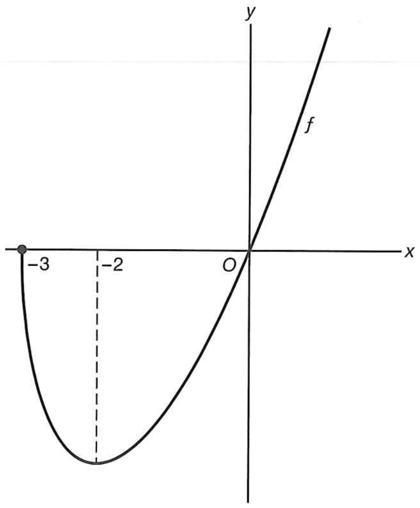
$f(x) = 0$ geeft $6x = 0$, dus $x = 0$. Dus de grafiek snijdt de x-as alleen in $(0, 0)$.
De vergelijking $f(x) = ax$ heeft precies één oplossing voor $a \leq 0 \vee a \geq 1\frac{1}{5}$.

67 **a** $f(x) = x\sqrt{2x+6}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+6} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+6}} \cdot 2 = \frac{2x+6}{\sqrt{2x+6}} + \frac{x}{\sqrt{2x+6}} = \frac{2x+6+x}{\sqrt{2x+6}} = \frac{3x+6}{\sqrt{2x+6}}$$

$f'(x) = 0$ geeft $3x + 6 = 0$

$$3x = -6$$
$$x = -2$$

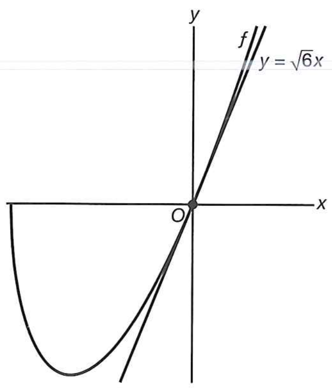


min. is $f(-2) = -2\sqrt{2}$

$2x + 6 = 0$ geeft $x = -3$, dus beginpunt is $(-3, 0)$.

De vergelijking $f(x) = p$ heeft precies twee oplossingen voor $2\sqrt{2} < p \leq 0$.

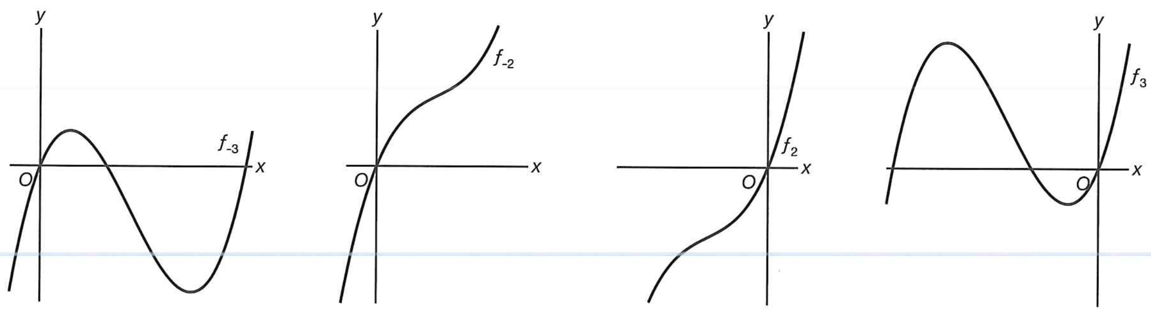
b $f'(0) = \frac{3 \cdot 0 + 6}{\sqrt{2 \cdot 0 + 6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$, dus $y = \sqrt{6}x$ is de raaklijn in $(0, 0)$.



De vergelijking $f(x) = ax$ heeft precies twee oplossingen voor $0 \leq a < \sqrt{6} \vee a > \sqrt{6}$.

Bladzijde 84

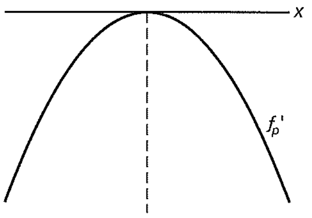
68 **a**

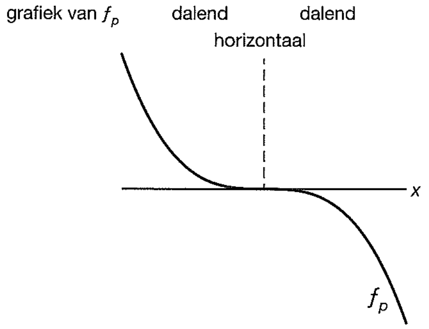


b f_{-3} heeft twee extreme waarden
f_{-2} heeft geen extreme waarden
f_2 heeft geen extreme waarden
f_3 heeft twee extreme waarden

© Noordhoff Uitgevers bv

69 Voor $p > \frac{1}{2}$ is $D < 0$ dus heeft $f_p{}'(x) = 0$ geen oplossingen.
Er zijn dus geen extremen voor $p > \frac{1}{2}$.
Voor $p = \frac{1}{2}$ is $D = 0$, dus de grafiek van $f_p{}'$ is een bergparabool die de x-as raakt.





Er zijn dus geen extremen voor $p = \frac{1}{2}$.

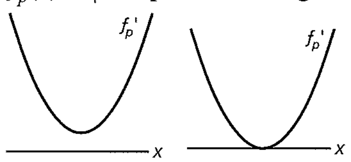
70 $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + px + 5$ geeft $f_p{}'(x) = -x^2 - 3x + p$
f_p heeft twee extreme waarden, dus $f_p{}'(x) = 0$ heeft twee oplossingen.

$$\left.\begin{array}{l} D > 0 \\ D = (-3)^2 - 4 \cdot -1 \cdot p = 9 + 4p \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 + 4p > 0 \\ 4p > -9 \\ p > -2\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus twee extreme waarden voor $p > -2\frac{1}{4}$.

Bladzijde 85

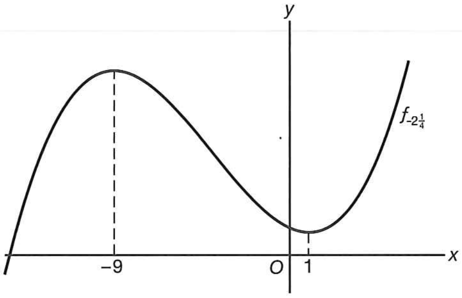
71 $f_p(x) = \frac{1}{4}x^3 + px^2 + 3x + 1$ geeft $f_p{}'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2px + 3$



f_p heeft geen extreme waarden, dus $f_p{}'(x) = 0$ heeft geen of één oplossing.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Geen of één oplossing, dus } D \leq 0 \\ D = (2p)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 = 4p^2 - 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4p^2 - 9 \leq 0 \\ 4p^2 \leq 9 \\ p^2 \leq \frac{9}{4} \\ -1\frac{1}{2} \leq p \leq 1\frac{1}{2} \end{array}$$

72 **a** $f_p(x) = \frac{1}{12}x^3 + x^2 + px + 7$ geeft $f_p{}'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + p$
$f_p{}'(1) = 0$ geeft $\frac{1}{4} + 2 + p = 0$
$p = -2\frac{1}{4}$
$f_{-2\frac{1}{4}}{}'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 2\frac{1}{4} = 0$
$x^2 + 8x - 9 = 0$
$(x-1)(x+9) = 0$
$x = 1 \vee x = -9$



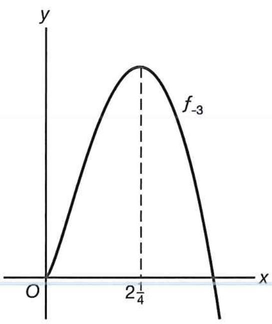
max. is $f_{-2\frac{1}{4}}(-9) = 47\frac{1}{2}$.

b $f_p{}'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + p$
$f_p{}'$ heeft twee extreme waarden, dus $f_p{}'(x) = 0$ heeft twee oplossingen.
$\left.\begin{array}{l} D > 0 \\ D = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot p = 4 - p \end{array}\right\} 4 - p > 0$
$-p > -4$
$p < 4$
Dus twee extreme waarden voor $p < 4$.

73 $\left.\begin{array}{l}\text{De lijn } k \text{ met } rc_k = 2 \text{ raakt de grafiek in } A \text{ geeft } f_p{}'(x_A) = 2 \\ x_A = 3\end{array}\right\} f_p{}'(3) = 2$
$f_P(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 5x - 3$ geeft $f_P{}'(x) = x^2 + 2px + 5$
$\left.\begin{array}{l} f_p{}'(x) = x^2 + 2px + 5 \\ f_2{}'(3) = 2 \end{array}\right\} 3^2 + 2p \cdot 3 + 5 = 2$
$9 + 6p + 5 = 2$
$6p = -12$
$p = -2$

Bladzijde 86

74 **a** $f_p(x) = 6x\sqrt{x} + px^2 = 6x^{1\frac{1}{2}} + px^2$
$\left.\begin{array}{l} f_p \text{ heeft een maximum voor } x = 2\frac{1}{4}\text{, dus } f_p{}'\left(2\frac{1}{4}\right) = 0 \\ f_p{}'(x) = 9x^{\frac{1}{2}} + 2px = 9\sqrt{x} + 2px \end{array}\right\} 9 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + 2p \cdot 2\frac{1}{4} = 0$
$9 \cdot 1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}p = 0$
$4\frac{1}{2}p = -13\frac{1}{2}$
$p = -3$



Dus f_p heeft een maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$ als $p = -3$.

b $f_p{}'(1) = rc_k$ geeft $9 \cdot \sqrt{1} + 2p \cdot 1 = 5$
$9 + 2p = 5$
$2p = -4$
$p = -2$
$f_{-2}(x) = 6x\sqrt{x} - 2x^2$
$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 5x + q \\ f_{-2}(1) = 4 \text{ dus } A(1, 4) \end{array}\right\} 5 \cdot 1 + q = 4$
$q = -1$
Dus $p = -2$ en $q = -1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

75 **a** $f_p(x) = \dfrac{4x + p}{x^2 + 1}$ geeft

$f_p{}'(x) = \dfrac{(x^2 + 1) \cdot 4 - (4x + p) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{4x^2 + 4 - 8x^2 - 2px}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-4x^2 - 2px + 4}{(x^2 + 1)^2}$

$f_p{}'(0) = \dfrac{-4 \cdot 0^2 - 2p \cdot 0 + 4}{(0^2 + 1)^2} = \dfrac{4}{1} = 4$

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = ax + 4 \text{ snijdt de } y\text{-as in } (0, 4) \\ f_p(0) = p, \text{ dus door } (0, p) \end{array}\right\} p = 4$

$a = f_4{}'(0) = 4$

Dus $a = 4$ en $p = 4$.

b $l\colon y = -x + b$ raakt de grafiek in A met $x_A = -1$, dus $f_p{}'(-1) = \text{rc}_l$.

$f_p{}'(-1) = \text{rc}_l$ geeft $\dfrac{-4 + 2p + 4}{(1 + 1)^2} = -1$

$\dfrac{2p}{4} = -1$

$2p = -4$

$p = -2$

$f_{-2}(x) = \dfrac{4x - 2}{x^2 + 1}$

$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -x + b \\ f_{-2}(-1) = \dfrac{4 \cdot -1 - 2}{(-1)^2 + 1} = -3 \text{ dus } A(-1, -3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} --1 + b = -3 \\ 1 + b = -3 \\ b = -4 \end{array}$

Dus $l\colon y = -x - 4$.

c $f_p{}'(2) = 0$ geeft $\dfrac{-4 \cdot 2^2 - 2p \cdot 2 + 4}{(2^2 + 1)^2} = 0$

$-12 - 4p = 0$

$-4p = 12$

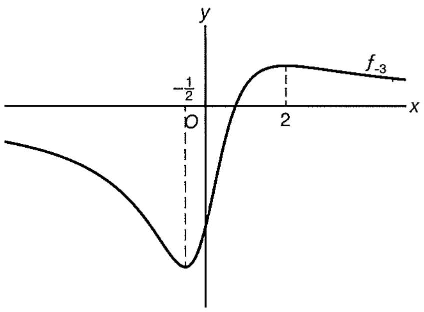
$p = -3$

$f_{-3}{}'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$

$f_{-3}{}'(x) = 0$ geeft $-4x^2 + 6x + 4 = 0$

$D = 6^2 - 4 \cdot -4 \cdot 4 = 36 + 64 = 100$

$x = \dfrac{-6 - 10}{-8} = 2 \vee x = \dfrac{-6 + 10}{-8} = -\frac{1}{2}$



min. is $f_{-3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$.

76 **a** $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 - 3x - p$ geeft $f_p'(x) = x^2 + 2px - 3$

f_p heeft twee extremen, dus $f_p'(x) = 0$ heeft twee oplossingen.

$$\left.\begin{array}{l} D > 0 \\ D = (2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot {-3} = 4p^2 + 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4p^2 + 12 > 0 \\ 4p^2 > -12 \\ p^2 > -3 \end{array}$$

Voor elke p is $p^2 > -3$, dus voor elke p heeft f_p twee extreme waarden.

b $f_p'(3) = 0$ geeft $3^2 + 2p \cdot 3 - 3 = 0$

$9 + 6p - 3 = 0$

$6p = -6$

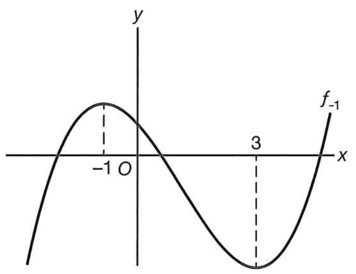
$p = -1$

$f_{-1}(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ en $f_{-1}'(x) = x^2 - 2x - 3$

$f_{-1}'(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \vee x = 3$



max. is $f_{-1}(-1) = 2\frac{2}{3}$.

c $f_p'(-2) = \text{rc}_l$ geeft $(-2)^2 + 2p \cdot -2 - 3 = -1$

$-4p = -2$

$p = \frac{1}{2}$

$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -x + q \\ f_{\frac{1}{2}}(2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 3 \cdot -2 - \frac{1}{2} = 4\frac{5}{6}, \text{ dus } B\left(-2, 4\frac{5}{6}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} --2 + q = 4\frac{5}{6} \\ q = 2\frac{5}{6} \end{array}$$

Dus $p = \frac{1}{2}$ en $q = 2\frac{5}{6}$.

77 $f_p'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + px + 3$ geeft $f_p'(x) = -\frac{1}{2}x + p$

$f_p'(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x + p = 0$

$p = \frac{1}{2}x$

Bladzijde 88

78 **a** $x = 0$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 0^3 + 0 + 3 = 3$, dus $(0, 3)$ ligt op de kromme.

$f_p'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2p \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$, dus voor elke waarde van p geldt dat $f_p'(0) \neq 0$, dus $(0, 3)$ is geen top van de grafiek van f_p.

b De formule van de kromme waarop alle toppen liggen, wil zeggen dat niet elk punt op de kromme per se een top is. Het punt $(0, 3)$ ligt dus wel op de kromme, maar hoeft dus geen top te zijn.

79 $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5$ geeft $f_p'(x) = x^2 + 2px + 3$

$f_p'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2px + 3 = 0$

$2px = -x^2 - 3$

$$\left.\begin{array}{l} \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \dfrac{-x^2 - 3}{2x} \\ y = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x^3 + \dfrac{-x^2 - 3}{2x} \cdot x^2 + 3x + 5 \\ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x + 3x + 5 \\ y = -\frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x + 5 \end{array}$$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -\frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x + 5$.

© Noordhoff Uitgevers bv

80 $f_p'(x) = \frac{px}{x^2+4}$ geeft $f_p'(x) = \frac{(x^2+4)\cdot p - px \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{px^2+4p-2px^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4p-px^2}{(x^2+4)^2}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $4p - px^2 = 0$

$p(4-x^2) = 0$

$p = 0 \vee x^2 = 4$

$p = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$

$p = 0$ voldoet niet, want de grafiek van f_0 heeft geen top.
Dus de toppen van de grafieken liggen op de lijnen $x = -2$ en $x = 2$.

81 **a** $f_p(x) = \frac{x+p}{x^2+4}$ geeft $f_p'(x) = \frac{(x^2+4)\cdot 1 - (x+p)\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2-2px}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2-2px+4}{(x^2+4)^2}$

$f_p'(1) = 0$ geeft $\frac{-1^2-2p\cdot 1+4}{(1^2+4)^2} = 0$

$-1-2p+4 = 0$

$-2p = -3$

$p = 1\frac{1}{2}$

$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = \frac{-x^2-3x+4}{(x^2+4)^2}$

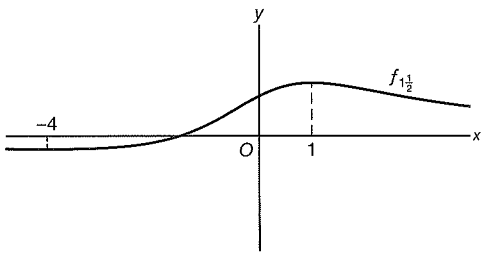
$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = 0$ geeft $-x^2-3x+4 = 0$

$x^2+3x-4 = 0$

$(x-1)(x+4) = 0$

$x = 1 \vee x = -4$

$f_{1\frac{1}{2}}(-4) = \frac{-4+1\frac{1}{2}}{(-4)^2+4} = \frac{-2\frac{1}{2}}{20} = -\frac{1}{8}$



Dus $p = 1\frac{1}{2}$ en min. is $f_{1\frac{1}{2}}(-4) = -\frac{1}{8}$.

b $f_p'(x) = 0$ geeft $\frac{-x^2-2px+4}{(x^2+4)^2} = 0$

$-x^2-2px+4 = 0$

$-2px = x^2-4$

$$\left.\begin{array}{l} \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \frac{-x^2+4}{2x} \\ y = \frac{x+p}{x^2+4} \end{array}\right\} \quad y = \frac{x + \frac{-x^2+4}{2x}}{x^2+4}$$

$y = \frac{2x^2-x^2+4}{2x(x^2+4)}$

$y = \frac{x^2+4}{2x(x^2+4)}$

$y = \frac{1}{2x}$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = \frac{1}{2x}$.

Diagnostische toets

Bladzijde 90

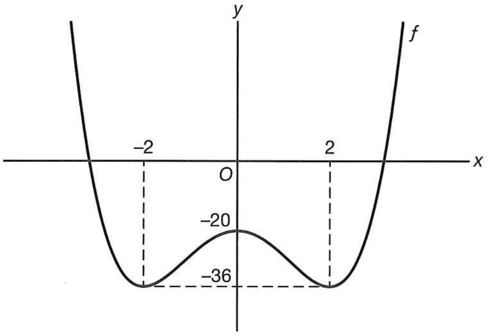
1 **a** $f(x) = (2x^2 + 4)\left(\frac{1}{2}x^2 - 5\right) = x^4 - 10x^2 + 2x^2 - 20 = x^4 - 8x^2 - 20$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 16x = 0$

$4x(x^2 - 4) = 0$

$x = 0 \vee x^2 = 4$

$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$



min. is $f(-2) = -36$, max. is $f(0) = -20$ en min. is $f(2) = -36$.

b $B_f = [-36, \rightarrow\rangle$

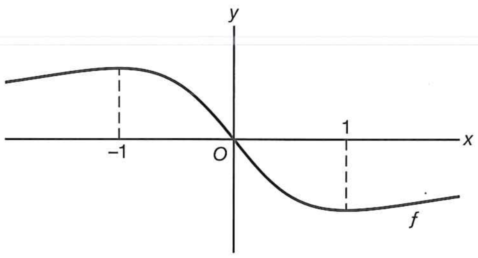
2 $f(x) = \dfrac{-x}{x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 1) \cdot -1 - -x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-x^2 - 1 + 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = -1 \vee x = 1$

vold. vold.



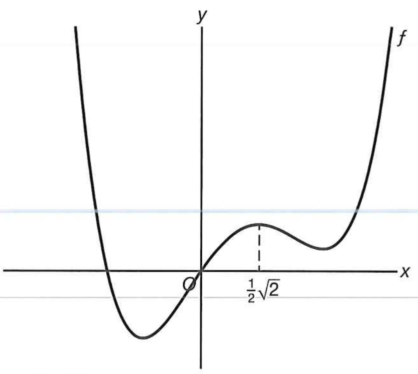
max. is $f(-1) = \frac{1}{2}$ en min. is $f(1) = -\frac{1}{2}$.

$B_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

3 $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x$ geeft $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1\frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1\frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{2} - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1\frac{1}{2} = 0$



$f'(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 5x$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 18x - 5$

$f''(x) = 12x^2 - 6x - 18$

$f''(x) = 0$ geeft $12x^2 - 6x - 18 = 0$

$$x^2 - \tfrac{1}{2}x - 1\tfrac{1}{2} = 0$$
$$(x + 1)(x - 1\tfrac{1}{2}) = 0$$
$$x = -1 \vee x = 1\tfrac{1}{2}$$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 18 \cdot -1 - 5 = 6$

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x + b \\ f(-1) = -2, \text{ dus buigpunt } (-1, -2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6 \cdot -1 + b = -2 \\ -6 + b = -2 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus k: $y = 6x + 4$.

Stel l: $y = ax + b$.

$a = f'(1\tfrac{1}{2}) = 4 \cdot (1\tfrac{1}{2})^3 - 3 \cdot (1\tfrac{1}{2})^2 - 18 \cdot 1\tfrac{1}{2} - 5 = -25\tfrac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} y = -25\tfrac{1}{4}x + b \\ f(1\tfrac{1}{2}) = -26\tfrac{1}{16}, \text{ dus buigpunt } (1\tfrac{1}{2}, -26\tfrac{1}{16}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -25\tfrac{1}{4} \cdot 1\tfrac{1}{2} + b = -26\tfrac{1}{16} \\ -37\tfrac{7}{8} + b = -26\tfrac{1}{16} \\ b = 11\tfrac{13}{16} \end{array}$$

Dus l: $y = -25\tfrac{1}{4}x + 11\tfrac{13}{16}$.

De buigraaklijnen zijn k: $y = 6x + 4$ en l: $y = -25\tfrac{1}{4}x + 11\tfrac{13}{16}$.

5 $f_p(x) = \tfrac{1}{2}x^4 + x^3 + px^2 + 2x - 3$

$f_p'(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2px + 2$

$f_p''(x) = 6x^2 + 6x + 2p$

$f_p''(x) = 0$ geeft $6x^2 + 6x + 2p = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{twee oplossingen als } D > 0 \\ D = 6^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2p = 36 - 48p \end{array}\right\} \begin{array}{l} 36 - 48p > 0 \\ -48p > -36 \\ p < \tfrac{3}{4} \end{array}$$

6 **a** $f(x) = \dfrac{2}{x^5} = 2x^{-5}$ geeft $f'(x) = -10x^{-6} = \dfrac{-10}{x^6}$

b $f(x) = \dfrac{x^5 + 2}{x^3} = \dfrac{x^5}{x^3} + \dfrac{2}{x^3} = x^2 + 2x^{-3}$ geeft $f'(x) = 2x - 6x^{-4} = \dfrac{2x^5}{x^4} - \dfrac{6}{x^4} = \dfrac{2x^5 - 6}{x^4}$

c $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3} = 3x^{-1} - \tfrac{1}{3}x$ geeft $f'(x) = -3x^{-2} - \tfrac{1}{3} = \dfrac{-3}{x^2} - \tfrac{1}{3}$

d $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x^2} = x^3 + x^{\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x) = 3x^2 + \tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

e $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{3\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x) = 3\tfrac{2}{3}x^{2\frac{2}{3}} = 3\tfrac{2}{3}x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

f $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^3 + 1} = \dfrac{x^{1\frac{1}{2}}}{x^3 + 1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x^3 + 1) \cdot 1\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{1\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{1\tfrac{1}{2}x^{3\frac{1}{2}} + 1\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3x^{3\frac{1}{2}}}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-1\tfrac{1}{2}x^{3\frac{1}{2}} + 1\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-3x^3 \cdot \sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{2(x^3 + 1)^2}$$

6

7 $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \dfrac{x^2-3}{x^{2\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^2}{x^{2\frac{1}{2}}} - \dfrac{3}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-2\frac{1}{2}}$ geeft

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} + 7\frac{1}{2}x^{-3\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}} + \dfrac{15}{2x^{3\frac{1}{2}}} = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}} + \dfrac{15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}} = \dfrac{-x^2}{2x^3 \cdot \sqrt{x}} + \dfrac{15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}} = \dfrac{15-x^2}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(1) = \dfrac{15-1}{2} = 7$

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 7x + b \\ f(1) = \dfrac{1-3}{1} = -2 \text{ dus } A(1, -2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 1 + b = -2 \\ b = -9 \end{array}$$

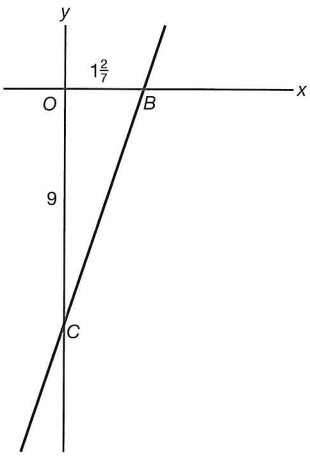
Dus k: $y = 7x - 9$.

$y = 0$ geeft $7x - 9 = 0$

$7x = 9$

$x = 1\frac{2}{7}$, dus $B\left(1\frac{2}{7}, 0\right)$

$x = 0$ geeft $y = -9$, dus $C(0, -9)$.



$O(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{7} \cdot 9 = \frac{81}{14} = 5\frac{11}{14}$

8 **a** $f(x) = 3(x^2+4x)^4$ geeft $f'(x) = 4 \cdot 3(x^2+4x)^3 \cdot (2x+4) = 12(2x+4)(x^2+4x)^3$

b $g(x) = (x^2+2)\sqrt{x^2+2} = (x^2+2)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = 1\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+2}$

c $h(x) = \dfrac{3}{(2x^3+2)^5} = 3(2x^3+2)^{-5}$ geeft $h'(x) = -5 \cdot 3(2x^3+2)^{-6} \cdot 6x^2 = -90x^2(2x^3+2)^{-6} = \dfrac{-90x^2}{(2x^3+2)^6}$

Bladzijde 91

9 **a** $f(x) = 2x^2(x^2-4x)^5$ geeft

$f'(x) = 4x \cdot (x^2-4x)^5 + 2x^2 \cdot 5 \cdot (x^2-4x)^4 \cdot (2x-4) = 4x(x^2-4x)^5 + 10x^2(2x-4)(x^2-4x)^4$

b $g(x) = (x^3+x) \cdot \sqrt{x^3+2}$ geeft

$g'(x) = (3x^2+1) \cdot \sqrt{x^3+2} + (x^3+x) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^3+2}} \cdot 3x^2 = (3x^2+1)\sqrt{x^3+2} + \dfrac{3x^2(x^3+x)}{2\sqrt{x^3+2}}$

$= \dfrac{2(3x^2+1)(x^3+2)}{2\sqrt{x^3+2}} + \dfrac{3x^2(x^3+x)}{2\sqrt{x^3+2}} = \dfrac{2(3x^5+6x^2+x^3+2)+3x^5+3x^3}{2\sqrt{x^3+2}}$

$= \dfrac{6x^5+12x^2+2x^3+4+3x^5+3x^3}{2\sqrt{x^3+2}} = \dfrac{9x^5+5x^3+12x^2+4}{2\sqrt{x^3+2}}$

c $h(x) = \dfrac{6x}{(2x^3+2)^5}$ geeft

$h'(x) = \dfrac{(2x^3+2)^5 \cdot 6 - 6x \cdot 5(2x^3+2)^4 \cdot 6x^2}{(2x^3+2)^{10}} = \dfrac{(2x^3+2)^5 \cdot 6 - 180x^3(2x^3+2)^4}{(2x^3+2)^{10}}$

$= \dfrac{(2x^3+2) \cdot 6 - 180x^3}{(2x^3+2)^6} = \dfrac{12x^3+12-180x^3}{(2x^3+2)^6} = \dfrac{-168x^3+12}{(2x^3+2)^6}$

© Noordhoff Uitgevers bv

10 **a** $f(x) = x\sqrt{50 - x^2}$ geeft

$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{50 - x^2} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{50 - x^2}} \cdot {-2x} = \dfrac{50 - x^2}{\sqrt{50 - x^2}} + \dfrac{-x^2}{\sqrt{50 - x^2}} = \dfrac{50 - 2x^2}{\sqrt{50 - x^2}}$

$f'(x) = 0$ geeft $50 - 2x^2 = 0$

$-2x^2 = -50$

$2x^2 = 50$

$x^2 = 25$

$x = 5 \vee x = -5$

vold. vold.

$f(5) = 25$ en $f(-5) = -25$

De punten met horizontale raaklijn zijn $(5, 25)$ en $(-5, -25)$.

b Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(1) = 6\frac{6}{7}$

$\left.\begin{array}{l} y = 6\frac{6}{7}x + b \\ f(1) = \sqrt{49} = 7 \text{ dus } A(1, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6\frac{6}{7} + b = 7 \\ b = \frac{1}{7} \end{array}$

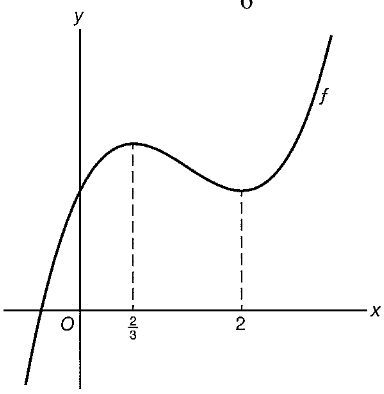
Dus k: $y = 6\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}$.

11 **a** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$f'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 8x + 4 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16$

$x = \dfrac{8 - 4}{6} = \frac{2}{3} \vee x = \dfrac{8 + 4}{6} = 2$



max. is $f\left(\frac{2}{3}\right) = 4\frac{5}{27}$ en min. is $f(2) = 3$.

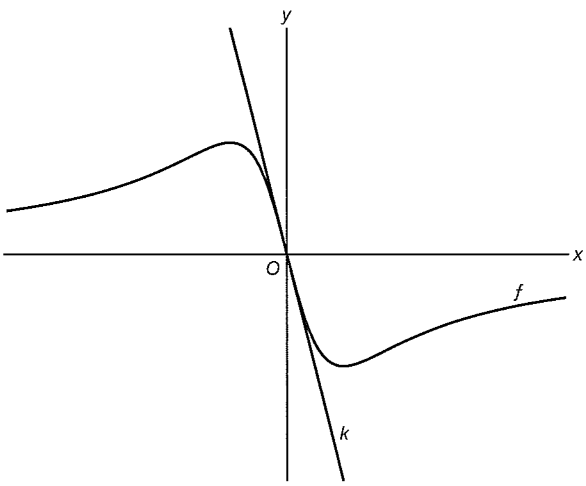
b De vergelijking $f(x) = p$ heeft precies één oplossing voor $p < 3 \vee p > 4\frac{5}{27}$.

c De vergelijking $f(x) = p$ heeft precies twee oplossingen voor $p = 3 \vee p = 4\frac{5}{27}$.

d De vergelijking $f(x) = p$ heeft precies drie oplossingen voor $3 < p < 4\frac{5}{27}$.

12 $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 1) \cdot -4 - -4x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-4x^2 - 4 + 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{4x^2 - 4}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(0) = -4$ dus k: $y = -4x$ is de raaklijn in $(0, 0)$.



$f(x) = 0$ geeft $-4x = 0$, dus $x = 0$. Dus de grafiek snijdt de x-as alleen in $(0, 0)$.

De vergelijking $f(x) = ax$ heeft drie oplossingen voor $-4 < a < 0$.

6

13 **a** $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + px + 5$ geeft $f_p'(x) = -x^2 + 4x + p$

$f_p'(1) = 0$ geeft $-1 + 4 + p = 0$

$p = -3$

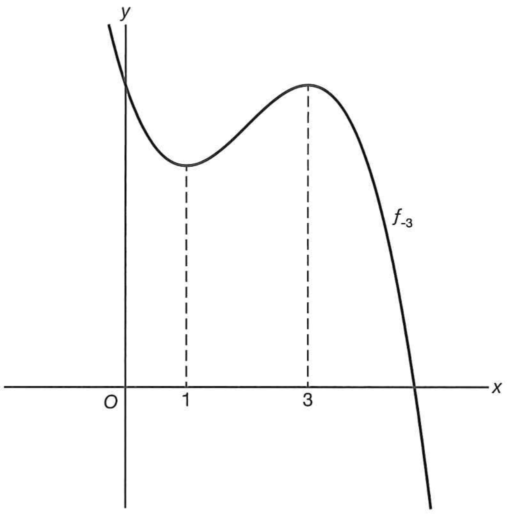
$f_{-3}'(x) = -x^2 + 4x - 3$

$f_{-3}'(x) = 0$ geeft $-x^2 + 4x - 3 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

$x = 1 \vee x = 3$



max is $f_{-3}(3) = 5$.

b f_p heeft twee extremen dus $f_p'(x) = 0$ heeft twee oplossingen.

$$\left.\begin{array}{l} D > 0 \\ D = 4^2 - 4 \cdot -1 \cdot p = 16 + 4p \end{array}\right\} \begin{array}{l} 16 + 4p > 0 \\ 4p > -16 \\ p > -4 \end{array}$$

Dus twee extreme waarden voor $p > -4$.

14 $f_p(x) = \dfrac{2\sqrt{x} + p}{x + 1}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (2\sqrt{x} + p) \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x + 1 - 2x - p\sqrt{x}}{(x+1)^2 \cdot \sqrt{x}} = \dfrac{-x - p\sqrt{x} + 1}{(x+1)^2 \cdot \sqrt{x}}$

$f_p'(4) = \text{rc}_k$ geeft $\dfrac{-4 - p \cdot \sqrt{4} + 1}{(4+1)^2 \cdot \sqrt{4}} = -0{,}1$

$\dfrac{-3 - 2p}{50} = -0{,}1$

$-3 - 2p = -5$

$-2p = -2$

$p = 1$

$f_1(x) = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{x + 1}$

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = -0{,}1x + q \\ f_1(4) = \dfrac{2\sqrt{4} + 1}{4 + 1} = 1 \text{ dus } A(4, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}1 \cdot 4 + q = 1 \\ q = 1{,}4 \end{array}$$

Dus $p = 1$ en $q = 1{,}4$.

6

© Noordhoff Uitgevers bv

15 $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x - 4$ geeft $f_p'(x) = -x^2 + 2px + 3$

$f_p'(x) = 0$ geeft $-x^2 + 2px + 3 = 0$

$$2px = x^2 - 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \dfrac{x^2 - 3}{2x} \\ y = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x - 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x^3 + \dfrac{x^2 - 3}{2x} \cdot x^2 + 3x - 4 \\ y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x + 3x - 4 \\ y = \frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 4 \end{array}$$

De formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = \frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 4$.

7 Goniometrische functies

Voorkennis Exacte waarden van goniometrische verhoudingen

Bladzijde 95

1 **a** $4\cos(30°) + 9\tan(30°) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 9 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b $3\sin(30°) - \sqrt{2} \cdot \sin(45°) = 3 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

c $6\tan(30°) - 3\tan(60°) = 6 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

d $\sqrt{2} \cdot \sin(60°) + 3\sqrt{3} \cdot \sin(45°) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6} + 1\frac{1}{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

2 **a** $2\sin(45°)\cos(45°) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1$

b $2\sqrt{3} \cdot \sin(60°)\cos(30°) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\sqrt{2} \cdot \sin(45°)\sin(60°) - 2\tan(60°) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $4\sin(30°)\tan(30°) + 2\cos(30°)\cos(60°) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{6}\sqrt{3}$

3 **a** $\dfrac{\cos(30°)}{1 + \sin(60°)} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

b $\dfrac{\sin(30°) + \sin(60°)}{\sin(30°) - \sin(60°)} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

4 **a** $\sin(15°) = \sin(60° - 45°)$
$= \sin(60°)\cos(45°) - \cos(60°)\sin(45°)$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

b $\sin(75°) = \sin(45° + 30°)$
$= \sin(45°)\cos(30°) + \cos(45°)\sin(30°)$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

7.1 Eenheidscirkel en radiaal

Bladzijde 96

1 **a** $\sin(\alpha) = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{PQ}{1} = PQ$, dus $PQ = \sin(65°) \approx 0{,}91$.
$\cos(\alpha) = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{OQ}{1} = OQ$, dus $OQ = \cos(65°) \approx 0{,}42$.

b $P(0{,}42;\ 0{,}91)$

c $\angle POQ = 180° - 115° = 65°$
$PQ \approx 0{,}91$, $OQ \approx 0{,}42$ en $P(-0{,}42;\ 0{,}91)$

d $\cos(115°) \approx -0{,}42$ en $\sin(115°) \approx 0{,}91$
Dus $x_P = \cos(115°)$ en $y_P = \sin(115°)$.

Bladzijde 97

2 **a** $\sin(0°) = 0$
b $\cos(0°) = 1$
c $\sin(90°) = 1$
d $\cos(90°) = 0$
e $\sin(270°) = -1$
f $\cos(270°) = 0$
g $\sin(360°) = 0$
h $\tan(360°) = \dfrac{0}{1} = 0$
i $\sin(450°) = 1$
j $\cos(-90°) = 0$
k $\tan(-540°) = \dfrac{0}{-1} = 0$
l $\cos(-180°) = -1$

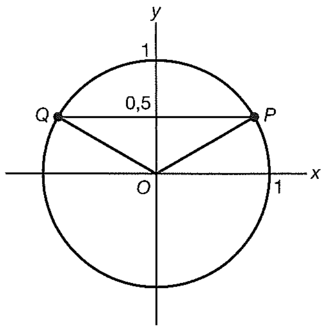
3 **a** *
b $P(\cos(110°), \sin(110°)) \approx P(-0{,}34;\ 0{,}94)$
$Q(\cos(200°), \sin(200°)) \approx Q(-0{,}94;\ -0{,}34)$
$R(\cos(-102°), \sin(-102°)) \approx R(-0{,}21;\ -0{,}98)$
$S(\cos(-50°), \sin(-50°)) \approx S(0{,}64;\ -0{,}77)$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 98

4 a $\frac{360°}{5} = 72°$, dus $B(2\cos(72°), 2\sin(72°)) \approx B(0{,}62; 1{,}90)$
$2 \cdot 72° = 144°$, $C(2\cos(144°), 2\sin(144°)) \approx C(-1{,}62; 1{,}18)$
$3 \cdot 72° = 216°$, dus $D(2\cos(216°), 2\sin(216°)) \approx D(-1{,}62; -1{,}18)$
$4 \cdot 72° = 288°$, dus $E(2\cos(288°), 2\sin(288°)) \approx E(0{,}62; -1{,}90)$

5 a



b $\beta = 180° - 30° = 150°$

Bladzijde 99

6 a $x_P = 0{,}81$, dus $\cos(\alpha) = 0{,}81$.
De GR geeft $\cos^{-1}(0{,}81) \approx 35{,}9°$. Dus $\alpha \approx 35{,}9°$.
b $y_P = 0{,}94$, dus $\sin(\alpha) = 0{,}94$.
De GR geeft $\sin^{-1}(0{,}94) \approx 70{,}1°$. Dus $\alpha \approx 180° - 70{,}1° = 109{,}9°$.
c $x_P = 0{,}26$, dus $\cos(\alpha) = 0{,}26$.
De GR geeft $\cos^{-1}(0{,}26) \approx 74{,}9°$. Dus $\alpha \approx -74{,}9°$.
d $y_P = -0{,}22$, dus $\sin(\alpha) = -0{,}22$.
De GR geeft $\sin^{-1}(-0{,}22) \approx -12{,}7°$. Dus $\alpha \approx 180° + 12{,}7° = 192{,}7°$.

Bladzijde 100

7 $y_P = 0{,}92$, dus $\sin(\alpha_P) = 0{,}92$.
De GR geeft $\sin^{-1}(0{,}92) = 66{,}926...°$, dus $\alpha_P = 66{,}926...°$.
$x_Q = -0{,}87$, dus $\cos(\alpha_Q) = -0{,}87$.
De GR geeft $\cos^{-1}(-0{,}87) = 150{,}458...°$, dus $\alpha_Q = 360° - 150{,}458...° = 209{,}541...°$.
$\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P = 209{,}541...° - 66{,}926...° \approx 142{,}6°$

8 a omtrek cirkel = $2\pi r$
In de eenheidscirkel is $r = 1$, dus omtrek = $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
b Bij $\alpha = 90°$ hoort een kwart cirkelboog, dus lengte cirkelboog = $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi$.
c Bij $\alpha = 180°$ is de halve eenheidscirkel doorlopen, dus lengte boog = $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$.
d $1\frac{1}{2}\pi$ is driekwart van 2π, dus $\alpha = \frac{3}{4} \cdot 360° = 270°$.

Bladzijde 102

9 a $\frac{1}{6}\pi$ rad $= \frac{1}{6} \cdot 180° = 30°$
b $\frac{1}{4}\pi$ rad $= \frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$
c 2π rad $= 2 \cdot 180° = 360°$
d 2 rad $= 2 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 114{,}6°$
e $1\frac{1}{4}\pi$ rad $= 1\frac{1}{4} \cdot 180° = 225°$
f $1\frac{1}{4}$ rad $= 1\frac{1}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 71{,}6°$
g $-2\frac{1}{3}\pi$ rad $= -2\frac{1}{3} \cdot 180° = -420°$
h $-2\frac{1}{3}$ rad $= -2\frac{1}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx -133{,}7°$

10 a $360° = \frac{360}{180}\pi$ rad $= 2\pi$ rad
b $30° = \frac{30}{180}\pi$ rad $= \frac{1}{6}\pi$ rad
c $45° = \frac{45}{180}\pi$ rad $= \frac{1}{4}\pi$ rad
d $60° = \frac{60}{180}\pi$ rad $= \frac{1}{3}\pi$ rad
e $90° = \frac{90}{180}\pi$ rad $= \frac{1}{2}\pi$ rad
f $135° = \frac{135}{180}\pi$ rad $= \frac{3}{4}\pi$ rad
g $300° = \frac{300}{180}\pi$ rad $= 1\frac{2}{3}\pi$ rad
h $210° = \frac{210}{180}\pi$ rad $= 1\frac{1}{6}\pi$ rad

11 a $10° = \frac{10}{180}\pi \text{ rad} \approx 0{,}17 \text{ rad}$

b $57{,}3° = \frac{57{,}3}{180}\pi \text{ rad} \approx 1{,}00 \text{ rad}$

c $1030° = \frac{1030}{180}\pi \text{ rad} \approx 17{,}98 \text{ rad}$

d $90° = \frac{90}{180}\pi \text{ rad} \approx 1{,}57 \text{ rad}$

12 a $\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) \approx -0{,}38$

b $\cos\left(\frac{5}{8}\right) \approx 0{,}81$

c $\sin\left(\frac{4}{5}\pi\right) \approx 0{,}59$

d $\sin\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0{,}72$

e $\cos(7{,}6\pi) \approx 0{,}31$

f $\cos(7{,}6) \approx 0{,}25$

13 a $\alpha = \sin^{-1}(0{,}92) \approx 1{,}17$

b $\alpha = \cos^{-1}(0{,}85) \approx 0{,}55$

c $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 0{,}43$

d $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{17}\right) \approx 1{,}39$

e $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{5}\right) \approx 0{,}84$

f $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \approx 1{,}21$

14 a $y_P = 0{,}35$ geeft $\sin(\alpha) = 0{,}35$
$\sin^{-1}(0{,}35) = 0{,}357...$
Dus $\alpha = \pi - 0{,}357... \approx 2{,}78$.

b $x_P = -0{,}35$ geeft $\cos(\alpha) = -0{,}35$
$\cos^{-1}(-0{,}35) = 1{,}928...$
Dus $\alpha = 2\pi - 1{,}928... \approx 4{,}35$.

Bladzijde 103

15 $x_P = -0{,}32$ geeft $\cos(\alpha_P) = -0{,}32$
$\cos^{-1}(-0{,}32) = 1{,}896...$
Dus $\alpha_P = 1{,}896...$
$y_Q = -0{,}88$ geeft $\sin(\alpha_Q) = -0{,}88$
$\sin^{-1}(-0{,}88) = -1{,}075...$
Dus $\alpha_Q = \pi + 1{,}075... = 4{,}217...$
$\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P = 4{,}217... - 1{,}896... \approx 2{,}32$

16 a $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Bladzijde 104

17 a $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

d $\sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

e $\cos\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

f $\tan\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right)}{\cos\left(1\frac{5}{6}\pi\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

g $\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

h $\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

18 a $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = \frac{1}{3}\pi \vee \alpha = \frac{2}{3}\pi$

b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = \frac{2}{3}\pi \vee \alpha = 1\frac{1}{3}\pi$

c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\alpha = 1\frac{1}{4}\pi \vee \alpha = 1\frac{3}{4}\pi$

d $\cos(\alpha) = 0$ geeft $\alpha = \frac{1}{2}\pi \vee \alpha = 1\frac{1}{2}\pi$

e $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = \frac{1}{6}\pi \vee \alpha = 1\frac{5}{6}\pi$

f $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\alpha = \frac{1}{4}\pi \vee \alpha = 1\frac{3}{4}\pi$

19 a $x = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ met $0 \leq x \leq 1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x = 1\frac{1}{3}\pi$

c $x = \cos\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\cos(x) = \frac{1}{2}$ met $1\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ geeft $x = 1\frac{2}{3}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

7.2 Goniometrische vergelijkingen

Bladzijde 106

20 $\ldots, -3\frac{1}{2}\pi, -2\frac{1}{2}\pi, -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi, \ldots$

Bladzijde 107

21 **a** $\sin\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = 0$
$3x - \frac{1}{2}\pi = k \cdot \pi$
$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

b $\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right) = 0$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$
$x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

c $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$
$\sin(x) \cdot (\sin(x) - 1) = 0$
$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = 1$
$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

d $\cos^2(2x) + \cos(2x) = 0$
$\cos(2x) \cdot (\cos(2x) + 1) = 0$
$\cos(2x) = 0 \vee \cos(2x) = -1$
$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

22 **a** $\cos^2\left(x - \frac{1}{5}\pi\right) = 1$
$\cos\left(x - \frac{1}{5}\pi\right) = 1 \vee \cos\left(x - \frac{1}{5}\pi\right) = -1$
$x - \frac{1}{5}\pi = k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{5}\pi = \pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{5}\pi + k \cdot 2\pi$
Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot \pi$.

b $\sin^2\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = 1$
$\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = 1 \vee \sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = -1$
$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{7}{8}\pi + k \cdot \pi$
Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

c $\sin^3(x) - \sin(x) = 0$
$\sin(x) \cdot (\sin^2(x) - 1) = 0$
$\sin(x) = 0 \vee \sin^2(x) = 1$
$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = 1 \vee \sin(x) = -1$
$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

d $\cos^3(2x) - \cos(2x) = 0$
$\cos(2x) \cdot (\cos^2(2x) - 1) = 0$
$\cos(2x) = 0 \vee \cos^2(2x) = 1$
$\cos(2x) = 0 \vee \cos(2x) = 1 \vee \cos(2x) = -1$
$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 2x = k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = k \cdot \frac{1}{4}\pi$.

Bladzijde 108

23 **a** $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$, dus $\tan(A) = 0$ geeft $\dfrac{\sin(A)}{\cos(A)} = 0$
$\sin(A) = 0$
$A = k \cdot \pi$
voldoet

Dus $\tan(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$.

b $\tan\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = 0$
$2x - \frac{1}{6}\pi = k \cdot \pi$
$2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

24 **a** $\sin(4x - \frac{1}{3}\pi) = 1$
$4x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$4x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{5}{24}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

b $\cos(4\pi x) = -1$
$4\pi x = \pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{4} + k \cdot \frac{1}{2}$

c $\sin^2\left(\frac{1}{4}\pi x\right) = 1$
$\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right) = 1 \vee \sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right) = -1$
$\frac{1}{4}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{4}\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = 2 + k \cdot 8 \vee x = 6 + k \cdot 8$
Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = 2 + k \cdot 4$.

d $\sin(2x)\cos(2x) + \sin(2x) = 0$
$\sin(2x) \cdot (\cos(2x) + 1) = 0$
$\sin(2x) = 0 \vee \cos(2x) = -1$
$2x = k \cdot \pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi$
$x = k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

25 **a** $x = \frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

b $x = 2\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin\left(2\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, dus $x = 2\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
$x = 4\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin\left(4\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, dus $x = 4\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

c $x = \frac{5}{6}\pi$ geeft $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{5}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

d $x = 2\frac{5}{6}\pi$ geeft $\sin\left(2\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, dus $x = 2\frac{5}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
$x = -1\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, dus $x = -1\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

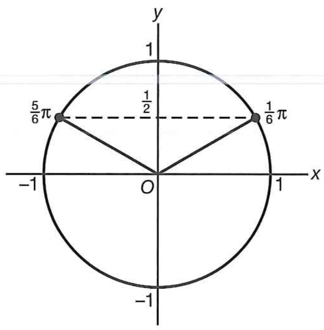
Bladzijde 110

26 **a** $2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

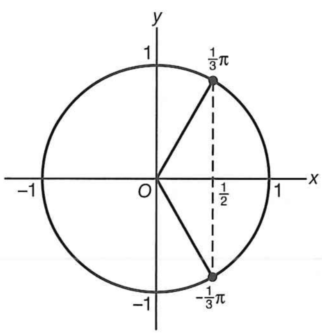


b $2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

$\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot 2\pi$



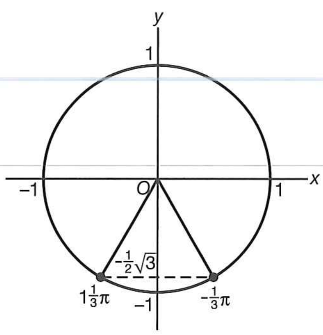
c $2\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\sqrt{3}$

$\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$2x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

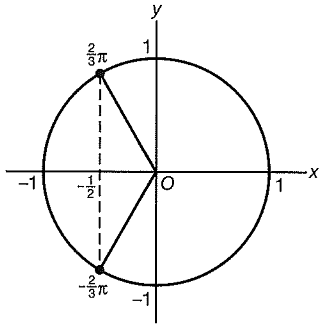
$2x = 1\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{19}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{24}\pi + k \cdot \pi$



© Noordhoff Uitgevers bv

d $2\cos(3x-\pi)=-1$
$\cos(3x-\pi)=-\frac{1}{2}$
$3x-\pi=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3x-\pi=-\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi$
$3x=1\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$
$x=\frac{5}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi \vee x=\frac{1}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$



27 **a** $2\sin\left(2x-\frac{1}{6}\pi\right)=\sqrt{2}$
$\sin\left(2x-\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$2x-\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2x-\frac{1}{6}\pi=\frac{3}{4}\pi+k\cdot 2\pi$
$2x=\frac{5}{12}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2x=\frac{11}{12}\pi+k\cdot 2\pi$
$x=\frac{5}{24}\pi+k\cdot\pi \vee x=\frac{11}{24}\pi+k\cdot\pi$
x op $[0,2\pi]$ geeft $x=\frac{5}{24}\pi \vee x=1\frac{5}{24}\pi \vee x=\frac{11}{24}\pi \vee x=1\frac{11}{24}\pi$

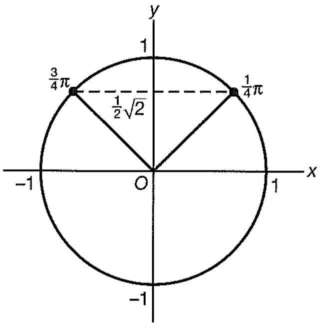
b $2\cos\left(3x-\frac{1}{2}\pi\right)=\sqrt{3}$
$\cos\left(3x-\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$3x-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3x-\frac{1}{2}\pi=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$
$3x=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$
$x=\frac{2}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi \vee x=\frac{1}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$
x op $[0,2\pi]$ geeft $x=\frac{2}{9}\pi \vee x=\frac{8}{9}\pi \vee x=1\frac{5}{9}\pi \vee x=\frac{1}{9}\pi \vee x=\frac{7}{9}\pi \vee x=1\frac{4}{9}\pi$

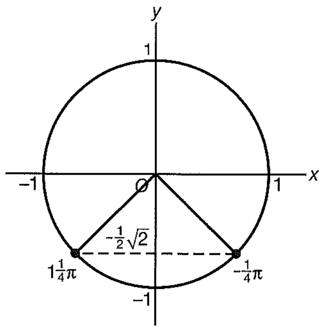
c $\sin\left(\frac{2}{3}x\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{2}{3}x=1\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}x=-\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$
$x=1\frac{7}{8}\pi+k\cdot 3\pi \vee x=-\frac{3}{8}\pi+k\cdot 3\pi$
x op $[0,2\pi]$ geeft $x=1\frac{7}{8}\pi$

d $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}x=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x=-\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$
$x=1\frac{2}{3}\pi+k\cdot 4\pi \vee x=-1\frac{2}{3}\pi+k\cdot 4\pi$
x op $[0,2\pi]$ geeft $x=1\frac{2}{3}\pi$

28 **a** $2\sin^2(x)=1$
$\sin^2(x)=\frac{1}{2}$
$\sin(x)=\sqrt{\frac{1}{2}} \vee \sin(x)=-\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\sin(x)=\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

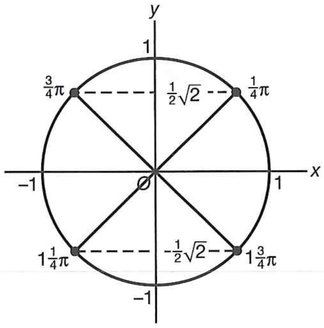
b $\sin(x)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $x=\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi \vee x=\frac{3}{4}\pi+k\cdot 2\pi$
$\sin(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $x=1\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi \vee x=-\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$





c $x=\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$: $\ldots,-1\frac{3}{4}\pi,\quad \frac{1}{4}\pi,\quad 2\frac{1}{4}\pi,\ldots$
$x=\frac{3}{4}\pi+k\cdot 2\pi$: $\ldots,-1\frac{1}{4}\pi,\quad \frac{3}{4}\pi,\quad 2\frac{3}{4}\pi,\ldots$
$x=1\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$: $\ldots,-\frac{3}{4}\pi,\quad 1\frac{1}{4}\pi,\quad 3\frac{1}{4}\pi,\ldots$
$x=-\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$: $\ldots,-\frac{1}{4}\pi,\quad 1\frac{3}{4}\pi,\quad 3\frac{3}{4}\pi,\ldots$
Dus $x=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi$.

d



Uit de cirkel is af te lezen dat $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

29 **a** $2\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

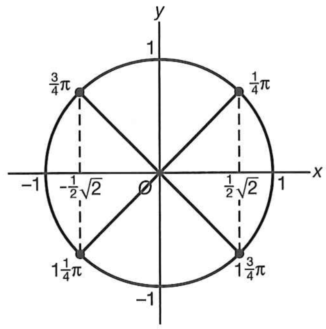
$\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$



b $4\sin^2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = 1$

$\sin^2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{4}$

$\sin(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2} \vee \sin(x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$

$x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = k \cdot \pi$.

c $4\cos^2\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = 3$

$\cos^2\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{3}{4}$

$\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{\frac{3}{4}} \vee \cos(x + \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

$\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \cos(x + \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{4}\pi = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -1\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot

$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$.

d $4\sin^3(x) - \sin(x) = 0$

$\sin(x) \cdot (4\sin^2(x) - 1) = 0$

$\sin(x) = 0 \vee 4\sin^2(x) = 1$

$\sin(x) = 0 \vee \sin^2(x) = \frac{1}{4}$

$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \frac{1}{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot

$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$.

e $2\cos^2(x) = \cos(x) + 1$

$2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$

$\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2} = 0$

$(\cos(x) - 1) \cdot \left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right) = 0$

$\cos(x) = 1 \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x = k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$.

f $\cos^2(x) - \cos(x) + \frac{1}{4} = 0$

$\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

30 **a** $\sin(\tfrac{1}{2}\pi x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$
$\tfrac{1}{2}\pi x = \tfrac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \vee \tfrac{1}{2}\pi x = \tfrac{2}{3}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = \tfrac{2}{3} + k\cdot 4 \vee x = 1\tfrac{1}{3} + k\cdot 4$
x op $[0, 10]$ geeft $x = \tfrac{2}{3} \vee x = 4\tfrac{2}{3} \vee x = 8\tfrac{2}{3} \vee x = 1\tfrac{1}{3} \vee x = 5\tfrac{1}{3} \vee x = 9\tfrac{1}{3}$

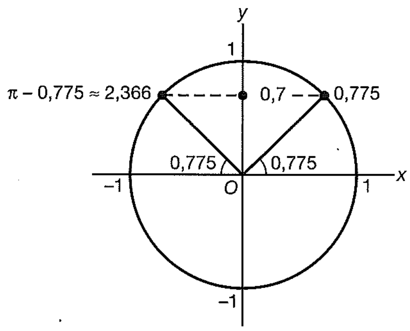
b $\cos(\tfrac{1}{3}\pi x) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$
$\tfrac{1}{3}\pi x = \tfrac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee \tfrac{1}{3}\pi x = -\tfrac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = 2\tfrac{1}{2} + k\cdot 6 \vee x = -2\tfrac{1}{2} + k\cdot 6$
x op $[0, 10]$ geeft $x = 2\tfrac{1}{2} \vee x = 8\tfrac{1}{2} \vee x = 3\tfrac{1}{2} \vee x = 9\tfrac{1}{2}$

c $4\sin^2(\tfrac{1}{5}\pi x) = 1$
$\sin^2(\tfrac{1}{5}\pi x) = \tfrac{1}{4}$
$\sin(\tfrac{1}{5}\pi x) = \tfrac{1}{2} \vee \sin(\tfrac{1}{5}\pi x) = -\tfrac{1}{2}$
$\tfrac{1}{5}\pi x = \tfrac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee \tfrac{1}{5}\pi x = \tfrac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee \tfrac{1}{5}\pi x = -\tfrac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee \tfrac{1}{5}\pi x = 1\tfrac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = \tfrac{5}{6} + k\cdot 10 \vee x = 4\tfrac{1}{6} + k\cdot 10 \vee x = -\tfrac{5}{6} + k\cdot 10 \vee x = 5\tfrac{5}{6} + k\cdot 10$
x op $[0, 10]$ geeft $x = \tfrac{5}{6} \vee x = 4\tfrac{1}{6} \vee x = 9\tfrac{1}{6} \vee x = 5\tfrac{5}{6}$

d $2\cos^2(0{,}1\pi x) + \cos(0{,}1\pi x) = 1$
$2\cos^2(0{,}1\pi x) + \cos(0{,}1\pi x) - 1 = 0$
$\cos^2(0{,}1\pi x) + \tfrac{1}{2}\cos(0{,}1\pi x) - \tfrac{1}{2} = 0$
$(\cos(0{,}1\pi x) + 1)(\cos(0{,}1\pi x) - \tfrac{1}{2}) = 0$
$\cos(0{,}1\pi x) = -1 \vee \cos(0{,}1\pi x) = \tfrac{1}{2}$
$0{,}1\pi x = \pi + k\cdot 2\pi \vee 0{,}1\pi x = \tfrac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \vee 0{,}1\pi x = -\tfrac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = 10 + k\cdot 20 \vee x = 3\tfrac{1}{3} + k\cdot 20 \vee x = -3\tfrac{1}{3} + k\cdot 20$
x op $[0, 10]$ geeft $x = 10 \vee x = 3\tfrac{1}{3}$

31 **a** Uit de figuur hiernaast volgt dat
$\sin(x) = 0{,}7$ geeft $x \approx 0{,}775 + k\cdot 2\pi \vee x \approx 2{,}366 + k\cdot 2\pi$

b $\cos(x) = 0{,}8$
$x \approx 0{,}644 + k\cdot 2\pi \vee x \approx -0{,}644 + k\cdot 2\pi$



32 **a** $\sin(x) = -0{,}85$
$x \approx -1{,}016 + k\cdot 2\pi \vee x \approx 4{,}158 + k\cdot 2\pi$

b $\cos(\tfrac{1}{2}x) = 0{,}25$
$\tfrac{1}{2}x \approx 1{,}318 + k\cdot 2\pi \vee \tfrac{1}{2}x \approx -1{,}318 + k\cdot 2\pi$
$x \approx 2{,}636 + k\cdot 4\pi \vee x \approx -2{,}636 + k\cdot 4\pi$

c $\sin(x + 2) = 0{,}9$
$x + 2 \approx 1{,}120 + k\cdot 2\pi \vee x + 2 \approx 2{,}022 + k\cdot 2\pi$
$x \approx -0{,}880 + k\cdot 2\pi \vee x \approx 0{,}022 + k\cdot 2\pi$

d $\cos(2x + 1) = -0{,}4$
$2x + 1 \approx 1{,}982 + k\cdot 2\pi \vee 2x + 1 \approx -1{,}982 + k\cdot 2\pi$
$2x \approx 0{,}982 + k\cdot 2\pi \vee 2x \approx -2{,}982 + k\cdot 2\pi$
$x \approx 0{,}491 + k\cdot \pi \vee x \approx -1{,}491 + k\cdot \pi$

33 **a** $2\sin(1{,}75x) = 1{,}4$
$\sin(1{,}75x) = 0{,}7$
$1{,}75x \approx 0{,}775 + k\cdot 2\pi \vee 1{,}75x \approx 2{,}366 + k\cdot 2\pi$
$x \approx 0{,}443 + k\cdot 1\tfrac{1}{7}\pi \vee x \approx 1{,}352 + k\cdot 1\tfrac{1}{7}\pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x \approx 0{,}443 \vee x \approx 4{,}033 \vee x \approx 1{,}352 \vee x \approx 4{,}943$

b $\cos^2(0{,}95x) = 0{,}86$
$\cos(0{,}95x) = \sqrt{0{,}86} \vee \cos(0{,}95x) = -\sqrt{0{,}86}$
$0{,}95x \approx 0{,}383 + k\cdot 2\pi \vee 0{,}95x \approx -0{,}383 + k\cdot 2\pi \vee 0{,}95x \approx 2{,}758 + k\cdot 2\pi \vee 0{,}95x \approx -2{,}758 + k\cdot 2\pi$
$x \approx 0{,}404 + k\cdot 2\tfrac{2}{19}\pi \vee x \approx -0{,}404 + k\cdot 2\tfrac{2}{19}\pi \vee x \approx 2{,}903 + k\cdot 2\tfrac{2}{19}\pi \vee x = -2{,}903 + k\cdot 2\tfrac{2}{19}\pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft. $x \approx 0{,}404 \vee x \approx 6{,}210 \vee x \approx 2{,}903 \vee x \approx 3{,}711$

© Noordhoff Uitgevers bv

34 **a** $\sin(3x) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$
$\sin(3x) = \frac{1}{2}$
$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
b $\cos(3x) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$
$\cos(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Bladzijde 111

35 **a** $\sin(x+1) = \sin(2x+3)$
$x + 1 = 2x + 3 + k \cdot 2\pi \vee x + 1 = \pi - (2x+3) + k \cdot 2\pi$
$-x = 2 + k \cdot 2\pi \vee x + 1 = \pi - 2x - 3 + k \cdot 2\pi$
$x = -2 + k \cdot 2\pi \vee 3x = -4 + \pi + k \cdot 2\pi$
$x = -2 + k \cdot 2\pi \vee x = -1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
b $\cos(2x-1) = \cos(x+1)$
$2x - 1 = x + 1 + k \cdot 2\pi \vee 2x - 1 = -(x+1) + k \cdot 2\pi$
$x = 2 + k \cdot 2\pi \vee 2x - 1 = -x - 1 + k \cdot 2\pi$
$x = 2 + k \cdot 2\pi \vee 3x = k \cdot 2\pi$
$x = 2 + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$
c $\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$
$2x - \frac{1}{2}\pi = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{2}\pi = \pi - \left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{2}\pi = \pi - x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{7}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
d $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos(2x)$
$x - \frac{1}{3}\pi = 2x + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -2x + k \cdot 2\pi$
$-x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
e $\sin(2\pi x) = \sin(\pi(x-1))$
$\sin(2\pi x) = \sin(\pi x - \pi)$
$2\pi x = \pi x - \pi + k \cdot 2\pi \vee 2\pi x = \pi - (\pi x - \pi) + k \cdot 2\pi$
$\pi x = -\pi + k \cdot 2\pi \vee 2\pi x = \pi - \pi x + \pi + k \cdot 2\pi$
$x = -1 + k \cdot 2 \vee 3\pi x = 2\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -1 + k \cdot 2 \vee x = \frac{2}{3} + k \cdot \frac{2}{3}$
$x = -1 + k \cdot 2 \vee x = k \cdot \frac{2}{3}$
f $\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \cos(\pi(x-2))$
$\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \cos(\pi x - 2\pi)$
$\frac{1}{2}\pi x = \pi x - 2\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = -(\pi x - 2\pi) + k \cdot 2\pi$
$-\frac{1}{2}\pi x = -2\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = -\pi x + 2\pi + k \cdot 2\pi$
$x = 4 + k \cdot 4 \vee 1\frac{1}{2}\pi x = 2\pi + k \cdot 2\pi$
$x = k \cdot 4 \vee x = 1\frac{1}{3} + k \cdot 1\frac{1}{3}$
$x = k \cdot 4 \vee x = k \cdot 1\frac{1}{3}$
Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = k \cdot 1\frac{1}{3}$.

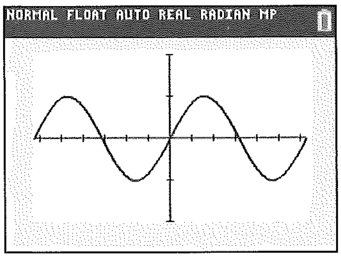
36 **a** $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$
$2x - \frac{1}{3}\pi = x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - \left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{13}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{7}{12}\pi \vee x = \frac{13}{36}\pi \vee x = 1\frac{1}{36}\pi \vee x = 1\frac{25}{36}\pi$
b $\cos\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right)$
$3x + \frac{1}{2}\pi = 2x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x + \frac{1}{2}\pi = -\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x + \frac{1}{2}\pi = -2x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 5x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{20}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{7}{20}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{20}\pi \vee x = 1\frac{11}{20}\pi \vee x = 1\frac{19}{20}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

7.3 Transformaties en functies

Bladzijde 113

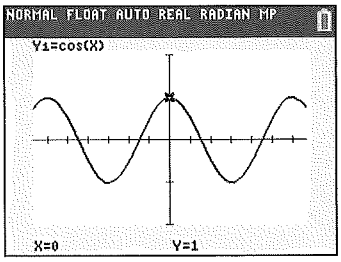
37 **a**



b De toppen zijn $\left(-1\frac{1}{2}\pi, 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\pi, -1\right)$, $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi, -1\right)$.

c De snijpunten met de x-as zijn $(-2\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$.

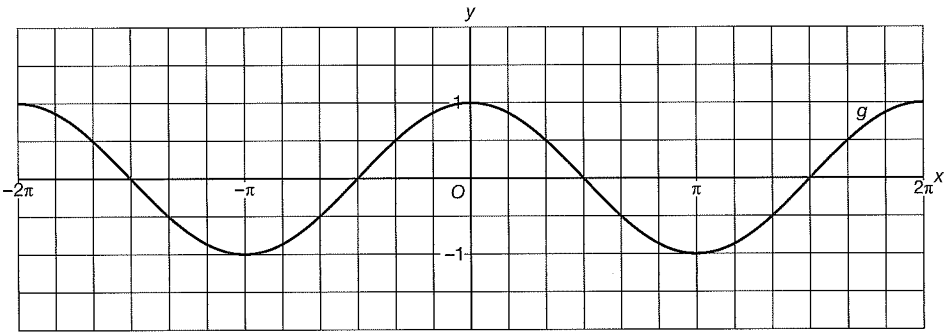
38 **a**



b De toppen zijn $(-2\pi, 1)$, $(-\pi, -1)$, $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$.

c De nulpunten zijn $-1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$.

d



Bladzijde 114

39 **a** $f(x) = \sin(x)$

$$\Big\downarrow \text{translatie } (0, 2)$$

$g(x) = 2 + \sin(x)$

De evenwichtsstand is 2.

b $f(x) = \sin(x)$

$$\Big\downarrow \text{translatie } \left(\tfrac{1}{3}\pi, 0\right)$$

$h(x) = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$h(x) = 0$ geeft $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$

$$x - \tfrac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$$

$$x = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

De nulpunten zijn $\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$.

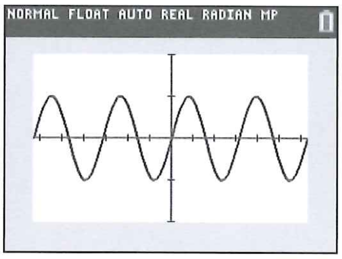
c $f(x) = \sin(x)$

$$\Big\downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 4$$

$k(x) = 4\sin(x)$

De amplitude is 4.

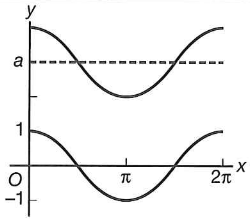
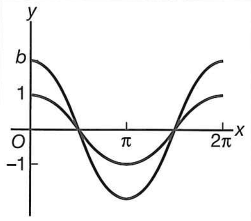
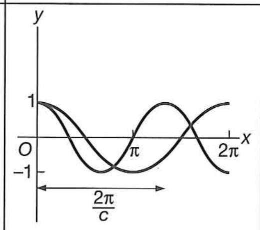
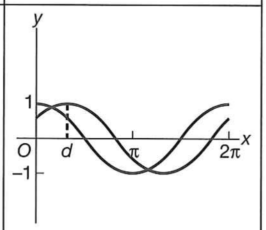
40 **a**



b De periode is 6π.

Bladzijde 116

41

translatie $(0, a)$	vermenigvuldiging met b t.o.v. de x-as	vermenigvuldiging met $\frac{1}{c}$ t.o.v. de y-as	translatie $(d, 0)$
tel a op bij de functiewaarde	vermenigvuldig de functiewaarde met b	vervang x door cx	vervang x door $x - d$
 $y = a + \cos(x)$	 $y = b\cos(x)$	 $y = \cos(cx)$	 $y = \cos(x - d)$
evenwichtsstand is a	amplitude is b	periode is $\frac{2\pi}{c}$	beginpunt is $(d, 1)$

42 **a** $y = \sin(x)$
$\downarrow$ verm. x-as, 2
$y = 2\sin(x)$
$\downarrow$ translatie $(-3, 0)$
$f(x) = 2\sin(x + 3)$

b $y = \sin(x)$
$\downarrow$ verm. x-as, $\frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}\sin(x)$
$\downarrow$ translatie $\left(0, \frac{1}{5}\right)$
$g(x) = \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{5}$

c $y = \cos(x)$
$\downarrow$ translatie $(12, 0)$
$y = \cos(x - 12)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{3}$
$h(x) = \cos(3x - 12)$

d $y = \cos(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, 4
$y = \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$
$\downarrow$ verm. x-as, $1\frac{1}{2}$
$j(x) = 1\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{4}x\right)$

43 **a** $y = \cos(x)$
$\downarrow$ verm. x-as, 1,2
$y = 1{,}2\cos(x)$
$\downarrow$ translatie $\left(\frac{1}{6}\pi, 0\right)$
$y = 1{,}2\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$
$\downarrow$ translatie $(0, 5)$
$f(x) = 5 + 1{,}2\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$

b $y = \sin(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, 5
$y = \sin\left(\frac{1}{5}x\right)$
$\downarrow$ translatie $\left(-\frac{1}{3}\pi; 0{,}4\right)$
$g(x) = 0{,}4 + \sin\left(\frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

c $y = \cos(x)$
$\downarrow$ translatie $(-4{,}2; 0)$
$y = \cos(x + 4{,}2)$
$\downarrow$ verm y-as, $\frac{1}{3}$
$y = \cos(3x + 4{,}2)$
$\downarrow$ verm. x-as, 0,29
$h(x) = 0{,}29\cos(3x + 4{,}2)$

d $y = \sin(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{3}$
$y = \sin(3x)$
$\downarrow$ verm. x-as, 2
$y = 2\sin(3x)$
$\downarrow$ translatie $\left(\frac{1}{2}\pi; -0{,}8\right)$
$j(x) = -0{,}8 + 2\sin\left(3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 117

44 $y = \sin(x)$

$\downarrow$ verm. y-as, 3

$y = \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

$\downarrow$ translatie (4; -1,5)

$f(x) = -1{,}5 + \sin\left(\frac{1}{3}(x-4)\right)$

45 **a** $y = \cos(x)$

$\downarrow$ translatie $\left(\frac{1}{4}\pi, 4\right)$

$y = 4 + \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

$\downarrow$ verm. x-as, 3

$f(x) = 3\left(4 + \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$
ofwel $f(x) = 12 + 3\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

b $y = \cos(x)$

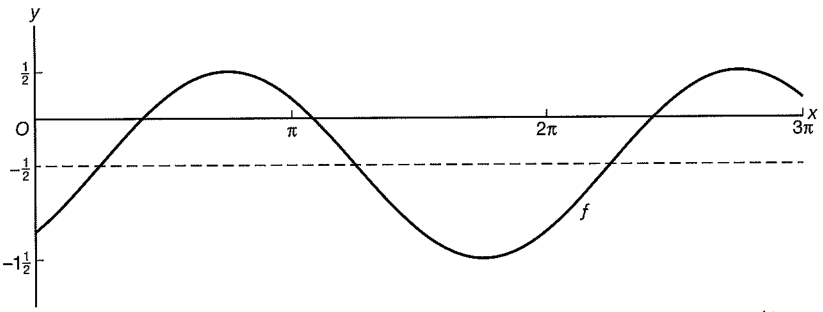
$\downarrow$ verm. x-as, 3

$y = 3\cos(x)$

$\downarrow$ translatie $\left(\frac{1}{4}\pi, 4\right)$

$g(x) = 4 + 3\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

46 **a** Voer in $y_1 = -\frac{1}{2} + \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.



b De grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand in de punten $\left(\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(1\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2}\right)$ en $\left(2\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2}\right)$.

c De toppen van de grafiek van f zijn $\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1\frac{3}{4}\pi, -1\frac{1}{2}\right)$ en $\left(2\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2}\right)$.

d $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2} + \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$

$\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}$

$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

x op $[0, 3\pi]$ geeft $x = \frac{5}{12}\pi \vee x = 2\frac{5}{12}\pi \vee x = 1\frac{1}{12}\pi$

Dus $x_A = \frac{5}{12}\pi$, $x_B = 1\frac{1}{12}\pi$ en $x_C = 2\frac{5}{12}\pi$.

$AB = x_B - x_A = 1\frac{1}{12}\pi - \frac{5}{12}\pi = \frac{8}{12}\pi = \frac{2}{3}\pi$

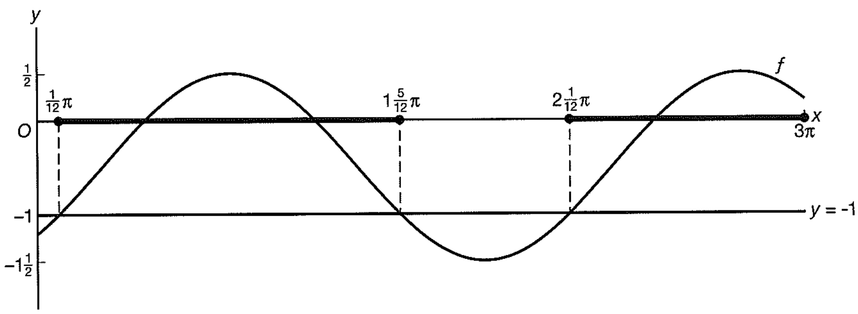
e $f(x) = -1$ geeft $-\frac{1}{2} + \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -1$

$\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

x op $[0, 3\pi]$ geeft $x = \frac{1}{12}\pi \vee x = 2\frac{1}{12}\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi$



$f(x) \geq -1$ geeft $\frac{1}{12}\pi \leq x \leq 1\frac{5}{12}\pi \vee 2\frac{1}{12}\pi \leq x \leq 3\pi$

47 $f(x) = 2$ geeft $|1 + 2\sin(x)| = 2$

$1 + 2\sin(x) = 2 \vee 1 + 2\sin(x) = -2$

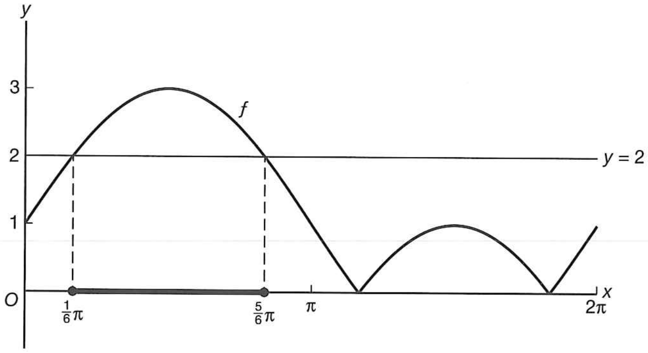
$2\sin(x) = 1 \vee 2\sin(x) = -3$

$\sin(x) = \frac{1}{2} \vee \sin(x) = -1\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

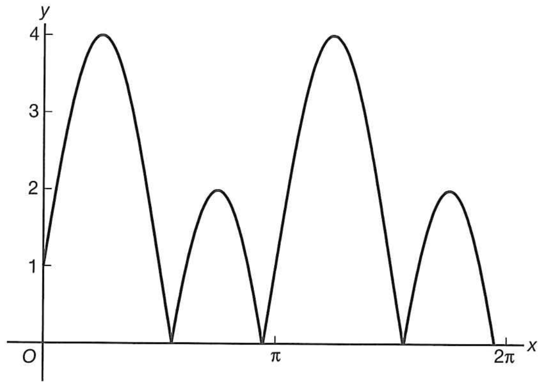
7

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$



$f(x) \geq 2$ geeft $\frac{1}{6}\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$

48 **a** Voer in $y_1 = |1 + 3\sin(2x)|$.



b De grafiek van $y = \sin(2x)$ ontstaat uit die van $y = \sin(x)$ bij vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{2}$. Dus de toppen van $y = \sin(2x)$ zijn $\left(\frac{1}{4}\pi, 1\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, -1\right)$, $\left(1\frac{1}{4}\pi, 1\right)$ en $\left(1\frac{3}{4}\pi, -1\right)$.

Dus de toppen van de grafiek van f zijn $\left(\frac{1}{4}\pi, 4\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, 2\right)$, $\left(1\frac{1}{4}\pi, 4\right)$ en $\left(1\frac{3}{4}\pi, 2\right)$.

c $f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \left|1 + 3\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right| = \left|1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right| = 1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \left|1 + 3\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right| = \left|1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right| = 1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \left|1 + 3\sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right)\right| = \left|1 + 3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right| = -1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

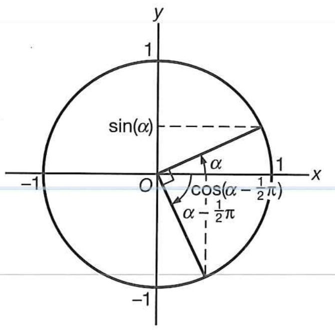
$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \left|1 + 3\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right)\right| = \left|1 + 3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right| = -1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Bladzijde 118

49 $f: y = -\sin(x)$ $\quad$ $j: y = -\sin(x)$
$g: y = \cos(x)$ $\quad$ $k: y = -\sin(x)$
$h: y = \cos(x)$ $\quad$ $l: y = -\cos(x)$

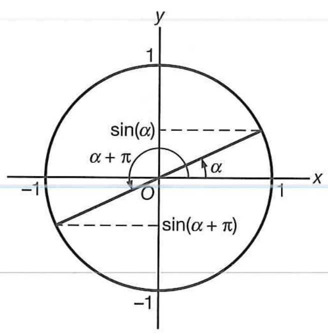
Bladzijde 119

50 **a**



$\cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = \sin(\alpha)$

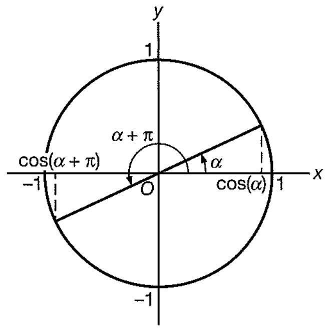
b



$\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$

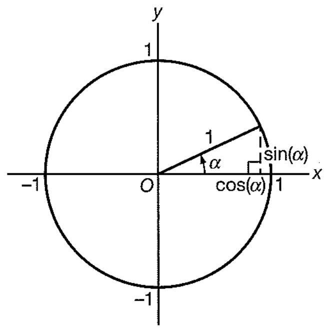
© Noordhoff Uitgevers bv

c



$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$

d



De stelling van Pythagoras geeft
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

51 **a** $\sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
b $\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(2x + \frac{5}{6}\pi\right)$
c $-\sin\left(3x - \frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(3x - \frac{2}{3}\pi + \pi\right) = \sin\left(3x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(3x + \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right)$
d $-\cos\left(4x + 1\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(4x + 1\frac{1}{6}\pi + \pi\right) = \cos\left(4x + 2\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(4x + 2\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$
$= \sin\left(4x + 2\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(4x + \frac{2}{3}\pi\right)$

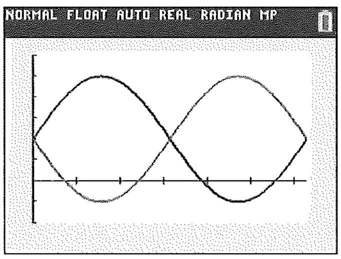
52 **a** $(\sin(x) - \cos(x))^2 = \sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) =$
$1 - 2\sin(x)\cos(x)$
b $\dfrac{2\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{2\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 2\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + 1 = 2\tan^2(x) + 1$

53 **a** $\sin^2(x) + 4\cos(x) = 1 - \cos^2(x) + 4\cos(x) = -\cos^2(x) + 4\cos(x) + 1$
b $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2 = 2(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2 = 2 - 2\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = -2\sin^2(x) + \sin(x)$
c $2\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 2(1 - \cos^2(x)) + \cos^2(x) + \cos(x)$
$= 2 - 2\cos^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = -\cos^2(x) + \cos(x) + 2$

7.4 Grafieken van goniometrische functies

Bladzijde 121

54 **a**



b De amplitude is 3 bij beide grafieken.

Bladzijde 123

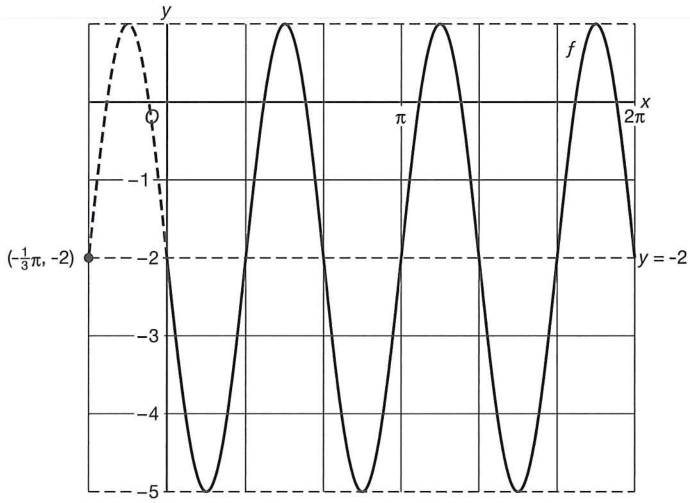
55 **a** $f(x) = -2 + 3\sin(3x + \pi) = -2 + 3\sin\left(3\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

evenwichtsstand -2

amplitude 3

periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$3 > 0$, dus grafiek stijgend door het punt $\left(-\frac{1}{3}\pi, -2\right)$.



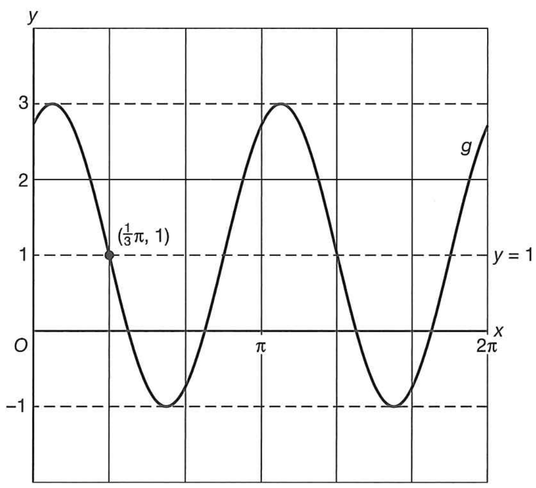
b $g(x) = 1 - 2\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = 1 - 2\sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

evenwichtsstand 1

amplitude 2

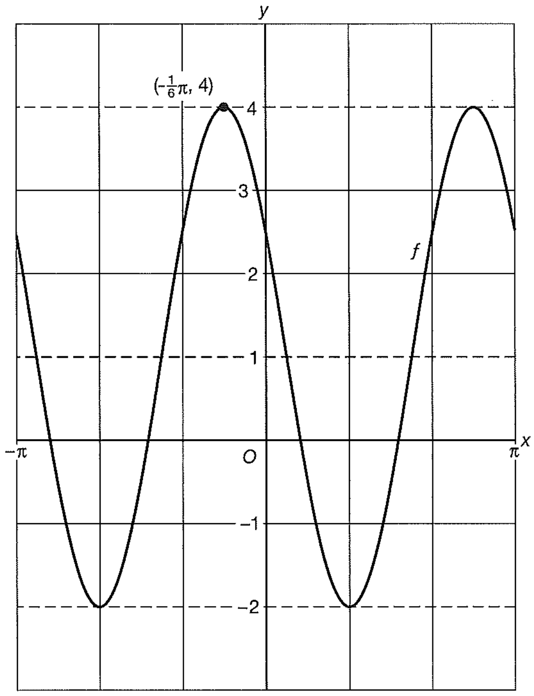
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

$-2 < 0$, dus grafiek dalend door het punt $\left(\frac{1}{3}\pi, 1\right)$.

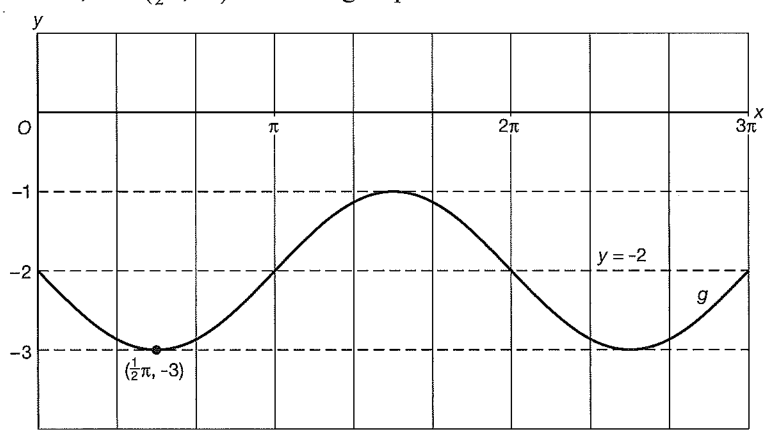


 © Noordhoff Uitgevers bv

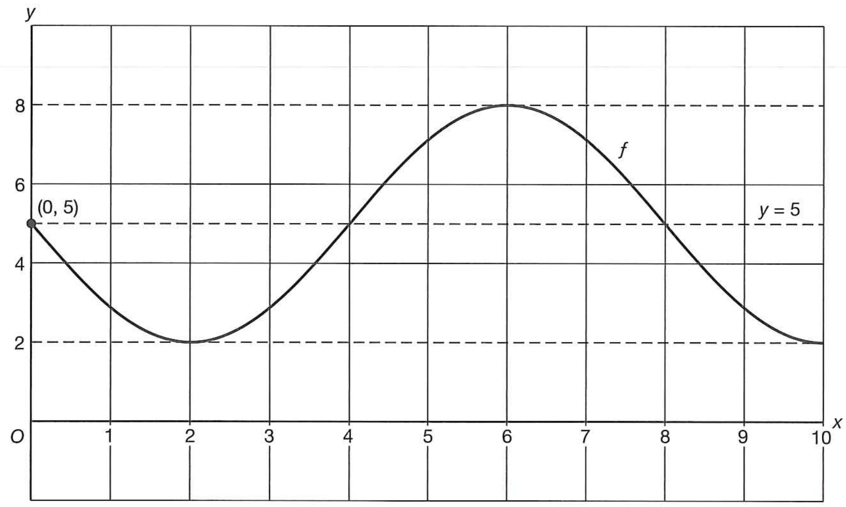
56 **a** $f(x) = 1 + 3\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = 1 + 3\cos\left(2\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)\right)$
evenwichtsstand 1
amplitude 3
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
$3 > 0$, dus $\left(-\frac{1}{6}\pi, 4\right)$ is een hoogste punt.



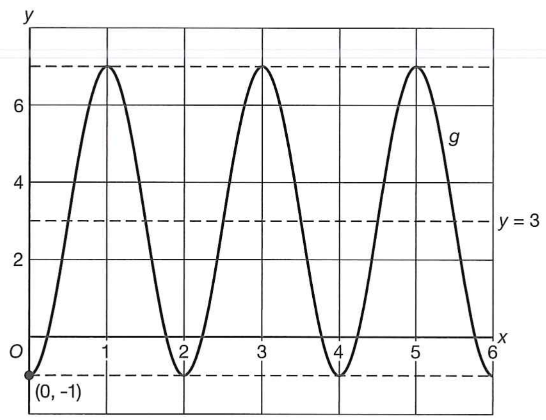
b $g(x) = -2 - \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$
evenwichtsstand -2
amplitude 1
periode 2π
$-1 < 0$, dus $\left(\frac{1}{2}\pi, -3\right)$ is een laagste punt.



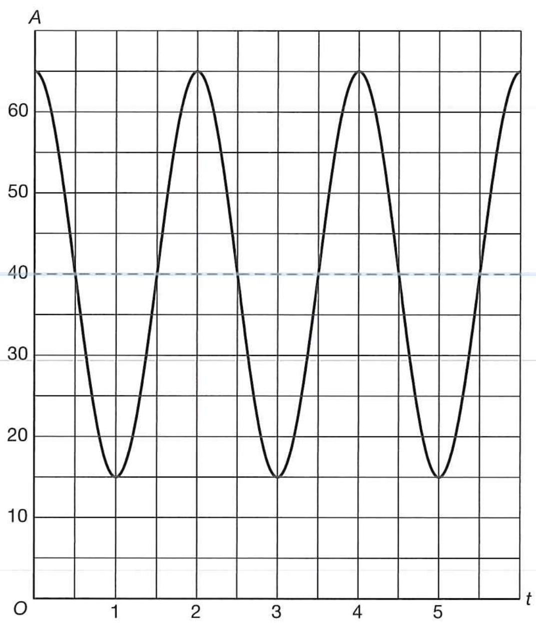
57 **a** $f(x) = 5 - 3\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$
evenwichtsstand 5
amplitude 3
periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$
$-3 < 0$, dus grafiek dalend door het punt $(0, 5)$.



b $f(x) = 3 - 4\cos(\pi x)$
evenwichtsstand 3
amplitude 4
periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
$-4 < 0$, dus $(0, -1)$ is een laagste punt.



58 **a** $A = 40 + 25\sin\left(\pi\left(t - 1\frac{1}{2}\right)\right)$
evenwichtsstand 40
amplitude 25
periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
$25 > 0$, dus stijgend door het punt $\left(1\frac{1}{2}, 40\right)$.

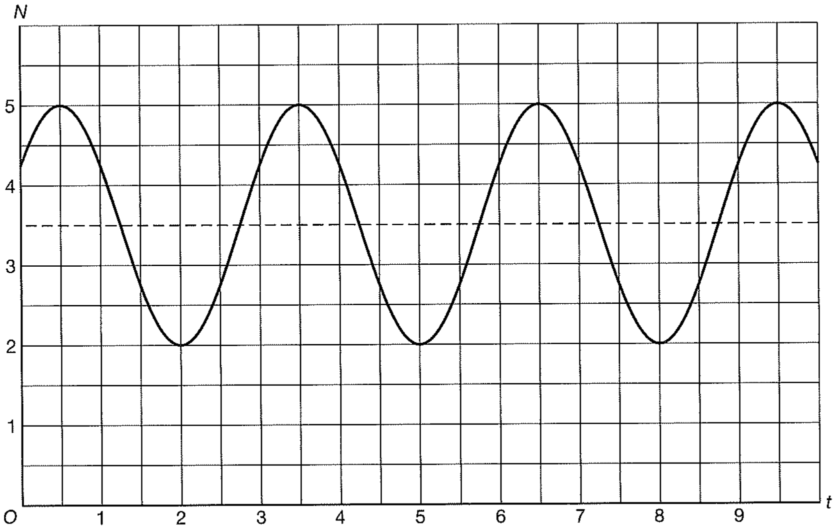


© Noordhoff Uitgevers bv

b Voer in $y_1 = 40 + 25\sin(\pi(x - 1\frac{1}{2}))$ en $y_2 = 30$.
Intersect geeft $x \approx 0{,}63$, $x \approx 1{,}37$, $x \approx 2{,}63$, $x \approx 3{,}37$, $x \approx 4{,}63$ en $x \approx 5{,}37$.
$A < 30$ geeft $0{,}63 < t < 1{,}37 \vee 2{,}63 < t < 3{,}37 \vee 4{,}63 < t < 5{,}37$

c De grafiek heeft de grootste helling in de snijpunten van de grafiek met de lijn van de evenwichtsstand.
Dit is bijvoorbeeld bij $t = 1\frac{1}{2}$.
De optie dy/dx geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1\frac{1}{2}} \approx 78{,}5$.
Dus de maximale helling van de grafiek is 78,5.

59 **a** $N = 1\frac{1}{2}\cos(\frac{2}{3}\pi(t - \frac{1}{2})) + 3\frac{1}{2}$
evenwichtsstand $3\frac{1}{2}$
amplitude $1\frac{1}{2}$
periode $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$
$1\frac{1}{2} > 0$, dus $(\frac{1}{2}, 5)$ is een hoogste punt.



b Voer in $y_1 = 1\frac{1}{2}\cos(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{2})) + 3\frac{1}{2}$ en $y_2 = 4$.
Intersect geeft $x \approx 1{,}09$, $x \approx 2{,}91$, $x \approx 4{,}09$, $x \approx 5{,}91$, $x \approx 7{,}09$ en $x \approx 8{,}91$.
$N > 4$ geeft $0 \leq t < 1{,}09 \vee 2{,}91 < t < 4{,}09 \vee 5{,}91 < t < 7{,}09 \vee 8{,}91 < t \leq 10$

c De optie dy/dx geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 2{,}720...$
De gevraagde helling is dus 2,72.

d De grafiek heeft de grootste helling in de snijpunten van de grafiek met de lijn van de evenwichtsstand.
Dit is bijvoorbeeld bij $t = 2{,}75$.
De optie dy/dx geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2{,}75} = 3{,}141...$
Dus de maximale helling van de grafiek is 3,14.

60 **a** evenwichtsstand 3
amplitude 2
periode π

b $a = 3$
$b = 2$
$c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
$d = \frac{1}{3}\pi$

Bladzijde 125

61 **a** De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = \pi$, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2}\sin(1\frac{1}{2}(x - \pi))$.
b Een laagstepunt is $(0, -1\frac{1}{2})$, dus $d = 0$ en de formule is $y = 1 - 2\frac{1}{2}\cos(1\frac{1}{2}x)$.

62 **a** De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = 3$, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}\pi(x - 3))$.
b Een laagste punt is $(0, -1\frac{1}{2})$, dus $d = 0$ en de formule is $y = 1 - 2\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}\pi x)$.

63 **a** $a = \text{evenwichtsstand} = \dfrac{3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
$b = \text{amplitude} = 3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$
Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
De periode is $1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = \pi$, dus $c = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.
Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}\pi$, dus $d = \frac{1}{2}\pi$.
Dus $y = 2 + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{2}\pi))$.
b Een hoogste punt is $(\frac{3}{4}\pi, 3\frac{1}{2})$, dus $y = 2 + 1\frac{1}{2}\cos(2(x - \frac{3}{4}\pi))$.

64 **a** $a = \text{evenwichtsstand} = \dfrac{4 + -2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$
$b = \text{amplitude} = 4 - 1 = 3$
Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $x = 2$ en $x = 5$.
De periode is $5 - 2 = 3$, dus $c = \dfrac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.
Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 2$, dus $d = 2$.
Dus $y = 1 + 3\sin(\frac{2}{3}\pi(x - 2))$.
b De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}$, dus $y = 1 - 3\sin(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{2}))$.

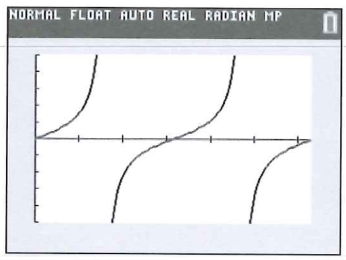
7

65 **a** De periode is 5 en de evenwichtsstand is 2.
De grafiek snijdt $y = 2$ voor $x = 0$.
Een top ligt een kwart periode rechts van een snijpunt met de evenwichtsstand, dus $x_A = 0 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 1\frac{1}{4}$.
b $a = \text{evenwichtsstand} = \dfrac{6 + -2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
$b = \text{amplitude} = 6 - 2 = 4$
Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $x = 0$ en $x = 5$.
De periode is $5 - 0 = 5$, dus $c = \dfrac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.
Een hoogste punt is $(1\frac{1}{4}, 6)$, dus $d = 1\frac{1}{4}$ en de formule is $y = 2 + 4\cos(\frac{2}{5}\pi(x - 1\frac{1}{4}))$.
c Een laagste punt is $(3\frac{3}{4}, -2)$, dus $d = 3\frac{3}{4}$ en de formule is $y = 2 - 4\cos(\frac{2}{5}\pi(x - 3\frac{3}{4}))$.

Bladzijde 126

66 **a** $a = \text{evenwichtsstand} = \dfrac{175 + 25}{2} = \dfrac{200}{2} = 100$
$b = \text{amplitude} = 175 - 100 = 75$
Door de evenwichtsstand bij opvolgend $t = 4$ en $t = 9$.
de halve periode is $9 - 4 = 5$, dus periode $= 10$ en dit geeft $c = \dfrac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.
Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4$, dus $d = 4$.
Dus $N = 100 + 75\sin(\frac{1}{5}\pi(t - 4))$.
b Een hoogste punt is $(6\frac{1}{2}, 175)$, dus $N = 100 + 75\cos(\frac{1}{5}\pi(t - 6\frac{1}{2}))$.

67 **a**



b De lijn $x = \frac{1}{2}\pi$ en de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 128

68 **a** $\tan\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$3x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

b $1 - \tan\left(\frac{3}{4}x\right) = 2$
$\tan\left(\frac{3}{4}x\right) = -1$
$\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
$x = \pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$

c $\tan(\frac{1}{2}x) = \tan\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right)$
$\frac{1}{2}x = 2x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
$-1\frac{1}{2}x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

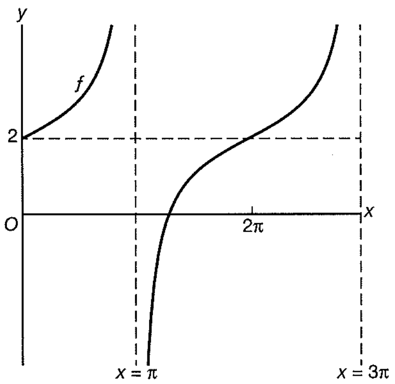
d $3\tan\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \sqrt{3}$
$\tan\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{3} + k \cdot 2$

e $2 + \sqrt{3} \cdot \tan\left(\frac{1}{8}\pi x\right) = 5$
$\sqrt{3} \cdot \tan\left(\frac{1}{8}\pi x\right) = 3$
$\tan\left(\frac{1}{8}\pi x\right) = \sqrt{3}$
$\frac{1}{8}\pi x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
$x = 2\frac{2}{3} + k \cdot 8$

f $\tan\left(\frac{1}{6}\pi x\right) = \tan\left(\frac{1}{4}\pi(x-1)\right)$
$\frac{1}{6}\pi x = \frac{1}{4}\pi(x-1) + k \cdot \pi$
$\frac{1}{6}\pi x = \frac{1}{4}\pi x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
$-\frac{1}{12}\pi x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
$x = 3 + k \cdot 12$
vold. niet

69 **a** Beginpunt (0, 2), periode $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ en asymptoten zijn de lijnen $x = \pi$ en $x = 3\pi$.

b

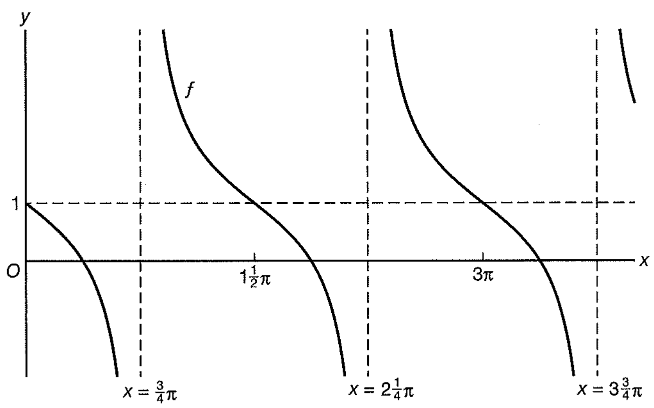


c Voer in $y_1 = 2 + \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$. De optie zero (TI) of root (Casio) geeft $x \approx 4{,}07$.
Dus het nulpunt is 4,07.

d $f(x) = 3$ geeft $2 + \tan\left(\frac{1}{2}x\right) = 3$
$\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$
$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
x op $[0, 3\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 2\frac{1}{2}\pi$, dus $\left(\frac{1}{2}\pi, 3\right)$ en $\left(2\frac{1}{2}\pi, 3\right)$.

70 **a** Beginpunt (0, 1), periode $\frac{\pi}{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}\pi$ en asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = 2\frac{1}{4}\pi$ en $x = 3\frac{3}{4}\pi$.

b

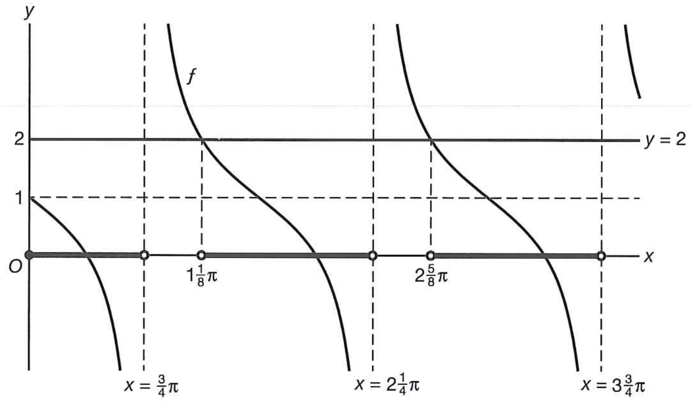


c $f(x) = 0$ geeft $1 - \tan\left(\frac{2}{3}x\right) = 0$
$\tan\left(\frac{2}{3}x\right) = 1$
$\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot 1\frac{1}{2}\pi$
x op $[0, 4\pi]$ geeft $x = \frac{3}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = 3\frac{3}{8}\pi$
Dus de nulpunten zijn $\frac{3}{8}\pi$, $1\frac{7}{8}\pi$ en $3\frac{3}{8}\pi$.

d $f(x) = 2$ geeft $1 - \tan\left(\frac{2}{3}x\right) = 2$

$$\tan\left(\tfrac{2}{3}x\right) = -1$$
$$\tfrac{2}{3}x = \tfrac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = 1\tfrac{1}{8}\pi + k \cdot 1\tfrac{1}{2}\pi$$

x op $[0, 4\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{8}\pi \vee x = 2\frac{5}{8}\pi$

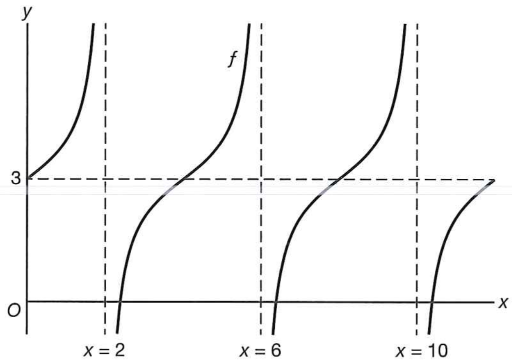


$f(x) < 2$ geeft $0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee 1\frac{1}{8}\pi < x < 2\frac{1}{4}\pi \vee 2\frac{5}{8}\pi < x < 3\frac{3}{4}\pi$

Bladzijde 129

71 **a** Beginpunt (0, 3), periode $\dfrac{\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 4$ en asymptoten zijn de lijnen $x = 2$, $x = 6$ en $x = 10$.

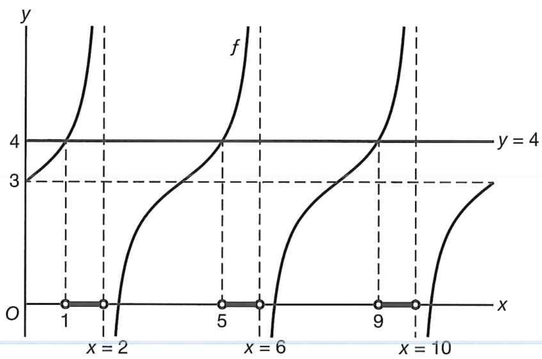
b



c $f(x) = 4$ geeft $3 + \tan\left(\frac{1}{4}\pi x\right) = 4$

$$\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi x\right) = 1$$
$$\tfrac{1}{4}\pi x = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = 1 + k \cdot 4$$

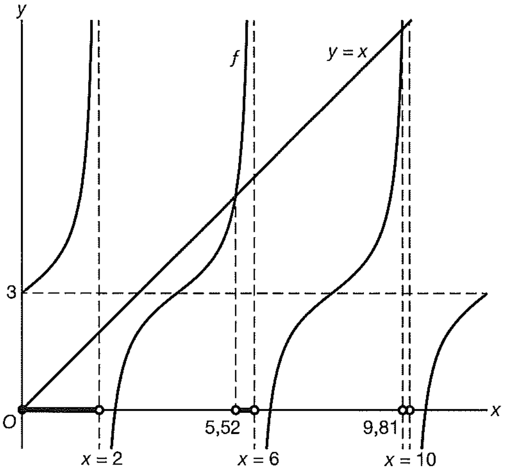
x op $[0, 12]$ geeft $x = 1 \vee x = 5 \vee x = 9$.



$f(x) > 4$ geeft $1 < x < 2 \vee 5 < x < 6 \vee 9 < x < 10$

© Noordhoff Uitgevers bv

d Voer in $y_1 = 3 + \tan\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$ en $y_2 = x$.
Intersect geeft $x \approx 5{,}52$ en $x \approx 9{,}81$.

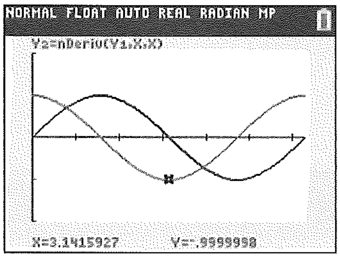


$f(x) > x$ geeft $0 \leq x < 2 \vee 5{,}52 < x < 6 \vee 9{,}81 < x < 10$

7.5 Goniometrische functies differentiëren

Bladzijde 131

72 **a** Voer in $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_1)\big|_{x=x}$.



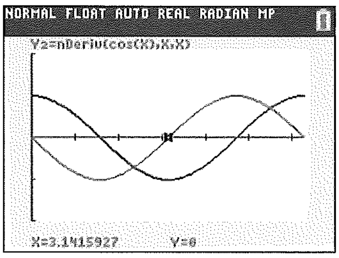
b Waarschijnlijk is $y = \cos(x)$ de afgeleide van $y = \sin(x)$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
PRESS ENTER TO EDIT

X	Y1	Y2	Y3
-.1	-.0998	.995	.995
-.09	-.0899	.99595	.99595
-.08	-.0799	.9968	.9968
-.07	-.0699	.99755	.99755
-.06	-.06	.9982	.9982
-.05	-.05	.99875	.99875
-.04	-.04	.9992	.9992
-.03	-.03	.99955	.99955
-.02	-.02	.9998	.9998
-.01	-.01	.99995	.99995
0	0	1	1

Y3=cos(X)

c Voer in $y_1 = \cos(x)$ en $y_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_1)\big|_{x=x}$.



Waarschijnlijk is $y = -\sin(x)$ de afgeleide van $y = \cos(x)$.

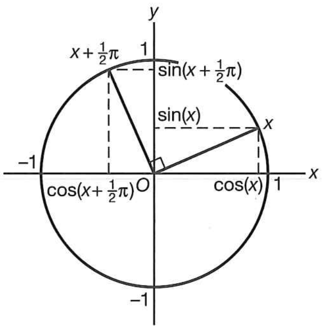
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
PRESS ENTER TO EDIT

X	Y1	Y2	Y3
-.1	.995	.09983	.09983
-.09	.99595	.08988	.08988
-.08	.9968	.07991	.07991
-.07	.99755	.06994	.06994
-.06	.9982	.05996	.05996
-.05	.99875	.04998	.04998
-.04	.9992	.03999	.03999
-.03	.99955	.03	.03
-.02	.9998	.02	.02
-.01	.99995	.01	.01
0	1	0	0

Y3=-sin(X)

Bladzijde 133

73 $[\cos(x)]' = [\sin(x + \frac{1}{2}\pi)]' = \cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\sin(x)$



74 **a** $f(x) = 3 + 4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ geeft $f'(x) = 4\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) \cdot 2 = 8\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$
b $g(x) = 10 + 16\cos(\frac{1}{2}(x - 1))$ geeft $g'(x) = -16\sin(\frac{1}{2}(x - 1)) \cdot \frac{1}{2} = -8\sin(\frac{1}{2}(x - 1))$
c $h(x) = x\cos(x)$ geeft $h'(x) = 1 \cdot \cos(x) + x \cdot -\sin(x) = \cos(x) - x\sin(x)$
d $j(x) = x\cos(2x)$ geeft $j'(x) = 1 \cdot \cos(2x) + x \cdot -\sin(2x) \cdot 2 = \cos(2x) - 2x\sin(2x)$
e $k(x) = x^2 \cdot \sin(3x)$ geeft $k'(x) = 2x \cdot \sin(3x) + x^2 \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 2x\sin(3x) + 3x^2 \cdot \cos(3x)$
f $l(x) = 2x\sin(3x - 1)$ geeft $l'(x) = 2 \cdot \sin(3x - 1) + 2x \cdot \cos(3x - 1) \cdot 3 = 2\sin(3x - 1) + 6x\cos(3x - 1)$

75 **a** $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin(x)}{\cos(x)}$ geeft $f'(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot (2x + \cos(x)) - (x^2 + \sin(x)) \cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)}$

$$= \frac{2x\cos(x) + \cos^2(x) + x^2\sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2x\cos(x) + x^2\sin(x) + 1}{\cos^2(x)}$$

b $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2 + \cos(x)}$ geeft $g'(x) = \dfrac{(x^2 + \cos(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (2x - \sin(x))}{(x^2 + \cos(x))^2}$

$$= \frac{x^2\cos(x) + \cos^2(x) - 2x\sin(x) + \sin^2(x)}{(x^2 + \cos(x))^2} = \frac{x^2\cos(x) - 2x\sin(x) + 1}{(x^2 + \cos(x))^2}$$

c $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ geeft $h'(x) = \dfrac{\sin(x) \cdot -\sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{-1}{\sin^2(x)}$

d $j(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x + \sin(x)}$ geeft $j'(x) = \dfrac{(x + \sin(x))(1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)) - x\sin(x)(1 + \cos(x))}{(x + \sin(x))^2}$

$$= \frac{x\sin(x) + x^2\cos(x) + \sin^2(x) + x\sin(x)\cos(x) - x\sin(x) - x\sin(x)\cos(x)}{(x + \sin(x))^2}$$

$$= \frac{x^2\cos(x) + \sin^2(x)}{(x + \sin(x))^2}$$

76 **a** $f(x) = \cos^2(x)$ geeft $f'(x) = 2\cos(x) \cdot -\sin(x) = -2\sin(x)\cos(x)$
b $g(x) = 2\sin^2(x)$ geeft $g'(x) = 4\sin(x)\cos(x)$
c $h(x) = 1 + 2\cos^2(x)$ geeft $h'(x) = 4\cos(x) \cdot -\sin(x) = -4\sin(x)\cos(x)$
d $j(x) = x + 3\sin^2(x)$ geeft $j'(x) = 1 + 6\sin(x)\cos(x)$

Bladzijde 134

77 **a** $f(x) = 3\tan(2x)$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2 = \dfrac{6}{\cos^2(2x)}$
b $g(x) = \tan^2(x)$ geeft $g'(x) = 2\tan(x) \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 2 \cdot \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \dfrac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$

78 **a** $f(x) = \cos^3(x)$ geeft $f'(x) = 3\cos^2(x) \cdot -\sin(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$
b $g(x) = \cos(x^3)$ geeft $g'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2\sin(x^3)$
c $h(x) = \cos^2(2x)$ geeft $h'(x) = 2\cos(2x) \cdot -\sin(2x) \cdot 2 = -4\sin(2x)\cos(2x)$
d $j(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ geeft $j'(x) = 2\cos(x) \cdot -\sin(x) - 2\sin(x) \cdot \cos(x) = -4\sin(x)\cos(x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

79 **a** $f(x)=\sin^3(x)+\sin(x)$ geeft

$f'(x)=3\sin^2(x)\cos(x)+\cos(x)=3\cdot(1-\cos^2(x))\cos(x)+\cos(x)$
$=3\cos(x)-3\cos^3(x)+\cos(x)=4\cos(x)-3\cos^3(x)$

b $g(x)=\sin^2(x)\cos(x)$ geeft

$g'(x)=2\sin(x)\cos(x)\cdot\cos(x)+\sin^2(x)\cdot{-\sin(x)}=2\sin(x)\cos^2(x)-\sin^3(x)$
$=2\sin(x)\cdot(1-\sin^2(x))-\sin^3(x)=2\sin(x)-2\sin^3(x)-\sin^3(x)=2\sin(x)-3\sin^3(x)$

c $h(x)=\dfrac{\tan(x)}{\sin(x)}=\dfrac{\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)}{\sin(x)}=\dfrac{1}{\cos(x)}$ geeft $h'(x)=\dfrac{\cos(x)\cdot 0-1\cdot{-\sin(x)}}{\cos^2(x)}=\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

80 $f(x)=x\sin^2(x)$ geeft $f'(x)=1\cdot\sin^2(x)+x\cdot 2\sin(x)\cos(x)=\sin^2(x)+2x\sin(x)\cos(x)$

Stel k: $y=ax+b$.

$a=f'\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi\right)+2\cdot\frac{3}{4}\pi\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+1\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\pi$

$$\left.\begin{array}{l} y=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\pi\right)x+b \\ f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{3}{4}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2=\frac{3}{8}\pi \text{ dus } A\left(\frac{3}{4}\pi,\frac{3}{8}\pi\right)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\pi\right)\cdot\frac{3}{4}\pi+b=\frac{3}{8}\pi \\ \frac{3}{8}\pi-\frac{9}{16}\pi^2+b=\frac{3}{8}\pi \\ b=\frac{9}{16}\pi^2\end{array}$$

Dus k: $y=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\pi\right)x+\frac{9}{16}\pi^2$.

81 $f(x)=\cos^3(x)$ geeft $f'(x)=3\cos^2(x)\cdot{-\sin(x)}=-3\sin(x)\cos^2(x)$

$f'(x)=0$ geeft $-3\sin(x)\cos^2(x)=0$
$\sin(x)=0 \vee \cos(x)=0$
$x=k\cdot\pi \vee x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$

x op $[0,2\pi]$ geeft $x=0 \vee x=\frac{1}{2}\pi \vee x=\pi \vee x=1\frac{1}{2}\pi \vee x=2\pi$

De punten zijn $(0,1)$, $\left(\frac{1}{2}\pi,0\right)$, $(\pi,-1)$, $\left(1\frac{1}{2}\pi,0\right)$ en $(2\pi,1)$.

82 **a** $f(x)=\dfrac{3\cos(x)}{2-\sin(x)}$ geeft

$f'(x)=\dfrac{(2-\sin(x))\cdot{-3\sin(x)}-3\cos(x)\cdot{-\cos(x)}}{(2-\sin(x))^2}=\dfrac{-6\sin(x)+3\sin^2(x)+3\cos^2(x)}{(2-\sin(x))^2}=\dfrac{-6\sin(x)+3}{(2-\sin(x))^2}$

$f(x)=0$ geeft $3\cos(x)=0$
$\cos(x)=0$
$x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$

x op $[0,2\pi]$ geeft $x=\frac{1}{2}\pi \vee x=1\frac{1}{2}\pi$

De bijbehorende punten zijn $\left(\frac{1}{2}\pi,0\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi,0\right)$.

Stel k: $y=ax+b$.

$a=f'\left(\frac{1}{2}\pi\right)=\dfrac{-6\cdot 1+3}{(2-1)^2}=\dfrac{-3}{1}=-3$

$$\left.\begin{array}{l} y=-3x+b \\ \text{door } \left(\frac{1}{2}\pi,0\right)\end{array}\right\}\begin{array}{l}-3\cdot\frac{1}{2}\pi+b=0 \\ b=1\frac{1}{2}\pi\end{array}$$

Dus k: $y=-3x+1\frac{1}{2}\pi$.

Stel l: $y=ax+b$.

$a=f'\left(1\frac{1}{2}\pi\right)=\dfrac{-6\cdot -1+3}{(2--1)^2}=\dfrac{9}{9}=1$

$$\left.\begin{array}{l} y=x+b \\ \text{door } \left(1\frac{1}{2}\pi,0\right)\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\frac{1}{2}\pi+b=0 \\ b=-1\frac{1}{2}\pi\end{array}$$

Dus l: $y=x-1\frac{1}{2}\pi$.

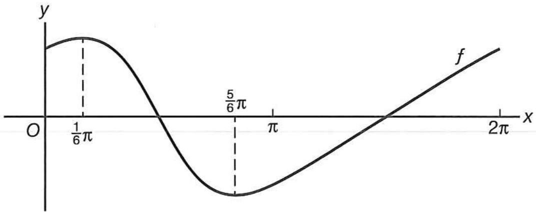
7

b $f'(x) = 0$ geeft $-6\sin(x) + 3 = 0$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$



max. is $f(\frac{1}{6}\pi) = \dfrac{3\cos(\frac{1}{6}\pi)}{2 - \sin(\frac{1}{6}\pi)} = \dfrac{3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

min. is $f(\frac{5}{6}\pi) = \dfrac{3\cos(\frac{5}{6}\pi)}{2 - \sin(\frac{5}{6}\pi)} = \dfrac{3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

Dus $B_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Diagnostische toets

Bladzijde 136

1 $x_P = -0{,}81$, dus $\cos(\alpha_P) = -0{,}81$.
De GR geeft $\cos^{-1}(-0{,}81) = 144{,}095...°$, dus $\alpha_P = 144{,}095...°$.
$y_Q = -0{,}95$, dus $\sin(\alpha_Q) = -0{,}95$.
De GR geeft $\sin^{-1}(-0{,}95) = -71{,}805...°$, dus $\alpha_Q = 360° - 71{,}805...° = 288{,}194...°$.
$\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P = 288{,}194...° - 144{,}095...° = 144{,}098...° \approx 144{,}1°$

2 **a** 10π rad $= 10 \cdot 180° = 1800°$
b $\frac{2}{3}\pi$ rad $= \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$
c $\frac{2}{3}$ rad $= \frac{2}{3} \cdot \dfrac{180°}{\pi} \approx 38{,}2°$

3 **a** $60° = \dfrac{60}{180} \cdot \pi\,\text{rad} = \frac{1}{3}\pi\,\text{rad}$
b $-150° = \dfrac{-150}{180} \cdot \pi\,\text{rad} = -\frac{5}{6}\pi\,\text{rad}$
c $390° = \dfrac{390}{180} \cdot \pi\,\text{rad} = 2\frac{1}{6}\pi\,\text{rad}$

4 **a** $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$
b $\cos(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c $\cos(1\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$

5 **a** $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$
$\alpha = \frac{1}{6}\pi \vee \alpha = \frac{5}{6}\pi$
b $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\alpha = 1\frac{1}{4}\pi \vee \alpha = 1\frac{3}{4}\pi$
c $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\alpha = \frac{1}{6}\pi \vee \alpha = 1\frac{5}{6}\pi$

6 **a** $\sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = 0$
$2x + \frac{1}{2}\pi = k \cdot \pi$
$2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
b $\cos(2x + \frac{1}{6}\pi) = 1$
$2x + \frac{1}{6}\pi = k \cdot 2\pi$
$2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$
c $\sin^2(\frac{1}{2}x) - \sin(\frac{1}{2}x) = 0$
$\sin(\frac{1}{2}x) \cdot (\sin(\frac{1}{2}x) - 1) = 0$
$\sin(\frac{1}{2}x) = 0 \vee \sin(\frac{1}{2}x) = 1$
$\frac{1}{2}x = k \cdot \pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 4\pi$

7 **a** $\sin(\frac{1}{2}x + \pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}x + \pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x + \pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$
b $\cos(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$-\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee -\frac{1}{3}x = -1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 6\pi \vee x = 3\frac{1}{2}\pi + k \cdot 6\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $4\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = 3$
$\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \frac{3}{4}$
$\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} \vee \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = -\sqrt{\frac{3}{4}}$
$\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = -\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = -\frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{3} + k\cdot 4 \vee x = -\frac{1}{3} + k\cdot 4 \vee x = 1\frac{2}{3} + k\cdot 4 \vee x = -1\frac{2}{3} + k\cdot 4$
Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x = \frac{1}{3} + k\cdot 2 \vee x = -\frac{1}{3} + k\cdot 2$.

8 **a** $2\sin(2x) = -\sqrt{3}$
$\sin(2x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$2x = -\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = -\frac{1}{6}\pi + k\cdot\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k\cdot\pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$

b $2\cos\left(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\sqrt{2}$
$\cos\left(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$1\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi = \frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi \vee 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi$
$1\frac{1}{2}x = \frac{11}{12}\pi + k\cdot 2\pi \vee 1\frac{1}{2}x = -\frac{7}{12}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = \frac{11}{18}\pi + k\cdot 1\frac{1}{3}\pi \vee x = -\frac{7}{18}\pi + k\cdot 1\frac{1}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{11}{18}\pi \vee x = 1\frac{17}{18}\pi \vee x = \frac{17}{18}\pi$

c $\sin^2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$
$(\sin(x) - 1)\cdot\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right) = 0$

$\sin(x) = 1 \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi$

9 **a** $\sin(2x - 1) = \sin(x + 2)$
$2x - 1 = x + 2 + k\cdot 2\pi \vee 2x - 1 = \pi - (x + 2) + k\cdot 2\pi$
$x = 3 + k\cdot 2\pi \vee 2x - 1 = \pi - x - 2 + k\cdot 2\pi$
$x = 3 + k\cdot 2\pi \vee 3x = -1 + \pi + k\cdot 2\pi$
$x = 3 + k\cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$

b $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$
$x + \frac{1}{3}\pi = 2x - \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{3}\pi = -\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) + k\cdot 2\pi$
$-x = -\frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{3}\pi = -2x + \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{18}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$

c $\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \sin(\pi(x + 1))$
$\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \sin(\pi x + \pi)$
$\frac{1}{2}\pi x = \pi x + \pi + k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = \pi - (\pi x + \pi) + k\cdot 2\pi$
$-\frac{1}{2}\pi x = \pi + k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = -\pi x + k\cdot 2\pi$
$x = -2 + k\cdot 4 \vee 1\frac{1}{2}\pi x = k\cdot 2\pi$
$x = -2 + k\cdot 4 \vee x = k\cdot 1\frac{1}{3}$

10 **a** $y = \sin(x)$
$\downarrow$ translatie $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$
$y = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{3}$
$y = \sin\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right)$
$\downarrow$ verm. x-as, 2
$f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right)$

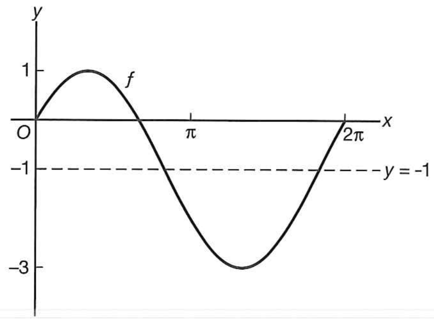
7

b $y = \cos(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, 3
$y = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$
$\downarrow$ translatie $(-2, 5)$
$g(x) = 5 + \cos\left(\frac{1}{3}(x + 2)\right)$

c $y = \sin(x)$
$\downarrow$ translatie $\left(\frac{1}{4}\pi, 0\right)$
$y = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{3}$
$y = \sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)$
$\downarrow$ verm. x-as, 2
$y = 2\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)$
$\downarrow$ translatie $(0, 1)$
$h(x) = 1 + 2\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)$

Bladzijde 137

11 **a** Voer in $y_1 = -1 + 2\cos(x - \frac{1}{3}\pi)$.



b $f(x) = -1$ geeft $-1 + 2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -1$
$2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$
$\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$
$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$
Dus $\left(\frac{5}{6}\pi, -1\right)$ en $\left(1\frac{5}{6}\pi, -1\right)$.

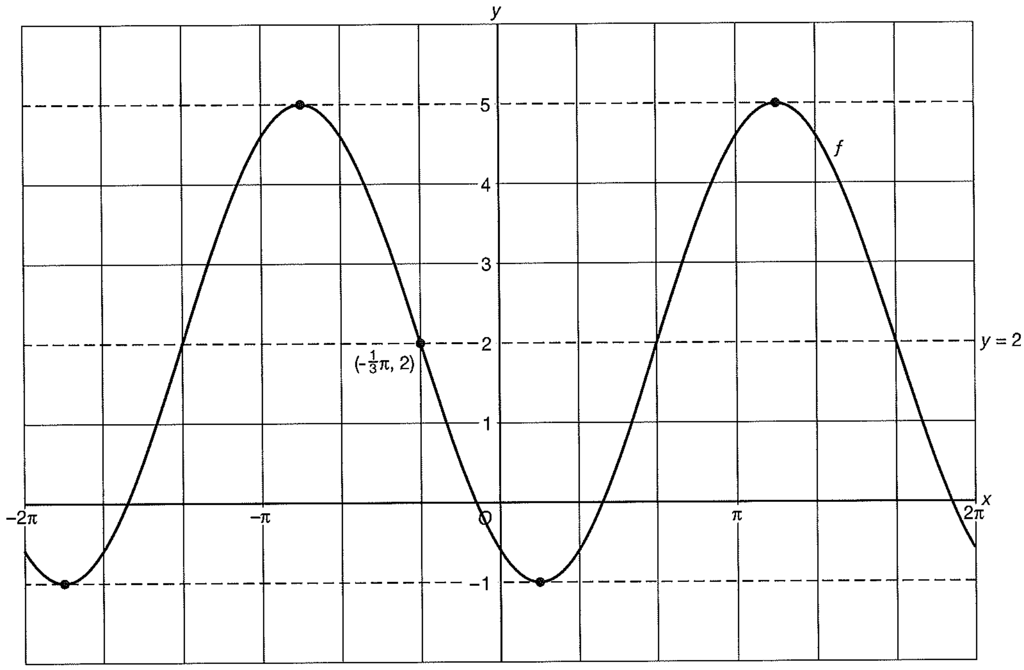
c $y = 2\cos(x)$ heeft toppen $(0, 2)$ en $(\pi, -2)$ dus de toppen van de grafiek van f zijn $\left(\frac{1}{3}\pi, 1\right)$ en $\left(1\frac{1}{3}\pi, -3\right)$.

d $f(x) = 0$ geeft $-1 + 2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$
$2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$
$\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$
$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot 2\pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 0 \vee x = 2\pi$
De nulpunten zijn 0, $\frac{2}{3}\pi$ en 2π.

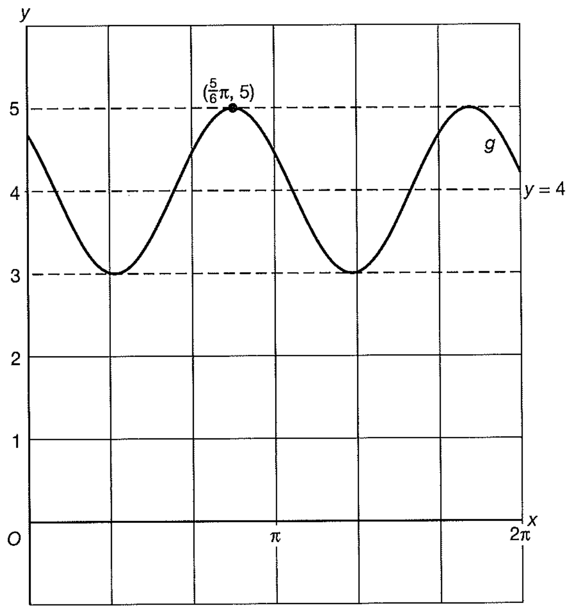
12 **a** $-\cos\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(3x - \frac{1}{4}\pi + \pi\right) = \cos\left(3x + \frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(3x + \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(3x + 1\frac{1}{4}\pi\right)$
b $(\sin(x) + \cos(x))^2 = \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$
c $2 + \cos(x) - 2\sin^2(x) = 2 + \cos(x) - 2(1 - \cos^2(x)) = 2 + \cos(x) - 2 + 2\cos^2(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

13 **a** evenwichtsstand 2
amplitude 3
periode 2π
$-3 < 0$, dus grafiek dalend door het punt $\left(-\frac{1}{3}\pi, 2\right)$.



b $g(x) = 4 + \cos\left(2x - 1\frac{2}{3}\pi\right) = 4 + \cos\left(2\left(x - \frac{5}{6}\pi\right)\right)$
evenwichtsstand 4
amplitude 1
periode $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$
$1 > 0$, dus $\left(\frac{5}{6}\pi, 5\right)$ is een hoogste punt.



14 **a** $a = \text{evenwichtsstand} = \dfrac{10 + -30}{2} = -10$
$b = \text{amplitude} = 10 - -10 = 20$
$c = \dfrac{2\pi}{\text{periode}} = \dfrac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$
$y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b > 0$
Stijgend door de evenwichtsstand voor $x = 10$, dus $d = 10$.
$y = -10 + 20\sin\left(\frac{1}{15}\pi(x - 10)\right)$

b $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b > 0$
Een hoogste punt is $\left(17\tfrac{1}{2}, 10\right)$, dus $d = 17\tfrac{1}{2}$ en de formule is $y = -10 + 20\cos\left(\tfrac{1}{15}\pi\left(x - 17\tfrac{1}{2}\right)\right)$.

c $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$
Dalend door de evenwichtsstand voor $x = 25$, dus $d = 25$.
$y = -10 - 20\sin\left(\tfrac{1}{15}\pi\left(x - 25\right)\right)$

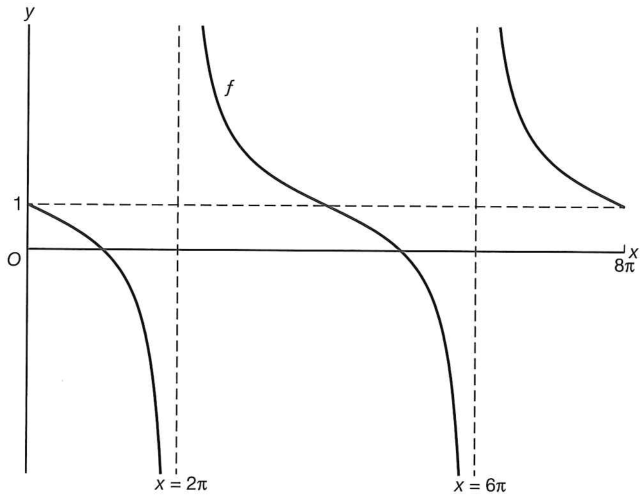
d $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b < 0$
Een laagste punt is $\left(2\tfrac{1}{2}, -30\right)$, dus $d = 2\tfrac{1}{2}$ en de formule is $y = -10 - 20\cos\left(\tfrac{1}{15}\pi\left(x - 2\tfrac{1}{2}\right)\right)$.

15 **a** beginpunt $(0, 1)$

periode $= \dfrac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$

De grafiek heeft de verticale asymptoten $x = 2\pi$ en $x = 6\pi$.

b



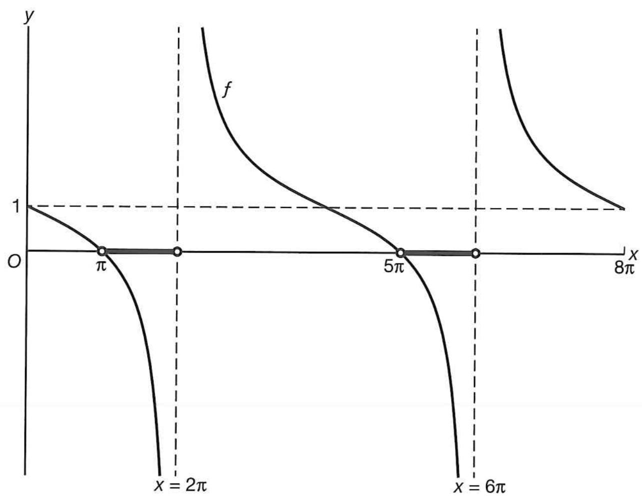
c $f(x) = 0$ geeft $1 - \tan\left(\tfrac{1}{4}x\right) = 0$

$\tan\left(\tfrac{1}{4}x\right) = 1$

$\tfrac{1}{4}x = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$x = \pi + k \cdot 4\pi$

x op $[0, 8\pi]$ geeft $x = \pi \vee x = 5\pi$



$f(x) < 0$ geeft $\pi < x < 2\pi \vee 5\pi < x < 6\pi$

16 **a** $2 + \sqrt{3} \cdot \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi x\right) = -1$

$\sqrt{3} \cdot \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi x\right) = -3$

$\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi x\right) = -\sqrt{3}$

$\tfrac{1}{4}\pi x = \tfrac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$

$x = 2\tfrac{2}{3} + k \cdot 4$

b $\tan\left(\tfrac{1}{3}x\right) = \tan\left(2x - \tfrac{1}{6}\pi\right)$

$\tfrac{1}{3}x = 2x - \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$

$x = 6x - \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 3\pi$

$-5x = -\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 3\pi$

$x = \tfrac{1}{10}\pi + k \cdot \tfrac{3}{5}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

17 **a** $f(x) = \cos\left(2\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)\right) + \sin(2x) = \cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) + \sin(2x)$ geeft

$f'(x) = -\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) \cdot 2 + \cos(2x) \cdot 2 = -2\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) + 2\cos(2x)$

b $f(x) = \tan(x^3)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x^3)} \cdot 3x^2 = \dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3)}$

c $f(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\sin(3x)}$ geeft $f'(x) = \dfrac{\sin(3x) \cdot -\sin(3x) \cdot 3 - \cos(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3}{\sin^2(3x)} = \dfrac{-3\sin^2(3x) - 3\cos^2(3x)}{\sin^2(3x)}$

$= \dfrac{-3(\sin^2(3x) + \cos^2(3x))}{\sin^2(3x)} = \dfrac{-3}{\sin^2(3x)}$

Alternatieve oplossing

$f(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\sin(3x)} = \dfrac{1}{\tan(3x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\tan(3x) \cdot 0 - 1 \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3}{\tan^2(3x)} = \frac{\left(\frac{-3}{\cos^2(3x)}\right)}{\tan^2(3x)} = \frac{\left(\frac{-3}{\cos^2(3x)}\right) \cdot \cos^2(3x)}{\frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)} \cdot \cos^2(3x)} = \frac{-3}{\sin^2(3x)}$$

d $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$ geeft

$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) + x^2 \cdot \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) \cdot 2 = 2x\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) + 2x^2\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$

e $f(x) = \sin^3(2x)$ geeft $f'(x) = 3\sin^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 6\sin^2(2x)\cos(2x)$

f $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 - \sin(x)}$ geeft

$f'(x) = \dfrac{(1 - \sin(x)) \cdot -\sin(x) - \cos(x) \cdot -\cos(x)}{(1 - \sin(x))^2} = \dfrac{-\sin(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x)}{(1 - \sin(x))^2}$

$= \dfrac{1 - \sin(x)}{(1 - \sin(x))^2} = \dfrac{1}{1 - \sin(x)}$

7

18 $f(x) = 3x\cos^2(x)$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \cos^2(x) + 3x \cdot 2\cos(x) \cdot -\sin(x) = 3\cos^2(x) - 6x\sin(x)\cos(x)$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(\pi) = 3\cos^2(\pi) - 6 \cdot \pi \cdot \sin(\pi)\cos(\pi) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot \pi \cdot 0 \cdot -1 = 3$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + b \\ f(\pi) = 3 \cdot \pi \cdot (-1)^2 = 3\pi, \text{ dus } A(\pi, 3\pi) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot \pi + b = 3\pi \\ b = 0 \end{array}$$

Dus k: $y = 3x$.

8 Meetkunde met coördinaten

Voorkennis Stelsels en kwadraatafsplitsen

Bladzijde 140

1 **a** $\begin{cases}5x-7y=1\\4x-3y=6\end{cases}\left|\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\right|$ geeft $\begin{cases}20x-28y=4\\20x-15y=30\end{cases}$ $-$

$$\begin{aligned}-13y&=-26\\ \left.\begin{aligned}y&=2\\5x-7y&=1\end{aligned}\right\}\quad &5x-7\cdot 2=1\\ &5x-14=1\\ &5x=15\\ &x=3\end{aligned}$$

De oplossing is $(x,y)=(3,2)$.

b $\begin{cases}2x+3y=15\\10x-9y=-5\end{cases}\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right|$ geeft $\begin{cases}6x+9y=45\\10x-9y=-5\end{cases}$ $+$

$$\begin{aligned}16x\quad&=40\\ \left.\begin{aligned}x&=2\tfrac{1}{2}\\2x+3y&=15\end{aligned}\right\}\quad &2\cdot 2\tfrac{1}{2}+3y=15\\ &5x+3y=15\\ &3y=10\\ &y=3\tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

De oplossing is $(x,y)=\left(2\tfrac{1}{2},3\tfrac{1}{3}\right)$.

c $\begin{cases}2x-5y=16\\3x+4y=10\end{cases}\left|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right|$ geeft $\begin{cases}6x-15y=48\\6x+\ \,8y=20\end{cases}$ $-$

$$\begin{aligned}-23y&=28\\ \left.\begin{aligned}y&=-1\tfrac{5}{23}\\2x-5y&=16\end{aligned}\right\}\quad &2x-5\cdot -1\tfrac{5}{23}=16\\ &2x+6\tfrac{2}{23}=16\\ &2x=9\tfrac{21}{23}\\ &x=4\tfrac{22}{23}\end{aligned}$$

De oplossing is $(x,y)=\left(4\tfrac{22}{23},-1\tfrac{5}{23}\right)$.

Bladzijde 141

2 **a**
$x^2+y^2-4x+10y-6=0$
$x^2-4x+y^2+10y-6=0$
$(x-2)^2-4+(y+5)^2-25-6=0$
$(x-2)^2+(y+5)^2=35$

b
$x^2+y^2+8x-6y+13=0$
$x^2+8x+y^2-6y+13=0$
$(x+4)^2-16+(y-3)^2-9+13=0$
$(x+4)^2+(y-3)^2=12$

c
$x^2+y^2+3x-y-1=0$
$x^2+3x+y^2-y-1=0$
$\left(x+1\tfrac{1}{2}\right)^2-2\tfrac{1}{4}+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}-1=0$
$\left(x+1\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2=3\tfrac{1}{2}$

d
$x^2+y^2-5x+5y+10=0$
$x^2-5x+y^2+5y+10=0$
$\left(x-2\tfrac{1}{2}\right)^2-6\tfrac{1}{4}+\left(y+2\tfrac{1}{2}\right)^2-6\tfrac{1}{4}+10=0$
$(x-2\tfrac{1}{2})^2+(y+2\tfrac{1}{2})^2=2\tfrac{1}{2}$

8.1 Lijnen en hoeken

Bladzijde 142

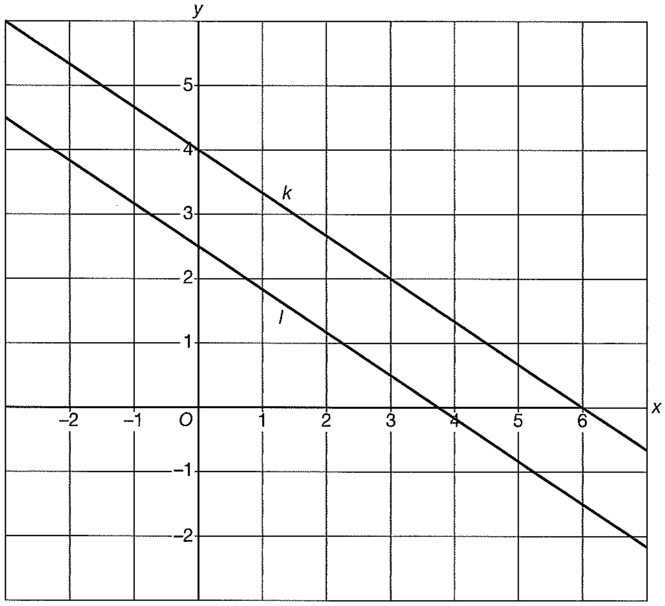
1 **a** k:

x	0	6
y	4	0

l:

x	0	$3\tfrac{3}{4}$
y	$2\tfrac{1}{2}$	0

© Noordhoff Uitgevers bv



b De lijnen k en l zijn evenwijdig en vallen niet samen, dus hebben geen enkel punt gemeenschappelijk. Dus het stelsel vergelijkingen heeft geen oplossingen.

c $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 15 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{geeft} \begin{cases} 4x + 6y = 24 \\ 4x + 6y = 15 \end{cases}$

Omdat de vergelijkingen zo te schrijven zijn dat de linkerleden van beide vergelijkingen gelijk zijn, zijn de lijnen evenwijdig.

Dit kan ook door te controleren dat $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

Bladzijde 143

2 **a** $k_p \,//\, l_{p,q}$, dus $\frac{3}{p-1} = \frac{p}{p+4}$

$$\begin{aligned} &p(p-1) = 3(p+4) \\ &p^2 - p = 3p + 12 \\ &p^2 - 4p - 12 = 0 \\ &(p+2)(p-6) = 0 \\ &p = -2 \vee p = 6 \\ &\text{vold.} \quad\quad \text{vold.} \end{aligned}$$

Dus voor $p = 6$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ of voor $p = -2$ en q elk getal van $\mathbb{R}$.

b $p = 6$ geeft k_p: $3x + 6y = 5$ en $l_{p,q}$: $5x + 10y = q$.

Voor samenvallen geldt $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{5}{q}$ ofwel $3q = 25$, dus $q = 8\frac{1}{3}$.

$p = -2$ geeft k_p: $3x - 2y = 5$ en $l_{p,q}$: $-3x + 2y = q$.

Voor samenvallen geldt $\frac{3}{-3} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{q}$ ofwel $3q = -15$, dus $q = -5$.

Dus voor $(p, q) = \left(6, 8\frac{1}{3}\right)$ en $(p, q) = (-2, -5)$.

3 Voor samenvallen geldt $\frac{p}{q+3} = \frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$.

Kruiselings vermenigvuldigen bij $\frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$ geeft $q = 4p - 4$.

Kruiselings vermenigvuldigen bij $\frac{p}{q+3} = \frac{4}{1}$ geeft $p = 4q + 12$, dus $q = \frac{1}{4}p - 3$.

$$\left.\begin{aligned} q &= 4p - 4 \\ q &= \tfrac{1}{4}p - 3 \end{aligned}\right\} \; 4p - 4 = \tfrac{1}{4}p - 3$$

$$3\tfrac{3}{4}p = 1$$

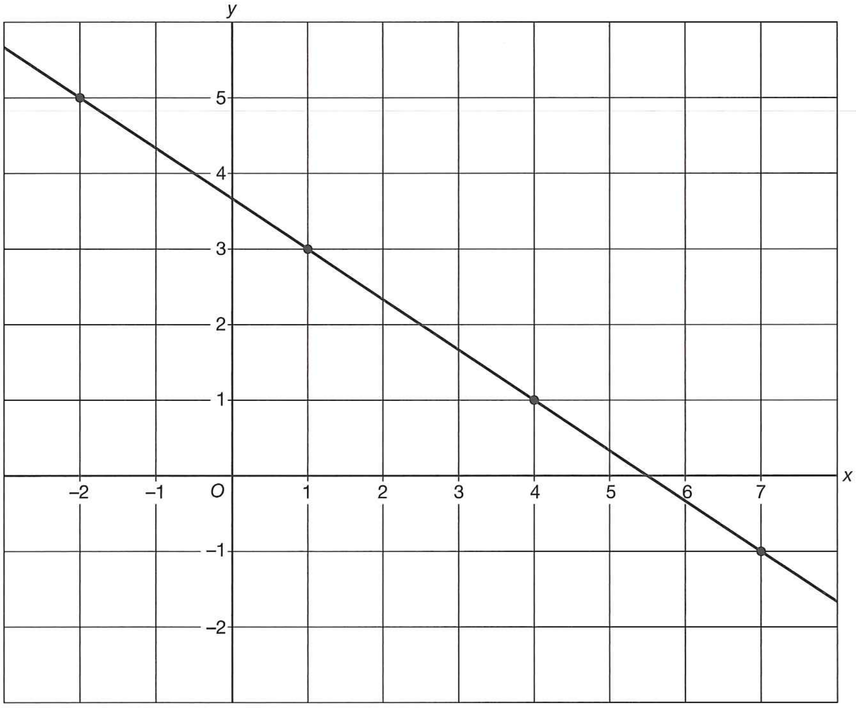
$$p = \tfrac{4}{15}$$

$p = \frac{4}{15}$ geeft $q = 4 \cdot \frac{4}{15} - 4 = -2\frac{14}{15}$

Dus $p = \frac{4}{15}$ en $q = -2\frac{14}{15}$.

4 **a**

t	-2	-1	0	1
x	-2	1	4	7
y	5	3	1	-1



b $\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = -2t + 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x = 6t + 8 \\ 3y = -6t + 3 \end{cases}$
$\overline{2x + 3y = 11}$ +

c Door t te elimineren krijg je de vergelijking van de lijn $2x + 3y = 11$,

dus $\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = -2t + 1 \end{cases}$ stelt een lijn voor.

Bladzijde 144

5 Vrijmaken van t in $x = at + c$ geeft $at = x - c$, dus $t = \frac{x}{a} - \frac{c}{a}$.

Substitutie van $t = \frac{x}{a} - \frac{c}{a}$ in $y = bt + d$ geeft $y = b \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{c}{a}\right) + d$

$$y = \frac{b}{a} \cdot x - \frac{bc}{a} + d$$

Dus de richtingscoëfficiënt van de lijn is $\frac{b}{a}$.

6 **a** $\begin{cases} x = 5t + p \\ y = 4t + 3 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x = 20t + 4p \\ 5y = 20t + 15 \end{cases}$
$\overline{4x - 5y = 4p - 15}$ −

$\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = 4p - 15 \\ 4x - 5y = -10 \end{array}\right\}$ $4p - 15 = -10$

$4p = 5$

$p = 1\frac{1}{4}$

Alternatieve oplossing

Kies een punt op $4x - 5y = -10$, bijvoorbeeld (0, 2).

Hieruit volgt $\begin{cases} 0 = 5t + p \\ 2 = 4t + 3 \end{cases}$

$2 = 4t + 3$ geeft $4t = -1$, dus $t = -\frac{1}{4}$.

Dus $0 = 5 \cdot -\frac{1}{4} + p$ geeft $p = 1\frac{1}{4}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b (5, 2) invullen in $x = 2t + p$ en $y = -t - 2p$ geeft

$$\begin{cases} 5 = 2t + p \\ 2 = -t - 2p \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 5 = 2t + p \\ 4 = -2t - 4p \end{cases}$$
$$\underline{} +$$
$$9 = -3p$$
$$p = -3$$

c $\begin{cases} x = 3t + p \\ y = 2t + 3 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x = 6t + 2p \\ 3y = 6t + 9 \end{cases}$ $-$

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 2p - 9 \\ 2x - 3y &= p \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 2p - 9 &= p \\ p &= 9 \end{aligned}$$

7 **a** $\begin{cases} x = at - 3 \\ y = bt + 1 \end{cases} \begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} bx = abt - 3b \\ ay = abt + a \end{cases}$ $-$

$$\left.\begin{aligned} &bx - ay = -3b - a \\ &\text{door } (3, 4) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 3b - 4a &= -3b - a \\ 6b &= 3a \\ 2b &= a \end{aligned}$$

Dus kies bijvoorbeeld $b = 1$, dan is $a = 2$ $\left.\begin{aligned} & \\ &bx - ay = -3b - a \end{aligned}\right\}$ k: $x - 2y = -5$

Omdat geldt dat $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{5}$ vallen k en l niet samen en snijden elkaar in (3, 4).

$$\left.\begin{aligned} &l\text{: } 2x + 5y = c \\ &\text{door } (3, 4) \end{aligned}\right\} c = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 26$$

Dus mogelijke waarden zijn $a = 2$, $b = 1$ en $c = 26$.

b k: $bx - ay = -3b - a$ en l: $2x + 5y = c$ vallen samen als geldt $\frac{b}{2} = \frac{-a}{5} = \frac{-3b - a}{c}$.

Uit $\frac{b}{2} = \frac{-a}{5}$ volgt dat $5b = -2a$. Kies bijvoorbeeld $a = 5$, dus $b = -2$.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{-a}{5} = \frac{-3b - a}{c} \\ &a = 5 \text{ en } b = -2 \end{aligned}\right\} \text{ geeft } \begin{aligned} \frac{-5}{5} &= \frac{-3 \cdot -2 - 5}{c} \\ \frac{-5}{5} &= \frac{1}{c} \\ c &= -1 \end{aligned}$$

Dus mogelijke waarden zijn $a = 5$, $b = -2$ en $c = -1$.

Bladzijde 145

8 **a** $y = 0$ geeft $2x = 18$
$x = 9$
Dus het snijpunt met de x-as is (9, 0).
$x = 0$ geeft $3y = 18$
$y = 6$
Dus het snijpunt met de y-as is (0, 6).

b $2x + 3y = 18$ links en rechts delen door 18 geeft $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$

c In de noemer van de breuk $\frac{x}{9}$ staat de x-coördinaat van het snijpunt met de x-as.

In de noemer van de breuk $\frac{y}{6}$ staat de y-coördinaat van het snijpunt met de y-as.

9 **a** $$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ &y = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \frac{x}{a} + 0 &= 1 \\ \frac{x}{a} &= 1 \\ x &= a \end{aligned}$$
Dus het snijpunt met de x-as is $(a, 0)$.

b $$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ &x = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 0 + \frac{y}{b} &= 1 \\ \frac{y}{b} &= 1 \\ y &= b \end{aligned}$$
Dus het snijpunt met de y-as is $(0, b)$.

8

Bladzijde 146

10 **a** $k: \frac{x}{4} + \frac{y}{-7} = 1$

Dus k: $7x - 4y = 28$.

b $l: \frac{x}{2p} + \frac{y}{-p} = 1$

Dus l: $x - 2y = 2p$.

c $m: \frac{x}{q} + \frac{y}{5} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} 5x + qy = 5q \\ \text{door } (3, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 3 + q \cdot -1 = 5q \\ 15 - q = 5q \\ -6q = -15 \\ q = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

11 **a** $k: \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$

Dus k: $x - 2y = 2$.

$l: \frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$

Dus l: $3x - 5y = 15$.

b $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x - 5y = 15 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x - 6y = 6 \\ 3x - 5y = 15 \end{cases}$

$$-y = -9 \quad -$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 9 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - 2 \cdot 9 = 2 \\ x - 18 = 2 \\ x = 20 \end{array}$$

Dus het snijpunt is (20, 9).

12 **a** $l: \frac{x}{p} + \frac{y}{5} = 1$

Dus l: $5x + py = 5p$.

b $m: \frac{x}{4} + \frac{y}{q} = 1$

Dus m: $qx + 4y = 4q$.

c $n: \frac{x}{3r} + \frac{y}{r} = 1$

Dus n: $x + 3y = 3r$.

13 **a** $k: \frac{x}{p} + \frac{y}{8} = 1$

Dus k: $8x + py = 8p$.

b $$\left.\begin{array}{l} 8x + py = 8p \\ \text{door } (1, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 1 + p \cdot 2 = 8p \\ 8 + 2p = 8p \\ -6p = -8 \\ p = 1\frac{1}{3} \end{array}$$

c k: $8x + py = 8p$ geeft $py = -8x + 8p$

$$y = -\frac{8}{p}x + 8$$

$k // l$ geeft $rc_k = rc_l$

$$-\frac{8}{p} = 2$$

$$2p = -8$$

$$p = -4$$

Bladzijde 147

14 **a** $k: \frac{x}{3} + \frac{y}{p} = 1$

Dus k: $px + 3y = 3p$.

$l: \frac{x}{2p} + \frac{y}{5} = 1$

Dus l: $5x + 2py = 10p$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\left.\begin{array}{l} k: px + 3y = 3p \\ \text{door } A(1,2) \end{array}\right\}$ $p \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3p$
$p + 6 = 3p$
$-2p = -6$
$p = 3$

$\left.\begin{array}{l} l: 5x + 2py = 10p \\ \text{door } A(1,2) \end{array}\right\}$ $5 \cdot 1 + 2p \cdot 2 = 10p$
$5 + 4p = 10p$
$-6p = -5$
$p = \frac{5}{6}$

c $k: px + 3y = 3p$ geeft $3y = -px + 3p$
$y = -\frac{1}{3}px + p$

$k // m$ geeft $rc_k = rc_m$
$-\frac{1}{3}p = 4$
$p = -12$

d $l // n$ geeft $\frac{5}{2} = \frac{2p}{3}$
$4p = 15$
$p = 3\frac{3}{4}$

15 **a** Alle lijnen met vergelijking $y = ax + 3$ hebben een richtingscoëfficiënt. Jan mist dus lijnen zonder richtingscoëfficiënt, ofwel verticale lijnen.
Dus Jan mist de y-as.
Voor elke $p \neq 0$ zit er een term met x in de vergelijking $\frac{x}{p} + \frac{y}{3} = 1$. Harm mist dus de horizontale lijn $y = 3$. Verder mag p geen 0 zijn, dus Harm mist ook de verticale lijn $x = 0$ ofwel de y-as.
b Je mist de lijn $x = 4$.
c Je mist de lijnen $y = 0$ en $x = 4$.

16 **a** $\left.\begin{array}{l} px + 2y = 8 \\ \text{door } (3,5) \end{array}\right\}$ $p \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 8$
$3p + 10 = 8$
$3p = -2$
$p = -\frac{2}{3}$

b $\left.\begin{array}{l} px + 2y = 8 \\ \text{door } (3,0) \end{array}\right\}$ $p \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 8$
$3p = 8$
$p = 2\frac{2}{3}$

c $3x + 5y = 10$ evenwijdig met k_p geeft $\frac{3}{p} = \frac{5}{2}$
$5p = 6$
$p = 1\frac{1}{5}$

d $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ geeft $5x + 2y = 10$
$5x + 2y = 10$ evenwijdig met k_p geeft $\frac{5}{p} = \frac{2}{2}$, dus $p = 5$.

17 **a** $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1 \\ \text{door } (3,4) \end{array}\right\}$ $\frac{3}{p} + \frac{4}{p+2} = 1$
$\frac{3(p+2)}{p(p+2)} + \frac{4p}{p(p+2)} = 1$
$\frac{3p + 6 + 4p}{p(p+2)} = 1$
$\frac{7p + 6}{p^2 + 2p} = 1$
$p^2 + 2p = 7p + 6$
$p^2 - 5p - 6 = 0$
$(p + 1)(p - 6) = 0$
$p = -1 \vee p = 6$

8

b $\frac{x}{p}+\frac{y}{p+2}=1$

$(p+2)x+py=p(p+2)$
$py=-(p+2)x+p(p+2)$
$y=-\frac{p+2}{p}\cdot x+p+2$

rc = 2 geeft $-\frac{p+2}{p}=2$
$p+2=-2p$
$3p=-2$
$p=-\frac{2}{3}$

Bladzijde 148

18 **a** $\tan(\angle CAB)=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{1}=2$
$\angle CAB\approx 63{,}435°$

b De tangens van de hoek tussen l en m is $\frac{1}{4}$.
Dit geeft dat de hoek ongeveer gelijk is aan 14,036°.

c De hoek tussen k en m is 63,4349...° + 14,0362...° ≈ 77,5°.

Bladzijde 149

19 Als de eenheden langs de assen verschillend zijn, dan maakt bijvoorbeeld de lijn $y=x$ geen hoek van 45° met de x-as, maar is elke hoek afhankelijk van de keuze van de eenheden.

Bladzijde 150

20 **a** $y=3x+4$, dus $\text{rc}_k=3$.
$\tan(\alpha)=3$ geeft $\alpha=71{,}56...°$
$y=2x-1$, dus $\text{rc}_l=2$.
$\tan(\beta)=2$ geeft $\beta=63{,}43...°$
$\alpha-\beta=71{,}56...°-63{,}43...°\approx 8°$
De gevraagde hoek is 8°.

b $y=1\frac{1}{2}x+2$, dus $\text{rc}_m=1\frac{1}{2}$.
$\tan(\alpha)=1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha=56{,}30...°$
$y=-\frac{1}{2}x+3$, dus $\text{rc}_n=-\frac{1}{2}$.
$\tan(\beta)=-\frac{1}{2}$ geeft $\beta=-26{,}56...°$
$\alpha-\beta=56{,}30...°--26{,}56...°\approx 83°$
De gevraagde hoek is 83°.

c $y=3\frac{1}{2}x-1$, dus $\text{rc}_p=3\frac{1}{2}$.
$\tan(\alpha)=3\frac{1}{2}$ geeft $\alpha=74{,}05...°$
$y=-1\frac{1}{4}x+5$, dus $\text{rc}_q=-1\frac{1}{4}$.
$\tan(\beta)=-1\frac{1}{4}$ geeft $\beta=-51{,}34...°$
$\alpha-\beta=74{,}05...°--51{,}34...°=125{,}39...°$
De gevraagde hoek is $180°-125{,}39...°\approx 55°$.

21 **a** $3x-2y=5$
$-2y=-3x+5$
$y=1\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_k=1\frac{1}{2}$.
$\tan(\alpha)=1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha=56{,}30...°$
$4x-3y=6$
$-3y=-4x+6$
$y=1\frac{1}{3}x-2$, dus $\text{rc}_l=1\frac{1}{3}$.
$\tan(\beta)=1\frac{1}{3}$ geeft $\beta=53{,}13...°$
$\alpha-\beta=56{,}30...°-53{,}13...°\approx 3{,}2°$
De gevraagde hoek is 3,2°.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $4x + y = 1$
$y = -4x + 1$, dus $rc_m = -4$.
$\tan(\alpha) = -4$ geeft $\alpha = -75{,}96...°$
$3x + 4y = 2$
$4y = -3x + 2$
$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$, dus $rc_n = -\frac{3}{4}$.
$\tan(\beta) = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36{,}86...°$
$\beta - \alpha = -36{,}86...° - -75{,}96...° \approx 39{,}1°$
De gevraagde hoek is 39,1°.

c $5x + 3y = 4$
$3y = -5x + 4$
$y = -1\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$, dus $rc_p = -1\frac{2}{3}$.
$\tan(\alpha) = -1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -59{,}03...°$
$6x - 5y = 1$
$-5y = -6x + 1$
$y = 1\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$, dus $rc_q = 1\frac{1}{5}$.
$\tan(\beta) = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50{,}19...°$
$\beta - \alpha = 50{,}19...° - -59{,}03...° = 109{,}23...°$
De gevraagde hoek is $180° - 109{,}23...° \approx 70{,}8°$.

22 **a** $k: y = \frac{2}{3}x + 4$
$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33{,}69...°$
$6x - 5y = 3$
$-5y = -6x + 3$
$y = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$, dus $rc_l = 1\frac{1}{5}$.
$\tan(\beta) = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50{,}19...°$
$\beta - \alpha = 50{,}19...° - 33{,}69...° \approx 16{,}5°$
De gevraagde hoek is 16,5°.

b $rc_m = \dfrac{5 - 0}{0 - 4} = -1\frac{1}{4}$
$\tan(\alpha) = -1\frac{1}{4}$ geeft $\alpha = -51{,}34...°$
$rc_n = \dfrac{1 - 0}{0 - -2} = \frac{1}{2}$
$\tan(\beta) = \frac{1}{2}$ geeft $\beta = 26{,}56...°$
$\beta - \alpha = 26{,}56...° - -51{,}34...° \approx 77{,}9°$
De gevraagde hoek is 77,9°.

c $rc_p = \dfrac{6 - 1}{5 - 2} = 1\frac{2}{3}$
$\tan(\alpha) = 1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 59{,}03...°$
$rc_q = \dfrac{-6 - 1}{2 - -3} = -1\frac{2}{5}$
$\tan(\beta) = -1\frac{2}{5}$ geeft $\beta = -54{,}46...°$
$\alpha - \beta = 59{,}03...° - -54{,}46...° = 113{,}49...°$
De gevraagde hoek is $180° - 113{,}49...° \approx 66{,}5°$.

8

8.2 Afstanden bij punten en lijnen

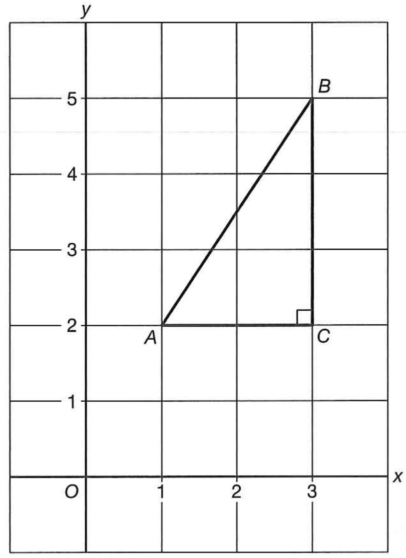
Bladzijde 152

23 **a** In $\triangle ABC$ is $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 2^2 + 3^2$

$AB^2 = 13$

$AB = \sqrt{13}$



b $M(2, 3\frac{1}{2})$

c $x_N = \dfrac{83 + 89}{2} = 86$ en $y_N = \dfrac{61 + 69}{2} = 65$, dus $N(86, 65)$.

Bladzijde 153

24 **a** $M(\frac{1}{2}(p + p + 2), \frac{1}{2}(3 + 2p))$

$M(p + 1, 1\frac{1}{2} + p)$

$M(p + 1, p + 1\frac{1}{2})$

b $d(A, B) = \sqrt{(p + 2 - p)^2 + (2p - 3)^2} = \sqrt{4 + 4p^2 - 12p + 9} = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$

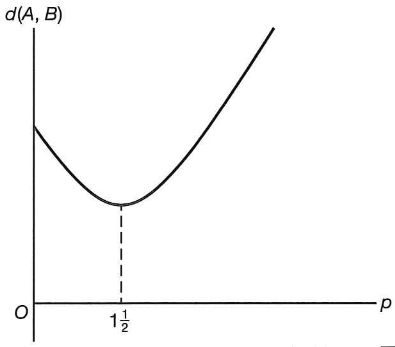
c $d(A, B) = d(p) = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$ geeft $d'(p) = \dfrac{1}{2\sqrt{4p^2 - 12p + 13}} \cdot (8p - 12) = \dfrac{4p - 6}{\sqrt{4p^2 - 12p + 13}}$

$d'(p) = 0$ geeft $4p - 6 = 0$

$4p = 6$

$p = 1\frac{1}{2}$

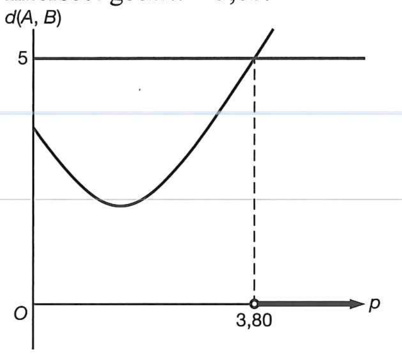
voldoet



De minimale afstand is $d(1\frac{1}{2}) = \sqrt{4 \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 12 \cdot 1\frac{1}{2} + 13} = \sqrt{4} = 2$.

d $y_1 = \sqrt{4x^2 - 12x + 13}$ en $y_2 = 5$.

Intersect geeft $x \approx 3{,}80$.



$d(A, B) > 5$ geeft $p > 3{,}80$

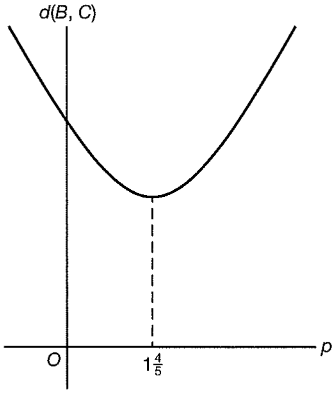
© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 154

25 **a** $d = \sqrt{(p+q-0)^2 + (q-p)^2} = \sqrt{(p+q)^2 + (q-p)^2} = \sqrt{p^2 + 2pq + q^2 + q^2 - 2pq + p^2} = \sqrt{2p^2 + 2q^2}$
b $q = 2p$ geeft $d = \sqrt{2p^2 + 2 \cdot (2p)^2} = \sqrt{2p^2 + 2 \cdot 4p^2} = \sqrt{10p^2} = p\sqrt{10}$
Dus $c = 10$.
c $q = \sqrt{p}$ en $d = 12$ geeft $\sqrt{2p^2 + 2(\sqrt{p})^2} = 12$
$\sqrt{2p^2 + 2p} = 12$
kwadrateren geeft
$2p^2 + 2p = 144$
$2p^2 + 2p - 144 = 0$
$p^2 + p - 72 = 0$
$(p-8)(p+9) = 0$
$p = 8 \vee p = -9$
vold. vold. niet
Dus $p = 8$.

26 **a** $M(\frac{1}{2}(3+p+5), \frac{1}{2}(4+p+2))$
$$\left.\begin{array}{l} M(\frac{1}{2}p+4, \frac{1}{2}p+3) \\ y = 2x - 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2(\frac{1}{2}p+4) - 3 = \frac{1}{2}p + 3 \\ p + 8 - 3 = \frac{1}{2}p + 3 \\ \frac{1}{2}p = -2 \\ p = -4 \end{array}$$

b $d = \sqrt{(p+5-3)^2 + (p+2-4)^2} = \sqrt{(p+2)^2 + (p-2)^2} = \sqrt{p^2 + 4p + 4 + p^2 - 4p + 4} = \sqrt{2p^2 + 8}$
Dus $a = 2$ en $b = 8$.
c $d(B, C) = d(p) = \sqrt{(2p - (p+5))^2 + (3p - (p+2))^2} = \sqrt{(p-5)^2 + (2p-2)^2}$
$= \sqrt{p^2 - 10p + 25 + 4p^2 - 8p + 4} = \sqrt{5p^2 - 18p + 29}$
geeft $d'(p) = \dfrac{1}{2\sqrt{5p^2 - 18p + 29}} \cdot (10p - 18) = \dfrac{5p - 9}{\sqrt{5p^2 - 18p + 29}}$
$d'(p) = 0$ geeft $5p - 9 = 0$
$5p = 9$
$p = 1\frac{4}{5}$
voldoet



De minimale afstand is $d(1\frac{4}{5}) = \sqrt{5 \cdot (1\frac{4}{5})^2 - 18 \cdot 1\frac{4}{5} + 29} = \sqrt{12\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

27 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 2$ geeft $\alpha = 63{,}434...°$
$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26{,}565...°$
$\alpha - \beta = 63{,}434° - -26{,}565...° = 90°$
De gevraagde hoek is 90°.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 155

28 **a** Stel k: $y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l} k \perp l\text{, dus } \mathrm{rc}_k \cdot \mathrm{rc}_l = -1 \\ \mathrm{rc}_l = 3 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \mathrm{rc}_k \cdot 3 = -1 \\ \mathrm{rc}_k = -\frac{1}{3}\text{, dus } a = -\frac{1}{3} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(6, 7) \end{array}\right\}\begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 7 \\ -2 + b = 7 \\ b = 9 \end{array}$

Dus k: $y = -\frac{1}{3}x + 9$.

b Stel m: $y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l} m \perp n\text{, dus } \mathrm{rc}_m \cdot \mathrm{rc}_n = -1 \\ \mathrm{rc}_n = \frac{1}{2} \end{array}\right\}\begin{array}{l} \mathrm{rc}_m \cdot \frac{1}{2} = -1 \\ \mathrm{rc}_m = -2\text{, dus } a = -2 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } B(-3, 4) \end{array}\right\}\begin{array}{l} -2 \cdot -3 + b = 4 \\ 6 + b = 4 \\ b = -2 \end{array}$

Dus m: $y = -2x - 2$.

c Stel p: $y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l} p \perp q\text{, dus } \mathrm{rc}_p \cdot \mathrm{rc}_q = -1 \\ \mathrm{rc}_q = -\frac{2}{7} \end{array}\right\}\begin{array}{l} \mathrm{rc}_p \cdot -\frac{2}{7} = -1 \\ \mathrm{rc}_p = 3\frac{1}{2}\text{, dus } a = 3\frac{1}{2} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = 3\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(2, -5) \end{array}\right\}\begin{array}{l} 3\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -5 \\ 7 + b = -5 \\ b = -12 \end{array}$

Dus p: $y = 3\frac{1}{2}x - 12$.

29 **a** $2x - 3y = 5$ geeft $-3y = -2x + 5$, dus $y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$.

$3x + 2y = c$ geeft $2y = -3x + c$, dus $y = -1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}c$.

$\mathrm{rc}_k \cdot \mathrm{rc}_l = \frac{2}{3} \cdot -1\frac{1}{2} = -1$, dus elke lijn van de vorm $3x + 2y = c$ staat loodrecht op k: $2x - 3y = 5$.

b $\left.\begin{array}{l} l\text{: } 3x + 2y = c \\ \text{door } A(4, 1) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14$

Dus l: $3x + 2y = 14$.

c $m \perp n$, dus m: $5x - 4y = c$.

$\left.\begin{array}{l} 5x - 4y = c \\ \text{door } B(3, -1) \end{array}\right\} c = 5 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 19$

Dus m: $5x - 4y = 19$.

30 y vrijmaken in $ax + by = c$ geeft $by = -ax + c$, dus $y = -\dfrac{a}{b} \cdot x + \dfrac{c}{b}$.

y vrijmaken in $bx - ay = d$ geeft $ay = bx - d$, dus $y = \dfrac{b}{a} \cdot x - \dfrac{d}{a}$.

$\mathrm{rc}_k \cdot \mathrm{rc}_l = -\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{a} = -1$, dus $k \perp l$.

31 **a** k: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 1$ geeft k: $5x + 3y = 15$

b $l \perp k$, dus l: $3x - 5y = c$.

$\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = c \\ \text{door } A(2, -4) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 2 - 5 \cdot -4 = 26$

Dus l: $3x - 5y = 26$.

c m: $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{2p} = 1$ geeft m: $2x + y = 2p$

$n \perp m$, dus n: $x - 2y = c$.

$\left.\begin{array}{l} x - 2y = c \\ \text{door } B(5, -3) \end{array}\right\} c = 5 - 2 \cdot -3 = 11$

Dus n: $x - 2y = 11$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 156

32 **a** Stel k: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{5-3}{7-2} = \frac{2}{5}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } A(2, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot 2 + b = 3 \\ \frac{4}{5} + b = 3 \\ b = 2\frac{1}{5} \end{array}$

Dus k: $y = \frac{2}{5}x + 2\frac{1}{5}$.

b Stel l: $y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l} l \perp k, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1 \\ rc_k = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot rc_l = -1 \\ rc_l = -2\frac{1}{2} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = -2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(4, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 6 \\ -10 + b = 6 \\ b = 16 \end{array}$

Dus l: $y = -2\frac{1}{2}x + 16$.

c Stel m: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{-5-4}{2--3} = -1\frac{4}{5}$.

$\left.\begin{array}{l} n \perp m, \text{ dus } rc_m \cdot rc_n = -1 \\ rc_m = -1\frac{4}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{4}{5} \cdot rc_n = -1 \\ rc_n = \frac{5}{9} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} n: y = \frac{5}{9}x + b \\ \text{door } F(3, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{5}{9} \cdot 3 + b = 7 \\ 1\frac{2}{3} + b = 7 \\ b = 5\frac{1}{3} \end{array}$

Dus n: $y = \frac{5}{9}x + 5\frac{1}{3}$.

33 **a** Stel k: $y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l} k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1 \\ rc_l = -\frac{3}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} rc_k \cdot -\frac{3}{5} = -1 \\ rc_k = 1\frac{2}{3} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(6, 15) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{2}{3} \cdot 6 + b = 15 \\ 10 + b = 15 \\ b = 5 \end{array}$

Dus k: $y = 1\frac{2}{3}x + 5$.

b $m \perp n$, dus m: $7x + 6y = c$.

$\left.\begin{array}{l} 7x + 6y = c \\ \text{door } B(2, -2) \end{array}\right\} c = 7 \cdot 2 + 6 \cdot -2 = 2$

Dus m: $7x + 6y = 2$.

c $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{3} = 1$ geeft $3x - 4y = -12$

p loodrecht op $3x - 4y = -12$, dus p: $4x + 3y = c$.

$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = c \\ \text{door } C(-5, 3) \end{array}\right\} c = 4 \cdot -5 + 3 \cdot 3 = -11$

Dus p: $4x + 3y = -11$.

d De lijn door $E(1, 5)$ en $F(5, -1)$ heeft richtingscoëfficiënt $\dfrac{-1-5}{5-1} = -1\frac{1}{2}$.

q staat loodrecht op deze lijn, dus $rc_q \cdot -1\frac{1}{2} = -1$ en dit geeft $rc_q = \frac{2}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Dus } q: y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } D(-6, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot -6 + b = 4 \\ -4 + b = 4 \\ b = 8 \end{array}$

Dus q: $y = \frac{2}{3}x + 8$.

34 $\text{rc}_k = \dfrac{3p - 0}{0 - 2p} = \dfrac{3p}{-2p} = -1\frac{1}{2}$

$\text{rc}_l = \dfrac{aq - 0}{0 - 3q} = \dfrac{aq}{-3q} = -\dfrac{a}{3}$

$k \perp l$ geeft $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$

$$-1\tfrac{1}{2} \cdot -\frac{a}{3} = -1$$
$$\tfrac{1}{2}a = -1$$
$$a = -2$$

35 **a** Stel l: $y = ax + b$.

$\left.\begin{array}{l} k \perp l \text{, dus } \text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1 \\ \text{rc}_k = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \text{rc}_l = -1 \\ \text{rc}_l = -2 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$

Dus l: $y = -2x + 5$.

k en l snijden geeft $\frac{1}{2}x = -2x + 5$

$$2\tfrac{1}{2}x = 5$$
$$x = 2$$

$x = 2$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, dus $B(2, 1)$.

b $d(A, B) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Dus de afstand van A tot k is $\sqrt{5}$.

Bladzijde 157

36 **a** De lijn p gaat door A en staat loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} \text{rc}_k \cdot \text{rc}_p = -1 \\ \text{rc}_k = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \text{rc}_p = -1 \\ \text{rc}_p = -2 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} p: y = -2x + b \\ \text{door } A(3, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 0 \\ -6 + b = 0 \\ b = 6 \end{array}$

Dus $p: y = -2x + 6$.

k en p snijden geeft $\frac{1}{2}x + 1 = -2x + 6$

$$2\tfrac{1}{2}x = 5$$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \\ y = 2 \end{array}$

Dus $C(2, 2)$.

$d(A, k) = d(A, C) = \sqrt{(2-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

b De lijn q gaat door B en staat loodrecht op l.

$\left.\begin{array}{l} q: x - 2y = c \\ B(6, 0) \end{array}\right\} c = 6 - 2 \cdot 0 = 6$

Dus $q: x - 2y = 6$.

q en l snijden geeft

$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array}\right|$ geeft $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{array}\right.$ +

$$5x = 10$$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ 2x + y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + y = 2 \\ 4 + y = 2 \\ y = -2 \end{array}$

Dus $D(2, -2)$.

$d(B, l) = d(B, D) = \sqrt{(2-6)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c De lijn r gaat door O en staat loodrecht op m.

$$\left.\begin{array}{l} rc_m \cdot rc_r = -1 \\ rc_m = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot rc_r = -1 \\ rc_r = \frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $r: y = \frac{1}{3}x$.

m en r snijden geeft $\frac{1}{3}x = -3x + 10$

$$3\tfrac{1}{3}x = 10$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = \frac{1}{3}x \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \frac{1}{3} \cdot 3 \\ y = 1 \end{array}$$

Dus $E(3, 1)$.

$d(O, m) = d(O, E) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

d De lijn s gaat door O en staat loodrecht op n, dus s: $4x + 3y = 0$.

s en n snijden geeft

$$\left\{\begin{array}{l|l} 3x - 4y = 12 & 3 \\ 4x + 3y = 0 & 4 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 9x - 12y = 36 \\ 16x + 12y = 0 \end{array}\right. +$$

$$25x \quad = 36$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1\frac{11}{25} \\ 4x + 3y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1\frac{11}{25} + 3y = 0 \\ 5\frac{19}{25} + 3y = 0 \\ 3y = -5\frac{19}{25} \\ y = -1\frac{23}{25} \end{array}$$

Dus $F\left(1\frac{11}{25}, -1\frac{23}{25}\right)$.

$d(O, n) = d(O, F) = \sqrt{\left(1\frac{11}{25} - 0\right)^2 + \left(-1\frac{23}{25} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{36}{25}\right)^2 + \left(-\frac{48}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1296}{625} + \frac{2304}{625}} = \sqrt{\frac{3600}{625}} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

37 De lijn k door de punten $B(2, 1)$ en $C(7, 3)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{3-1}{7-2} = \frac{2}{5}$.

$$\left.\begin{array}{l} k: y = \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } B(2, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot 2 + b = 1 \\ \frac{4}{5} + b = 1 \\ b = \frac{1}{5} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

$$\left.\begin{array}{l} l \perp k, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1 \\ rc_k = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot rc_l = -1 \\ rc_l = -2\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} l: y = -2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A\left(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} + b = 4\frac{1}{2} \\ -8\frac{3}{4} + b = 4\frac{1}{2} \\ b = 13\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $l: y = -2\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{4}$.

k en l snijden geeft $\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} = -2\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{4}$

$$8x + 4 = -50x + 265$$

$$58x = 261$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4\frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} \end{array}\right\} y = \frac{2}{5} \cdot 4\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = 2$$

Dus $D\left(4\frac{1}{2}, 2\right)$.

$d(A, k) = d(A, D) = \sqrt{\left(4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - 4\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 6\frac{1}{4}} = \sqrt{7\frac{1}{4}} \approx 2{,}69$

8

38 De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} m\colon 3x - y = c \\ \text{door } A(1,4) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 1 - 4 = -1$$

Dus $m\colon 3x - y = -1$.

k en m snijden geeft

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \left|\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array}\right| \text{ geeft } \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 9x - 3y = -3 \end{cases} +$$

$$10x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 3y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3y = 3 \\ y = 1 \end{array}$$

Dus $B(0, 1)$.

$d(A,k) = d(A,B) = \sqrt{(0-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

De lijn n gaat door A en staat loodrecht op l.

$$\left.\begin{array}{l} n\colon x - y = c \\ \text{door } A(1,4) \end{array}\right\} c = 1 - 4 = -3$$

Dus $n\colon x - y = -3$.

l en n snijden geeft $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -3 \end{cases} +$

$$2x = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} y = 6$$

Dus $C(3, 6)$.

$d(A,l) = d(A,C) = \sqrt{(3-1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Nee, A ligt dichter bij l dan bij k.

39 **a** De lijn k door $A(1, 0)$ en $B(7, 4)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{4-0}{7-1} = \frac{2}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(1,0) \end{array}\right\} \frac{2}{3} \cdot 1 + b = 0$$

$$\frac{2}{3} + b = 0$$

$$b = -\frac{2}{3}$$

Dus $k\colon y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

De lijn l door C staat loodrecht op k, dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$

$$\frac{2}{3} \cdot \text{rc}_l = -1$$

$$\text{rc}_l = -1\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C\left(3\frac{1}{2}, 6\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} + b = 6 \\ -5\frac{1}{4} + b = 6 \\ b = 11\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $l\colon y = -1\frac{1}{2}x + 11\frac{1}{4}$.

k en l snijden geeft $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = -1\frac{1}{2}x + 11\frac{1}{4}$

$$8x - 8 = -18x + 135$$

$$26x = 143$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5\frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ y = 3 \end{array}$$

Dus $D\left(5\frac{1}{2}, 3\right)$.

$d(C,k) = d(C,D) = \sqrt{\left(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}\right)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

b $d(A,B) = \sqrt{(7-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot d(A,B) \cdot d(C,AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$

© Noordhoff Uitgevers bv

8.3 Cirkelvergelijkingen

Bladzijde 159

40 **a** Dit volgt rechtstreeks uit de formule van de afstand tussen twee punten.
b Als de afstand van $P(x, y)$ tot $M(1, 4)$ gelijk is aan 5, dan ligt P op de cirkel met middelpunt M en straal 5.
c Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10 is
$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10^2$ ofwel $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 100$.
d Middelpunt $(-2, 3)$ en straal $\sqrt{16} = 4$.

Bladzijde 160

41 **a** $c_1: (x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$
b c_2 met middelpunt $(3, 1)$ raakt de x-as, dus straal 1.
Dus $c_2: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$.
c c_3 met middelpunt $(-4, 2)$ raakt de y-as, dus straal 4.
Dus $c_3: (x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$.
d c_4 heeft middelpunt $(3, 4)$ en gaat door de oorsprong,
dus straal $\sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
Dus $c_4: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

42 **a** De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k.
$\text{rc}_k = \frac{1}{3}$, dus $\text{rc}_l = -3$
$$\left.\begin{array}{l} l: y = -3x + b \\ \text{door } M(5, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 5 + b = 5 \\ -15 + b = 5 \\ b = 20 \end{array}$$
$l: y = -3x + 20$ snijden met k geeft $-3x + 20 = \frac{1}{3}x$
$$-3\tfrac{1}{3}x = -20$$
$$x = 6$$
Het snijpunt van k en l is het raakpunt $A(6, 2)$.
$r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(5-6)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
Dus $c_1: (x-5)^2 + (y-5)^2 = 10$.
b De cirkels raken de x-as en de straal is 2 geeft $y_M = 2$ of $y_M = -2$.
M op k, dus $y = 2$ geeft $\frac{1}{3}x = 2$
$x = 6$, dus $M(6, 2)$
en $y = -2$ geeft $\frac{1}{3}x = -2$
$x = -6$, dus $M(-6, -2)$
Dus $c_2: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$ en $c_3: (x+6)^2 + (y+2)^2 = 4$.
c De cirkels raken de y-as en de straal is 12 geeft $x_M = 12$ of $x_M = -12$.
M op k, dus $x = 12$ geeft $y = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$, dus $M(12, 4)$.
en $x = -12$ geeft $y = \frac{1}{3} \cdot -12 = -4$, dus $M(-12, -4)$.
Dus $c_4: (x-12)^2 + (y-4)^2 = 144$ en $c_5: (x+12)^2 + (y+4)^2 = 144$.

43 **a** AB is middellijn, dus het middelpunt is het midden van AB.
$M\left(\frac{1}{2}(-1+9), \frac{1}{2}(4+4)\right)$, ofwel $M(4, 4)$.
De straal is $d(M, A) = \sqrt{(9-4)^2 + (4-4)^2} = 5$, dus $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$.
b Voor snijden met de x-as geldt $y = 0$.
$(x-4)^2 + (0-4)^2 = 25$
$(x-4)^2 + 16 = 25$
$(x-4)^2 = 9$
$x - 4 = 3 \vee x - 4 = -3$
$x = 7 \vee x = 1$
Dus de snijpunten met de x-as zijn $(1, 0)$ en $(7, 0)$.
Voor snijden met de y-as geldt $x = 0$.
$(0-4)^2 + (y-4)^2 = 25$
$16 + (y-4)^2 = 25$
$(y-4)^2 = 9$
$y - 4 = 3 \vee y - 4 = -3$
$y = 7 \vee y = 1$
Dus de snijpunten met de y-as zijn $(0, 1)$ en $(0, 7)$.

c Het middelpunt van c_2 is (4, 0) en de straal is 3.
Dus c_2: $(x-4)^2 + y^2 = 9$.
Het middelpunt van c_3 is (0, 4) en de straal is 3.
Dus c_3: $x^2 + (y-4)^2 = 9$.

Bladzijde 161

44 **a** Middelpunt A en raakt de x-as, dus straal is $y_A = 7$.
c_1: $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 49$

b Middelpunt B en door de oorsprong, dus straal is $d(O, B) = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{82}$.
c_2: $(x-9)^2 + (y-1)^2 = 82$

c Middellijn AB dus middelpunt is het midden van AB, dus $M(\frac{1}{2}(9+3), \frac{1}{2}(1+7))$ ofwel $M(6, 4)$.
De straal is $d(A, M) = \sqrt{(6-3)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$.
c_3: $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 18$

d De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} l: 4x - 3y = c \\ \text{door } A(3, 7) \end{array}\right\} c = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 7 = -9$$

Dus l: $4x - 3y = -9$.
l snijden met k geeft

$$\left\{\begin{array}{l} 4x - 3y = -9 \\ 3x + 4y = 12 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 4 \\ 3 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 16x - 12y = -36 \\ 9x + 12y = 36 \\ \hline 25x \quad\quad = 0 \end{array}\right. +$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 4y = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4y = 12 \\ y = 3 \end{array}$$

Dus het snijpunt is $S(0, 3)$.
$r = d(A, S) = \sqrt{(3-0)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
De gevraagde cirkel is c_4: $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 25$.

e De lijn m gaat door O en staat loodrecht op k.
m: $4x - 3y = 0$
m snijden met k geeft

$$\left\{\begin{array}{l} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 12 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 4 \\ 3 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 16x - 12y = 0 \\ 9x + 12y = 36 \\ \hline 25x \quad\quad = 36 \end{array}\right. +$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1\frac{11}{25} \\ 3x + 4y = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 1\frac{11}{25} + 4y = 12 \\ 4\frac{8}{25} + 4y = 12 \\ 4y = 7\frac{17}{25} \\ y = 1\frac{23}{25} \end{array}$$

Dus het snijpunt is $T(1\frac{11}{25}, 1\frac{23}{25})$.

$$r = d(O, T) = \sqrt{(1\tfrac{11}{25})^2 + (1\tfrac{23}{25})^2} = \sqrt{5\tfrac{19}{25}} = \sqrt{\tfrac{144}{25}} = \tfrac{12}{5} = 2\tfrac{2}{5}$$

De gevraagde cirkel is c_5: $x^2 + y^2 = 5\frac{19}{25}$.

45 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 3 = 0$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

Bladzijde 162

46 **a** $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
$x^2 + 6x + y^2 - 4y + 4 = 0$
$(x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 4 = 0$
$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$
Dus van c_1 is het middelpunt (–3, 2) en de straal 3.

b $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 + 10y + 31 = 0$
$(x-4)^2 - 16 + (y+5)^2 - 25 + 31 = 0$
$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 10$
Dus van c_2 is het middelpunt (4, –5) en de straal $\sqrt{10}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
$x^2 + 5x + y^2 + 3y + 3 = 0$
$(x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 3 = 0$
$(x + 2\frac{1}{2})^2 + (y + 1\frac{1}{2})^2 = 5\frac{1}{2}$
Dus van c_3 is het middelpunt $(-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$ en de straal $\sqrt{5\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{22}$.

d $x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$
$x^2 - 7x + y^2 + 8y = 0$
$(x - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} + (y + 4)^2 - 16 = 0$
$(x - 3\frac{1}{2})^2 + (y + 4)^2 = 28\frac{1}{4}$
Dus van c_4 is het middelpunt $(3\frac{1}{2}, -4)$ en de straal $\sqrt{28\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{113}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{113}$.

47 **a** $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$
$x^2 + 6x + y^2 - 8y + 15 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 + 15 = 0$
$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$
Dus $M(-3, 4)$ en $r = \sqrt{10}$.
b $d(M, A) = \sqrt{(0 - -3)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$
c A ligt binnen de cirkel want $d(M, A) < r$.
d $d(M, B) = \sqrt{(-3 - -3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{0 + 16} = 4$
B ligt buiten de cirkel want $d(M, B) > r$.

Bladzijde 163

48 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 = 0$
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(3, 4)$.
$d(M, A) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} < r$, dus A ligt binnen cirkel c_1.
b $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 2 = 0$
$(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 2 = 0$
$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 18$
Dus $r = \sqrt{18}$ en $M(4, 2)$.
$d(M, O) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} > r$, dus O ligt buiten cirkel c_2.
c $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$
$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 3 = 0$
$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 3 = 0$
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$
Dus $r = \sqrt{10}$ en $M(-2, 3)$.
$d(M, B) = \sqrt{(1 - -2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = r$, dus B ligt op cirkel c_3.

Bladzijde 164

49 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 3 = 0$
$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$
Dus $r = \sqrt{10}$ en $M(3, 2)$.
$d(M, A) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
$d(A, c) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$
b $d(M, B) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
$d(B, c) = 5 - \sqrt{10}$
c $d(M, C) = \sqrt{(9 - 3)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$d(C, c) = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$

© Noordhoff Uitgevers bv

50 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$
$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 0$
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$
Dus $r = \sqrt{5}$ en $M(1, -2)$.
$d(M, A) = \sqrt{(4-1)^2 + (0 - -2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
$d(A, c) = \sqrt{13} - \sqrt{5} = 1{,}369...$

De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon 6x - 4y = e \\ \text{door } A(4, 0) \end{array}\right\} e = 6 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 24$$

Dus $l\colon 6x - 4y = 24$, ofwel $l\colon 3x - 2y = 12$.
l snijden met k geeft

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 12 \\ 4x + 6y = 29 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 9x - 6y = 36 \\ 4x + 6y = 29 \end{array}\right. +$$
$$13x \quad = 65$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 5 - 2y = 12 \\ 15 - 2y = 12 \\ -2y = -3 \\ y = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $S\left(5, 1\frac{1}{2}\right)$.

$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(5-4)^2 + \left(1\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{1 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{13} = 1{,}802...$

Dus A ligt dichter bij c dan bij k.

51 $x^2 + y^2 - 8x + a = 0$
$x^2 - 8x + y^2 + a = 0$
$(x-4)^2 - 16 + y^2 + a = 0$
$(x-4)^2 + y^2 = 16 - a$
Dus c heeft middelpunt $M(4, 0)$ en straal $r = \sqrt{16 - a}$.
De lijn l gaat door M staat loodrecht op k, dus $l\colon x - 2y = c$.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon x - 2y = c \\ \text{door } M(4, 0) \end{array}\right\} c = 4 - 2 \cdot 0 = 4$$

Dus $l\colon x - 2y = 4$.
l snijden met k geeft

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 18 \\ x - 2y = 4 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = 36 \\ x - 2y = 4 \end{array}\right. +$$
$$5x \quad = 40$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 8 \\ 2x + y = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 8 + y = 18 \\ 16 + y = 18 \\ y = 2 \end{array}$$

Dus $S(8, 2)$.

$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(8-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$\sqrt{20} = \sqrt{16 - a}$
$20 = 16 - a$
$a = -4$

52 De cirkel heeft straal 1 en middelpunt $O(0, 0)$.

Bladzijde 165

53 **a** $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 4$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 4$
$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$

b $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$
$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 1$
$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$

c $\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 3\frac{1}{2}\right)^2 = 16$
$x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} + y^2 - 7y + 12\frac{1}{4} = 16$
$x^2 + y^2 - 5x - 7y + 2\frac{1}{2} = 0$

d $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

54 **a** $x = -3 + \sqrt{10}\cos(t) \wedge y = -4 + \sqrt{10}\sin(t)$

b $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 13 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 13 = 0$
$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$
Dus $x = 2 + 4\cos(t) \wedge y = 5 + 4\sin(t)$.

c $x^2 + y^2 + 2y = 0$
$x^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$
$x^2 + (y+1)^2 = 1$
Dus $x = \cos(t) \wedge y = -1 + \sin(t)$.

55 Een pv van c_1 is $x = 3 + 5\cos(t) \wedge y = 4 + 5\sin(t)$.
Het midden Q van $P(3 + 5\cos(t), 4 + 5\sin(t))$ en $A(-5, 2)$ is

$$Q\left(\frac{3 + 5\cos(t) + -5}{2}, \frac{4 + 5\sin(t) + 2}{2}\right) = \left(-1 + 2\tfrac{1}{2}\cos(t), 3 + 2\tfrac{1}{2}\sin(t)\right).$$

Dus Q ligt op de cirkel $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 6\tfrac{1}{4}$
$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 6\tfrac{1}{4}$
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 3\tfrac{3}{4} = 0$
Dus c_2: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 3\tfrac{3}{4} = 0$.

56 **a** $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 = 0$
$x^2 - 12x + y^2 - 4y + 30 = 0$
$(x-6)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 + 30 = 0$
$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 10$
c_1 met middelpunt $M(6, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.

$d(M, A) = \sqrt{(2-6)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} > r$, dus A ligt buiten de cirkel.
$d(M, B) = \sqrt{(7-6)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} = r$, dus B ligt op de cirkel.
$d(M, C) = \sqrt{(8-6)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} < r$, dus C ligt binnen de cirkel.

b Een pv van c_1 is $x = 6 + \sqrt{10}\cos(t) \wedge y = 2 + \sqrt{10}\sin(t)$.
Het midden van $P(6 + \sqrt{10}\cos(t), 2 + \sqrt{10}\sin(t))$ en $A(2, 0)$ is

$$Q\left(\frac{6 + \sqrt{10}\cos(t) + 2}{2}, \frac{2 + \sqrt{10}\sin(t) + 0}{2}\right) = \left(4 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\cos(t), 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\sin(t)\right).$$

Het midden van $P(6 + \sqrt{10}\cos(t), 2 + \sqrt{10}\sin(t))$ en $B(7, 5)$ is

$$R\left(\frac{6 + \sqrt{10}\cos(t) + 7}{2}, \frac{2 + \sqrt{10}\sin(t) + 5}{2}\right) = \left(6\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\cos(t), 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\sin(t)\right).$$

Het midden van Q en R is

$$S\left(\frac{4 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\cos(t) + 6\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\cos(t)}{2}, \frac{1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\sin(t) + 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\sin(t)}{2}\right) =$$

$\left(5\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\cos(t), 2\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\sin(t)\right)$.

Dus S ligt op de cirkel $\left(x - 5\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(y - 2\tfrac{1}{4}\right)^2 = 2\tfrac{1}{2}$
$x^2 - 10\tfrac{1}{2}x + 27\tfrac{9}{16} + y^2 - 4\tfrac{1}{2}y + 5\tfrac{1}{16} = 2\tfrac{1}{2}$
$x^2 + y^2 - 10\tfrac{1}{2}x - 4\tfrac{1}{2}y + 30\tfrac{1}{8} = 0$
Dus c_2: $x^2 + y^2 - 10\tfrac{1}{2}x - 4\tfrac{1}{2}y + 30\tfrac{1}{8} = 0$.

8.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

Bladzijde 167

57 **a** $\left.\begin{array}{l}(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10\\ A(5, 2)\end{array}\right\}$ $(5-2)^2 + (2-1)^2 = 10$
$3^2 + 1^2 = 10$
$10 = 10$

Dus A ligt op c.

b $\text{rc}_l = \frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$

c k staat loodrecht op l geeft $\frac{1}{3} \cdot \text{rc}_k = -1$, dus $\text{rc}_k = -3$.

$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -3x + b \\ \text{door } A(5, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 5 + b = 2 \\ -15 + b = 2 \\ b = 17 \end{array}$$

Dus k: $y = -3x + 17$.

Bladzijde 168

58 **a** Stel l: $y = ax + b$.

n door M en B met $\text{rc}_n = \dfrac{-1-1}{2-3} = 2$, dus $a = \text{rc}_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(2, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ -1 + b = -1 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus l: $y = -\frac{1}{2}x$.

b De lijn q gaat door M en staat loodrecht op r: $y = 2x$, dus $\text{rc}_q = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} q\text{: } y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } M(3, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 1 \\ -1\frac{1}{2} + b = 1 \\ b = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus q: $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

r en q snijden geeft $2x = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{2}x = 2\frac{1}{2}$

$x = 1$

$x = 1$ geeft $y = 2 \cdot 1 = 2$, dus $E(1, 2)$.

$d(M, E) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = r$, dus E ligt op de cirkel.

Dus de lijn r: $y = 2x$ raakt de cirkel.

c Snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $(x-3)^2 + (0-1)^2 = 5$

$(x-3)^2 + 1 = 5$

$(x-3)^2 = 4$

$x - 3 = 2 \vee x - 3 = -2$

$x = 5 \vee x = 1$

Dus $C(1, 0)$ en $D(5, 0)$.

Stel p: $y = ax + b$.

q door M en C met $\text{rc}_q = \dfrac{1-0}{3-1} = \frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_p = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } C(1, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 0 \\ -2 + b = 0 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus p: $y = -2x + 2$.

59 **a** De richtingshoek van k is α.

$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26{,}56...°$

De richtingshoek van l is β.

$\tan(\beta) = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26{,}56...°$

$\alpha - \beta = 26{,}56...° - -26{,}56...° \approx 53{,}1°$, dus de hoek tussen k en l is $53{,}1°$.

b k snijden met l geeft $\frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}x$

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array}\right\} y = -\frac{1}{2} \cdot -2 = 1$$

Dus $S(-2, 1)$.

c $MS = x_M - x_S = 3 - -2 = 5$ en $AM = \sqrt{5}$ geeft $\sin(\angle MSA) = \dfrac{AM}{MS} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Dit geeft $\angle MSA = 26{,}56...°$ en ook hieruit volgt dat de hoek tussen k en l gelijk is aan $53{,}1°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

60 **a** $x = 3$ geeft $3^2 + y^2 - 12 \cdot 3 + 11 = 0$

$$9 + y^2 - 36 + 11 = 0$$
$$y^2 = 16$$
$$y = 4 \vee y = -4$$

$y_A > y_B$, dus $A(3, 4)$ en $B(3, -4)$.

$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$

$x^2 - 12x + y^2 + 11 = 0$

$(x-6)^2 - 36 + y^2 + 11 = 0$

$(x-6)^2 + y^2 = 25$

Dus $M(6, 0)$ en $r = 5$.

Stel k: $y = ax + b$.

m door M en A met $\text{rc}_m = \dfrac{0-4}{6-3} = -1\tfrac{1}{3}$, dus $\text{rc}_k = \tfrac{3}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \tfrac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(3,4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \tfrac{3}{4} \cdot 3 + b = 4 \\ 2\tfrac{1}{4} + b = 4 \\ b = 1\tfrac{3}{4} \end{array}$$

Dus k: $y = \tfrac{3}{4}x + 1\tfrac{3}{4}$.

Stel l: $y = ax + b$.

n door M en B met $\text{rc}_n = \dfrac{0 - -4}{6-3} = 1\tfrac{1}{3}$, dus $\text{rc}_l = -\tfrac{3}{4}$,

$$\left.\begin{array}{l} y = -\tfrac{3}{4}x + b \\ \text{door } B(3,-4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\tfrac{3}{4} \cdot 3 + b = -4 \\ -2\tfrac{1}{4} + b = -4 \\ b = -1\tfrac{3}{4} \end{array}$$

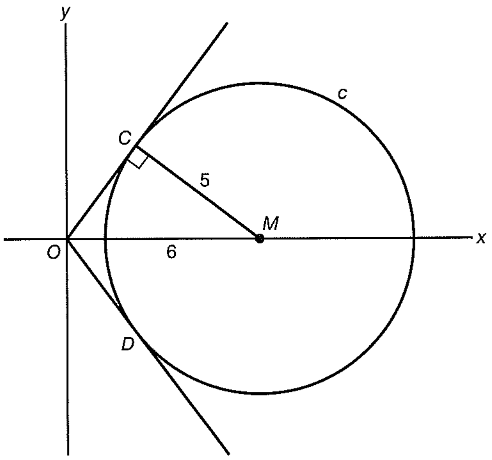
Dus l: $y = -\tfrac{3}{4}x - 1\tfrac{3}{4}$.

b De richtingshoek van k is α.

$\tan(\alpha) = \tfrac{3}{4}$ geeft $\alpha = 36{,}86...°$

Dus de hoek tussen k en l is $2 \cdot 36{,}86...° \approx 74°$.

c



De raaklijnen door O raken de cirkel in de punten C en D.

In $\triangle OMC$ is $\angle C = 90°$, $OM = 6$ en $MC = 5$.

$\sin(\angle MOC) = \tfrac{5}{6}$ geeft $\angle MOC = 56{,}442...°$

$\angle DOC = 2 \cdot \angle MOC = 2 \cdot 56{,}44...° = 112{,}88...°$

De hoek tussen de raaklijnen door O is $180° - 112{,}88...° \approx 67°$.

8

61 **a** $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 12 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 12 = 0$
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 17$
Dus $M(2, -1)$ en $r = \sqrt{17}$.
c snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $x^2 - 4x - 12 = 0$
$(x+2)(x-6) = 0$
$x = -2 \vee x = 6$
Dus $A(-2, 0)$ en $B(6, 0)$.
n door M en A met $\text{rc}_n = \dfrac{-1-0}{2--2} = -\frac{1}{4}$, dus $\text{rc}_k = 4$.
$\tan(\alpha) = 4$ geeft $\alpha = 75{,}96...°$
p door M en C met $\text{rc}_p = \dfrac{-1-3}{2-1} = -4$, dus $\text{rc}_m = \frac{1}{4}$.
$\tan(\beta) = \frac{1}{4}$ geeft $\beta = 14{,}03...°$
$\alpha - \beta = 75{,}96...° - 14{,}03...° \approx 62°$
Dus de hoek tussen de lijnen k en m is 62°.

b q door M en B met $\text{rc}_q = \dfrac{-1-0}{2-6} = \frac{1}{4}$, dus $\text{rc}_l = -4$.
$$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -4x + b \\ \text{door } (6, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 6 + b = 0 \\ -24 + b = 0 \\ b = 24 \end{array}$$
Dus $l\colon y = -4x + 24$.
$$\left.\begin{array}{l} m\colon y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } C(1, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 1 + b = 3 \\ \frac{1}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{3}{4} \end{array}$$
Dus $m\colon y = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$.
l en m snijden geeft $\frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4} = -4x + 24$
$4\frac{1}{4}x = 21\frac{1}{4}$
$$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = -4x + 24 \end{array}\right\} y = -4 \cdot 5 + 24 = 4$$
Dus $S(5, 4)$.

c $d(S, c) = d(S, M) - r = \sqrt{(5-2)^2 + (4--1)^2} - \sqrt{17} = \sqrt{9 + 25} - \sqrt{17} = \sqrt{34} - \sqrt{17}$

Bladzijde 169

62 **a**
$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0 \\ y = x - 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 + (x-1)^2 - 10x + 15 = 0 \\ x^2 + x^2 - 2x + 1 - 10x + 15 = 0 \\ 2x^2 - 12x + 16 = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{array}$$

b $x^2 - 6x + 8 = 0$
$(x-2)(x-4) = 0$
$x = 2 \vee x = 4$
$x = 2$ geeft $y = 2 - 1 = 1$
$x = 4$ geeft $y = 4 - 1 = 3$
Dus de snijpunten zijn $(2, 1)$ en $(4, 3)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 170

63 m loodrecht op $y = 4x + q$, geeft $\text{rc}_m = -\frac{1}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} m{:}\, y = -\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } M(5, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 5 + b = 1 \\ -1\frac{1}{4} + b = 1 \\ b = 2\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $m{:}\, y = -\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}$.
Substitutie van $y = -\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}$ in $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 17$ geeft
$(x - 5)^2 + \left(-\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4} - 1\right)^2 = 17$
Voer in $y_1 = (x - 5)^2 + \left(-\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{4}\right)^2$ en $y_2 = 17$.
Intersect geeft $x = 1$ en $x = 9$.
$x = 1$ geeft $y = -\frac{1}{4} \cdot 1 + 2\frac{1}{4} = 2$
$x = 9$ geeft $y = -\frac{1}{4} \cdot 9 + 2\frac{1}{4} = 0$
Dus $A(1, 2)$ en $B(9, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x + q \\ \text{door } A(1, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + q = 2 \\ 4 + q = 2 \\ q = -2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x + q \\ \text{door } B(9, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 9 + q = 0 \\ 36 + q = 0 \\ q = -36 \end{array}$$

Dus $q = -2 \vee q = -36$.

Bladzijde 171

64 **a** Substitutie van $y = x + 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$ geeft
$x^2 + (x + 1)^2 - 10x - 2(x + 1) + 9 = 0$
$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x - 2x - 2 + 9 = 0$
$2x^2 - 10x + 8 = 0$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x - 1)(x - 4) = 0$
$x = 1 \vee x = 4$
$x = 1$ geeft $y = 1 + 1 = 2$
$x = 4$ geeft $y = 4 + 1 = 5$
De snijpunten zijn $(1, 2)$ en $(4, 5)$.

b $l{:}\, x + y = 6$ geeft $y = 6 - x$
Substitutie van $y = 6 - x$ in $x^2 + y^2 = 26$ geeft
$x^2 + (6 - x)^2 = 26$
$x^2 + 36 - 12x + x^2 - 26 = 0$
$2x^2 - 12x + 10 = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x - 1)(x - 5) = 0$
$x = 1 \vee x = 5$
$x = 1$ geeft $y = 6 - 1 = 5$
$x = 5$ geeft $y = 6 - 5 = 1$
De snijpunten zijn $(1, 5)$ en $(5, 1)$.

c Substitutie van $x = t + 1$ en $y = 2t + 1$ in $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ geeft
$(t + 1)^2 + (2t + 1)^2 - 8(t + 1) - 4(2t + 1) + 10 = 0$
$t^2 + 2t + 1 + 4t^2 + 4t + 1 - 8t - 8 - 8t - 4 + 10 = 0$
$5t^2 - 10t = 0$
$5t(t - 2) = 0$
$t = 0 \vee t = 2$
$t = 0$ geeft $x = 0 + 1 = 1$ en $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
$t = 2$ geeft $x = 2 + 1 = 3$ en $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
Dus de snijpunten zijn $(1, 1)$ en $(3, 5)$.

8

65 **a** $2x - 3y + 4 = 0$ geeft $2x = 3y - 4$ ofwel $x = 1\frac{1}{2}y - 2$.
Substitutie van $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ in $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 26$ geeft
$\left(1\frac{1}{2}y - 2 - 6\right)^2 + (y-1)^2 = 26$
$\left(1\frac{1}{2}y - 8\right)^2 + (y-1)^2 = 26$
Voer in $y_1 = \left(1\frac{1}{2}x - 8\right)^2 + (x-1)^2$ en $y_2 = 26$.
Intersect geeft $x = 2$ en $x = 6$.
Dus $y = 2$ en $y = 6$.
$y = 2$ geeft $x = 1\frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = 1$
$y = 6$ geeft $x = 1\frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 7$
De snijpunten zijn (1, 2) en (7, 6).

b $3x + 4y = 19$
$4y = -3x + 19$
$y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$
Substitutie van $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$ in $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ geeft
$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}\right)^2 - 4x + 6\left(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}\right) - 12 = 0$
Voer in $y_1 = x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}\right)^2 - 4x + 6\left(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}\right) - 12$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 5$.
$x = 5$ geeft $y = -\frac{3}{4} \cdot 5 + 4\frac{3}{4} = 1$
Het gemeenschappelijke punt is (5, 1).

c Substitutie van $y = 2x$ in $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ geeft
$(x-3)^2 + (2x-1)^2 = 9$
Voer in $y_1 = (x-3)^2 + (2x-1)^2$ en $y_2 = 9$.
Intersect geeft $x = 0{,}105...$ en $x = 1{,}894...$
$x = 0{,}105...$ geeft $y = 2 \cdot 0{,}105... = 0{,}211...$
$x = 1{,}894...$ geeft $y = 2 \cdot 1{,}894... = 3{,}788...$
De snijpunten zijn (0,11; 0,21) en (1,89; 3,79).

66 **a** Substitutie van $y = ax + 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$ geeft
$x^2 + (ax+1)^2 - 10x - 2(ax+1) + 6 = 0$
$x^2 + a^2x^2 + 2ax + 1 - 10x - 2ax - 2 + 6 = 0$
$(1 + a^2)x^2 - 10x + 5 = 0$
$D = (-10)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 5 = 100 - 20 - 20a^2 = 80 - 20a^2$
$\left.\begin{array}{l} y = ax + 1 \text{ raakt } c \text{ als } D = 0 \\ D = 80 - 20a^2 \end{array}\right\} \; 80 - 20a^2 = 0$
$-20a^2 = -80$
$a^2 = 4$
$a = 2 \vee a = -2$

b Geen gemeenschappelijke punten als $D < 0$, dus als $80 - 20a^2 < 0$
$-20a^2 < -80$
$a^2 > 4$
$a < -2 \vee a > 2$

c Twee snijpunten als $D > 0$, dus als $80 - 20a^2 > 0$
$-20a^2 > -80$
$a^2 < 4$
$-2 < a < 2$

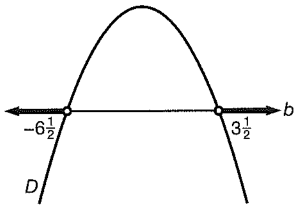
© Noordhoff Uitgevers bv

67 **a** Substitutie van $y = \frac{1}{2}x + b$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$ geeft

$x^2 + \left(\frac{1}{2}x + b\right)^2 - 10x - 2\left(\frac{1}{2}x + b\right) + 6 = 0$
$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2 - 10x - x - 2b + 6 = 0$
$1\frac{1}{4}x^2 + (b - 11)x + b^2 - 2b + 6 = 0$

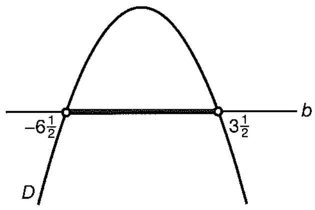
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \text{ raakt } c \text{ als } D = 0 \\ D = (b-11)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot (b^2 - 2b + 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (b-11)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot (b^2 - 2b + 6) = 0 \\ b^2 - 22b + 121 - 5b^2 + 10b - 30 = 0 \\ -4b^2 - 12b + 91 = 0 \\ D = (-12)^2 - 4 \cdot -4 \cdot 91 = 1600 \\ b = \dfrac{12 - 40}{-8} \vee b = \dfrac{12 + 40}{-8} \\ b = 3\frac{1}{2} \vee b = -6\frac{1}{2} \end{array}$$

b Geen gemeenschappelijke punten met c als $D < 0$, dus als $-4b^2 - 12b + 91 < 0$.



Dus $b < -6\frac{1}{2} \vee b > 3\frac{1}{2}$.

c Twee snijpunten als $D > 0$, dus als $-4b^2 - 12b + 91 > 0$.



Dus $-6\frac{1}{2} < b < 3\frac{1}{2}$.

68 **a** Het midden M van het lijnstuk AB is $M\left(\frac{1}{2}(-1 + 7), \frac{1}{2}(3 + -1)\right) = M(3, 1)$.

$r = d(A, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$ en $M(3, 1)$ geeft
$c: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$
$\quad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 20 = 0$
$\quad x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$

Substitutie van $y = -2x + p$ in $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$ geeft
$x^2 + (-2x + p)^2 - 6x - 2(-2x + p) - 10 = 0$
$x^2 + 4x^2 - 4px + p^2 - 6x + 4x - 2p - 10 = 0$
$5x^2 + (-4p - 2)x + p^2 - 2p - 10 = 0$

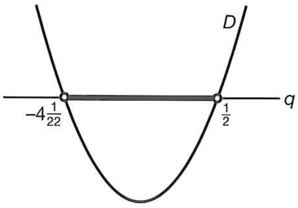
$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + p \text{ raakt } c \text{ als } D = 0 \\ D = (-4p-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (p^2 - 2p - 10) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (-4p-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (p^2 - 2p - 10) = 0 \\ 16p^2 + 16p + 4 - 20p^2 + 40p + 200 = 0 \\ -4p^2 + 56p + 204 = 0 \\ p^2 - 14p - 51 = 0 \\ (p + 3)(p - 17) = 0 \\ p = -3 \vee p = 17 \end{array}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

b Substitutie van $y = qx - 5\frac{1}{2}$ in $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$ geeft
$x^2 + \left(qx - 5\frac{1}{2}\right)^2 - 6x - 2\left(qx - 5\frac{1}{2}\right) - 10 = 0$
$x^2 + q^2x^2 - 11qx + 30\frac{1}{4} - 6x - 2qx + 11 - 10 = 0$
$(1 + q^2)x^2 + (\text{-}13q - 6)x + 31\frac{1}{4} = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Geen punten gemeenschappelijk als } D < 0 \\ D = (\text{-}13q - 6)^2 - 4 \cdot (1 + q^2) \cdot 31\frac{1}{4}\end{array}\right\} \begin{array}{l}(\text{-}13q - 6)^2 - 4 \cdot (1 + q^2) \cdot 31\frac{1}{4} < 0 \\ 169q^2 + 156q + 36 - 125 - 125q^2 < 0 \\ 44q^2 + 156q - 89 < 0\end{array}$$

$44q^2 + 156q - 89 = 0$
$D = 156^2 - 4 \cdot 44 \cdot \text{-}89 = 40\,000$
$q = \dfrac{\text{-}156 + 200}{88} = \frac{1}{2} \vee q = \dfrac{\text{-}156 - 200}{88} = \text{-}4\frac{1}{22}$



$44q^2 + 156q - 89 < 0$ geeft $\text{-}4\frac{1}{22} < q < \frac{1}{2}$

8.5 Meetkunde met GeoGebra

Bladzijde 173

69 **a** *
b *
c De baan is een rechte lijn.
d $t = \text{-}10$ geeft $(2 \cdot \text{-}10 - 1, 3 - \text{-}10)$ ofwel $(\text{-}21, 13)$.
$t = 10$ geeft $(2 \cdot 10 - 1, 3 - 10)$ ofwel $(19, \text{-}7)$.
Dus A beweegt tussen $(\text{-}21, 13)$ en $(19, \text{-}7)$.

8

Bladzijde 174

70 **a** k: $y = \text{-}0{,}75x + 3{,}25$ of k: $4{,}5x + 6y = 19{,}5$
b l: $y = \text{-}2x + 9$ of l: $6{,}6x + 3{,}3y = 29{,}7$

71 **a** *
b *

72 **a** *
b *

73 **a** *
b *
c *
d *

Bladzijde 176

74 **a** $d(A, k) \approx 2{,}24$
b $d(B, c) \approx 4{,}47$
c $d(O, m) \approx 3{,}16$
d $d(O, n) = 2{,}4$

75 $d(A, k) \approx 3{,}16$ en $d(A, l) \approx 2{,}83$.
Dus A ligt dichter bij l dan bij k.

Bladzijde 177

76 **a** $d(A, c) = 3{,}83$
b $d(C, c) = 0{,}59$

© Noordhoff Uitgevers bv

77 a Teken lijnstuk AC.
AC snijdt c_1 en c_2 in de punten E en F.
$d(c_1, c_2) = d(E, F) \approx 1{,}61$
b In $\triangle ABC$ is $AC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
$EF = AC - r_1 - r_2 = \sqrt{13} - 1 - 1 = \sqrt{13} - 2$
c $d(c_1, BD) \approx 0{,}66$

Diagnostische toets

Bladzijde 178

1 a $k_p \,//\, l_{p,q}$, dus $\dfrac{p}{p+1} = \dfrac{p-5}{-(3-p)}$

$\dfrac{p}{p+1} = \dfrac{p-5}{-3+p}$
$p \cdot (-3+p) = (p+1)(p-5)$
$-3p + p^2 = p^2 - 4p - 5$
$p = -5$
vold.

Dus voor $p = -5$ en q kan elk getal van $\mathbb{R}$ zijn.

b $p = -5$ geeft k_p: $-5x - 10y = 2$ en $l_{p,q}$: $-4x - 8y = q$.

Voor samenvallen geldt $\dfrac{-5}{-4} = \dfrac{-10}{-8} = \dfrac{2}{q}$ en dit geeft $-5q = -8$, dus $q = 1\frac{3}{5}$.
Dus voor $p = -5$ en $q = 1\frac{3}{5}$.

2 (2, 7) invullen in $x = 3t - 6p$ en $y = -2t + p$ geeft

$$\begin{cases} 3t - 6p = 2 \\ -2t + p = 7 \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right| \text{ geeft } \begin{cases} 6t - 12p = 4 \\ -6t + 3p = 21 \end{cases} +$$
$$-9p = 25$$
$$p = -2\tfrac{7}{9}$$

3 a k: $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{3} = 1$ geeft k: $3x + py = 3p$

b $A(3, 6)$ op k, dus $3 \cdot 3 + p \cdot 6 = 3p$
$9 + 6p = 3p$
$3p = -9$
$p = -3$

c $k \,//\, m$ geeft $\dfrac{3}{2} = \dfrac{p}{5}$, dus $p = \dfrac{3 \cdot 5}{2} = 7\frac{1}{2}$.

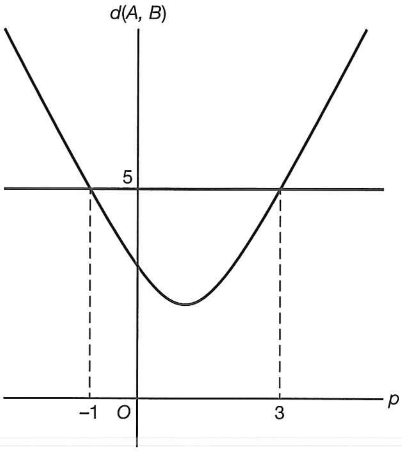
4 a $y = 4x + 2$, dus $\text{rc}_k = 4$.
$\tan(\alpha) = 4$ geeft $\alpha = 75{,}96...°$
$y = -\frac{1}{2}x + 6$, dus $\text{rc}_l = -\frac{1}{2}$.
$\tan(\beta) = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26{,}56...°$
$\alpha - \beta = 75{,}96...° - -26{,}56...° = 102{,}52...°$
Dus de gevraagde hoek is $180° - 102{,}52...° \approx 77{,}5°$.

b $\text{rc}_m = \dfrac{-2-0}{0-3} = \frac{2}{3}$
$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33{,}69...°$
$\text{rc}_n = \dfrac{5-0}{0-2} = -2\frac{1}{2}$
$\tan(\beta) = -2\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -68{,}19...°$
$\alpha - \beta = 33{,}69...° - -68{,}19...° = 101{,}88...°$
Dus de gevraagde hoek is $180° - 101{,}88...° \approx 78{,}1°$.

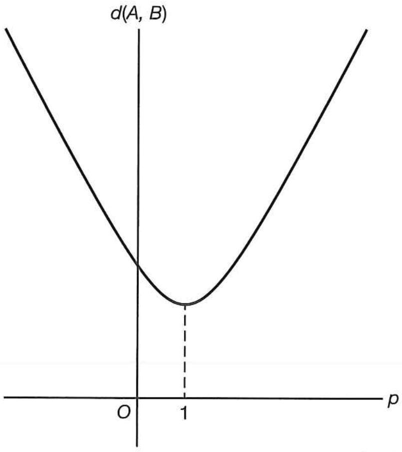
8

c $2x + 3y = 6$ geeft $3y = -2x + 6$
$y = -\frac{2}{3}x + 2$, dus $\text{rc}_p = -\frac{2}{3}$
$\tan(\alpha) = -\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -33{,}69...°$
$y = 8x - 6$, dus $\text{rc}_q = 8$
$\tan(\beta) = 8$ geeft $\beta = 82{,}87...°$
$\beta - \alpha = 82{,}87...° - -33{,}69...° = 116{,}56...°$
Dus de gevraagde hoek is $180° - 116{,}56...° \approx 63{,}4°$.

5 **a** $d(A, B) = \sqrt{(3 - 2p)^2 + (p + 1 - 0)^2} = \sqrt{9 - 12p + 4p^2 + p^2 + 2p + 1} = \sqrt{5p^2 - 10p + 10}$
b $d(A, B) = 5$ geeft $\sqrt{5p^2 - 10p + 10} = 5$
kwadrateren geeft
$5p^2 - 10p + 10 = 25$
$5p^2 - 10p - 15 = 0$
$p^2 - 2p - 3 = 0$
$(p + 1)(p - 3) = 0$
$p = -1 \vee p = 3$



$d(A, B) < 5$ geeft $-1 < p < 3$
c $d(A, B) = d(p) = \sqrt{5p^2 - 10p + 10}$ geeft $d'(p) = \dfrac{1}{2\sqrt{5p^2 - 10p + 10}} \cdot (10p - 10) = \dfrac{5p - 5}{\sqrt{5p^2 - 10p + 10}}$
$d'(p) = 0$ geeft $5p - 5 = 0$, dus $p = 1$.



De minimale afstand is $d(1) = \sqrt{5 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 10} = \sqrt{5}$.
d Het midden van het lijnstuk AB is $M\left(\frac{1}{2}(2p + 3), \frac{1}{2}(0 + p + 1)\right)$ ofwel $M\left(p + 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\right)$.
M op $x + y = 6$ geeft $p + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} = 6$
$1\frac{1}{2}p = 4$
$p = 2\frac{2}{3}$

8

© Noordhoff Uitgevers bv

6 **a** Stel k: $y = ax + b$.

$$\left.\begin{array}{l} k \perp l, \text{ dus } \text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1 \\ \text{rc}_l = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{rc}_k \cdot -\frac{1}{3} = -1 \\ \text{rc}_k = 3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } A(2, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + b = 3 \\ 6 + b = 3 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus k: $y = 3x - 3$.

b $m \perp n$, dus m: $2x - 3y = c$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = c \\ \text{door } B(2, -4) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 2 - 3 \cdot -4 = 16$$

Dus m: $2x - 3y = 16$.

c Stel p: $y = ax + b$.

$$\left.\begin{array}{l} p \perp q, \text{ dus } \text{rc}_p \cdot \text{rc}_q = -1 \\ \text{rc}_q = \dfrac{4-0}{0-3} = -1\frac{1}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{rc}_p \cdot -1\frac{1}{3} = -1 \\ \text{rc}_p = \frac{3}{4} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } C(-2, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot -2 + b = 6 \\ -1\frac{1}{2} + b = 6 \\ b = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus p: $y = \frac{3}{4}x + 7\frac{1}{2}$.

7 **a** De lijn m staat loodrecht op k en gaat door $A(6, -1)$.

$\text{rc}_k = 2$, dus $\text{rc}_m = -\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} m: y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(6, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 6 + b = -1 \\ -3 + b = -1 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus m: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

m snijden met k geeft $2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 2$

$$\begin{array}{l} 2\frac{1}{2}x = 5 \\ \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2x - 3 \end{array}\right\} y = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \end{array}$$

Het snijpunt is $S(2, 1)$.

$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(2-6)^2 + (1 - -1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b Stel l: $y = ax + b$.

$$a = \frac{5-1}{-2-2} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} n: y = -x + b \\ \text{door } C(2, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + b = 1 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus l: $y = -x + 3$.

$l \perp n$, dus $\text{rc}_n = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x + b \\ \text{door } B(3, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 + b = 5 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus n: $y = x + 2$.

n snijden met l geeft $x + 2 = -x + 3$

$$\begin{array}{l} 2x = 1 \\ \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = x + 2 \end{array}\right\} y = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus het snijpunt is $T(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

$$d(B, l) = d(B, T) = \sqrt{(\tfrac{1}{2} - 3)^2 + (2\tfrac{1}{2} - 5)^2} = \sqrt{6\tfrac{1}{4} + 6\tfrac{1}{4}} = \sqrt{12\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

8

Bladzijde 179

8 **a** $c_1: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 25$

b De straal is gelijk aan $d(A, B)$, dus $r = \sqrt{(8-2)^2 + (2 - -3)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$
Dus $c_2: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 61$.

c De cirkel heeft middelpunt A en raakt de y-as, dus $r = x_A = 2$.
Dus $c_3: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

d Het middelpunt M van c_4 is het midden van het lijnstuk AB, dus $M\left(\frac{1}{2}(2+8), \frac{1}{2}(-3+2)\right) = M(5, -\frac{1}{2})$.
De straal van c_4 is de helft van $d(A, B)$, dus $r = \frac{1}{2}\sqrt{61}$.
$c_4: (x-5)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 61$
$c_4: (x-5)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 15\frac{1}{4}$

e De lijn l staat loodrecht op k en gaat door B.
$\text{rc}_k = 3$, dus $\text{rc}_l = -\frac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } B(8, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 8 + b = 2 \\ -2\frac{2}{3} + b = 2 \\ b = 4\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$.
l snijden met k geeft $3x - 6 = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$

$$\begin{array}{l} 3\frac{1}{3}x = 10\frac{2}{3} \\ 10x = 32 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3\frac{1}{5} \\ y = 3x - 6 \end{array}\right\} y = 3 \cdot 3\frac{1}{5} - 6 = 3\frac{3}{5}$$

Het snijpunt is $S\left(3\frac{1}{5}, 3\frac{3}{5}\right)$.

De straal van c_5 is $d(B, S) = \sqrt{\left(3\frac{1}{5} - 8\right)^2 + \left(3\frac{3}{5} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{640}{25}} = \sqrt{25\frac{3}{5}}$.

$c_5: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 25\frac{3}{5}$

9 **a** $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 + 8y - 11 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 - 11 = 0$
$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$
Dus het middelpunt is $(3, -4)$ en de straal is 6.

b $x^2 + y^2 + 3x - 7y = 0$
$x^2 + 3x + y^2 - 7y = 0$
$\left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + \left(y - 3\frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{4} = 0$
$\left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 3\frac{1}{2}\right)^2 = 14\frac{1}{2}$
Dus het middelpunt is $\left(-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ en de straal is $\sqrt{14\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{29}{2}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{58}$.

10 **a** $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$
$x^2 - 16x + y^2 + 8y - 1 = 0$
$(x-8)^2 - 64 + (y+4)^2 - 16 - 1 = 0$
$(x-8)^2 + (y+4)^2 = 81$
Dus $M(8, -4)$ en $r = 9$.
$d(M, A) = \sqrt{(3-8)^2 + (-4 - -4)^2} = \sqrt{25+0} = 5 < r$, dus A ligt binnen cirkel c_1.

b $d(M, B) = \sqrt{(2-8)^2 + (5 - -4)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$
$d(B, c_1) = d(M, B) - r = 3\sqrt{13} - 9$

c $d(M, C) = \sqrt{(3-8)^2 + (4 - -4)^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$
$d(C, c_1) = d(M, C) - r = \sqrt{89} - 9$

d Een pv van c_1 is $x = 8 + 9\cos(t) \wedge y = -4 + 9\sin(t)$.
Het midden Q van $P(8 + 9\cos(t), -4 + 9\sin(t))$ en $A(3, -4)$ is

$$Q\left(\frac{8 + 9\cos(t) + 3}{2}, \frac{-4 + 9\sin(t) + -4}{2}\right) = \left(5\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}\cos(t), -4 + 4\tfrac{1}{2}\sin(t)\right).$$

Dus Q ligt op de cirkel $\left(x - 5\frac{1}{2}\right)^2 + (y+4)^2 = 20\frac{1}{4}$
$x^2 - 11x + 30\frac{1}{4} + y^2 + 8y + 16 = 20\frac{1}{4}$
$x^2 + y^2 - 11x + 8y + 26 = 0$
Dus $c_2: x^2 + y^2 - 11x + 8y + 26 = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

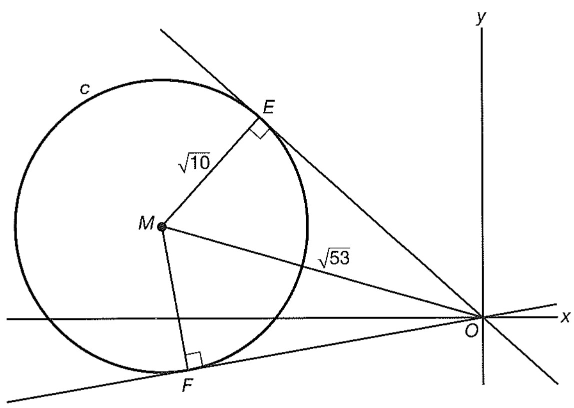
11 **a** $x^2 + y^2 + 14x - 4y + 43 = 0$
$x^2 + 14x + y^2 - 4y + 43 = 0$
$(x + 7)^2 - 49 + (y - 2)^2 - 4 + 43 = 0$
$(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 10$
Cirkel met middelpunt $M(-7, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.
Invullen van $x = -8$ in c geeft $(-8 + 7)^2 + (y - 2)^2 = 10$
$1 + (y - 2)^2 = 10$
$(y - 2)^2 = 9$
$y - 2 = 3 \vee y - 2 = -3$
$y = 5 \vee y = -1$
Dus $A(-8, 5)$ en $B(-8, -1)$.

m door M en A met $\text{rc}_m = \dfrac{5 - 2}{-8 - -7} = -3$.
$k \perp m$, dus $\text{rc}_k = \frac{1}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} k: y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(-8, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot -8 + b = 5 \\ -2\frac{2}{3} + b = 5 \\ b = 7\frac{2}{3} \end{array}$
Dus k: $y = \frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$.
n door M en B met $\text{rc}_n = \dfrac{-1 - 2}{-8 - -7} = 3$.
$l \perp n$, dus $\text{rc}_l = -\frac{1}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} l: y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } B(-8, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot -8 + b = -1 \\ 2\frac{2}{3} + b = -1 \\ b = -3\frac{2}{3} \end{array}$
Dus l: $y = -\frac{1}{3}x - 3\frac{2}{3}$.

b $y = \frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$, dus $\text{rc}_k = \frac{1}{3}$.
$\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$, dus $\alpha = 18{,}43...°$
$y = -\frac{1}{3}x - 3\frac{2}{3}$, dus $\text{rc}_l = -\frac{1}{3}$.
$\tan(\beta) = -\frac{1}{3}$, dus $\beta = -18{,}43...°$
$\alpha - \beta = 18{,}43...° - -18{,}43...° \approx 37°$
De gevraagde hoek is 37°.

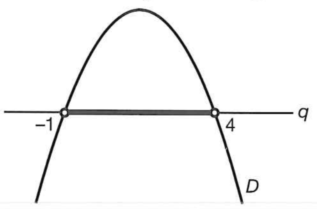
c k en l snijden geeft $\frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}x - 3\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}x = -11\frac{1}{3}$
$x = -17$
$x = -17$ geeft $y = \frac{1}{3} \cdot -17 + 7\frac{2}{3} = 2$, dus $S(-17, 2)$.
$d(S, c) = d(S, M) - r = \sqrt{(-17 - -7)^2 + (2 - 2)^2} - \sqrt{10} = 10 - \sqrt{10}$

d $d(M, O) = \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{53}$ en $r = \sqrt{10}$.
In $\triangle OEM$ is $\sin(\angle MOE) = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}}$
$\angle MOE = 25{,}74...°$
Vanwege symmetrie is $\angle MOF = \angle MOE = 25{,}74...°$,
dus de hoek tussen de raaklijnen is $2 \cdot 25{,}74...° \approx 51°$.



12 **a** $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
$x^2-2x+1+y^2-4y+4=5$
$x^2+y^2-2x-4y=0$
$y=-2x+p$ substitueren in $x^2+y^2-2x-4y=0$ geeft
$x^2+(-2x+p)^2-2x-4(-2x+p)=0$
$x^2+4x^2-4px+p^2-2x+8x-4p=0$
$5x^2+(-4p+6)x+p^2-4p=0$
$D=(-4p+6)^2-4\cdot5\cdot(p^2-4p)=16p^2-48p+36-20p^2+80p=-4p^2+32p+36$
Voor raken geldt $D=0$, dus $-4p^2+32p+36=0$
$p^2-8p-9=0$
$(p+1)(p-9)=0$
$p=-1 \vee p=9$
Dus $p=-1 \vee p=9$.

b $y=\frac{1}{2}x+q$ substitueren in $x^2+y^2-2x-4y=0$ geeft $x^2+\left(\frac{1}{2}x+q\right)^2-2x-4\left(\frac{1}{2}x+q\right)=0$
$x^2+\frac{1}{4}x^2+qx+q^2-2x-2x-4q=0$
$1\frac{1}{4}x^2+(q-4)x+q^2-4q=0$
$D=(q-4)^2-4\cdot1\frac{1}{4}\cdot(q^2-4q)=q^2-8q+16-5q^2+20q=-4q^2+12q+16$
Twee snijpunten, dus $D>0$.
$D=0$ geeft $-4q^2+12q+16=0$
$q^2-3q-4=0$
$(q+1)(q-4)=0$
$q=-1 \vee q=4$



$D>0$ geeft $-1<q<4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Wiskunde Olympiade

2009

A-vragen

Bladzijde 182

1. 60% van 25 is 15, 70% van 30 is 21 en 80% van 45 is 36.
Ze had dus in totaal $15 + 21 + 36 = 72$ vragen goed van de 100, dus 72%.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

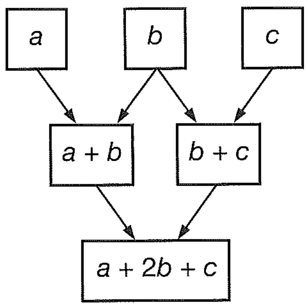
2. We kijken hoeveel van de getallen cijfersom 1, 2, … hebben. Er is 1 getal met som 1 (namelijk 10), er zijn er 2 met som 2 (namelijk 20 en 11), … 9 met som 9 (namelijk 90, 81, . . . , 18), ook 9 met som 10 (namelijk 91,82, . . . , 19), … tot en met 1 met som 18 (namelijk 99). Zie de tabel hieronder.

som:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
aantal:	**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**	9	8	7	6	5	4	**3**	2	1

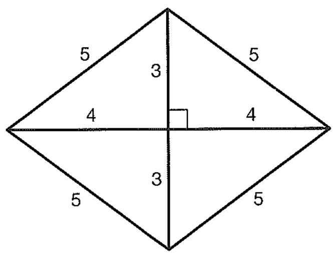
De som is een kwadraat (dus 1, 4, 9 of 16) voor $1 + 4 + 9 + 3 = 17$ van de 90 getallen.
Dus antwoord E is het goede antwoord.

3. De tweede dobbelsteen geeft altijd een even getal en de derde dobbelsteen altijd een oneven getal. De vraag is dus eigenlijk hoe groot de kans is dat de eerste dobbelsteen op een **even** getal valt.
Dat is in 2 van de 6 gevallen, dus met kans $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

4. Als we a, b en c in de bovenste drie vierkantjes plaatsen, is de uitkomst $a + 2b + c$.
De grootste uitkomst krijgen we door voor b en daarna voor a en c zo groot mogelijke getallen te nemen. $b = 9, a = 8$ en $c = 7$ geeft uitkomst 33.
De kleinste uitkomst krijgen we juist door voor b en daarna voor a en c zo klein mogelijke getallen te nemen. $b = 1, a = 2$ en $c = 3$ geeft uitkomst 7.
Het verschil is $33 - 7 = 26$.
Dus antwoord D is het goede antwoord.



5. De diagonalen zijn $\frac{3}{7} \cdot 56 = 24$ en $\frac{4}{7} \cdot 56 = 32$. De halve diagonalen zijn dus $12\,(= 4 \cdot 3)$ en $16\,(= 4 \cdot 4)$. De ruit is dus 4 keer zo groot als de ruit in de figuur, die is opgebouwd uit vier 3-4-5 driehoeken.
De zijde is dus in werkelijkheid $4 \cdot 5 = 20$ en de omtrek $4 \cdot 20 = 80$.
Dus antwoord A is het goede antwoord.

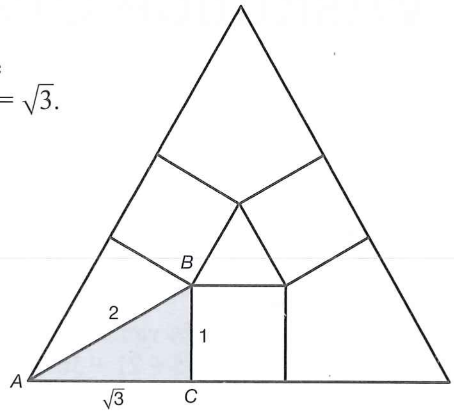


6. De tijd die Wouter over de eerste kilometer gedaan heeft, noemen we voor het gemak een ‘kwartier’; dat is wellicht meer of minder dan 15 minuten, maar het zal er niet toe blijken te doen.
Stel de gevraagde afstand is x. Hij is dus al een ‘kwartier’ aan het lopen over die ene km. Doorlopen kost hem dan x ‘kwartier’. Teruggaan naar huis en dan op de fiets kost eerst weer 1 ‘kwartier’ lopen en dan $\frac{1+x}{7}$ ‘kwartier’ fietsen; de fiets gaat immers 7 keer zo snel. Dan moet dus wel $x = 1 + \frac{1+x}{7}$, dus $7x = 7 + (1 + x)$ ofwel $6x = 8$. Conclusie: $x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.
Dus antwoord E is het goede antwoord.

Bladzijde 183

7 In $\triangle ABC$ is $\angle A$ de helft van 60°, dus 30°. Verder is $\angle C$ recht, dus $\triangle ABC$ is een 30-60-90 driehoek met $BC = 1$. Het is dus de helft van een gelijkzijdige driehoek met lengte van de zijden 2: $AB = 2$. Hieruit volgt dat $AC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Dus de gevraagde lengte is $\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}$.
Dus antwoord D is het goede antwoord.



8 Stel dat het getal n bestaande uit de cijfers a, b, c en d ($n = 1000a + 100b + 10c + d$) voldoet, dus deelbaar is door 44. Het is dan zeker deelbaar door 11. Omdat $m = 1001a + 99b + 11c = 11(91a + 9b + c)$ ook een 11-voud is, moet $m - n$ dat ook zijn, dus $m - n = a - b + c - d$ moet een 11-voud zijn. Maar dit is maximaal de twee hoogste min de twee laagste (dus $13 - 7 = 6$) en minimaal -6, dus het moet wel 0 zijn. Dus $a + c = b + d$. En omdat de cijfers samen 20 zijn, geldt dus $a + c = b + d = 10$. Stel $d = 4$, dan $b = 6$ en we krijgen 3674 en 7634 die echter beide niet voldoen (want 74 en 34 zijn niet deelbaar door 4). Stel $d = 6$, dan $b = 4$ en we krijgen 3476 en 7436 die allebei juist wel voldoen. Andere opties voor d zijn er niet, want d moet even zijn. Dat zijn in totaal 2 oplossingen.
Dus antwoord A is het goede antwoord.

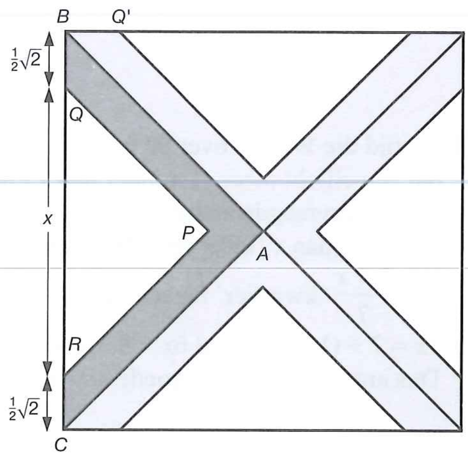
B-vragen

1 We kunnen de figuur van 101^2 vierkantjes als volgt opgebouwd denken. Eerst linksboven één vierkantje, dan twee L-vormige stukjes, één van drie vierkantjes (met één grijs vierkantje) en één van vijf vierkantjes (alle vijf grijs) daaromheen. Dan weer twee L-vormige stukjes, één van zeven vierkantjes (waarvan één grijs) en één van negen vierkantjes (alle negen grijs), en zo verder. Van de laatste twee L-vormige stukjes bestaat het eerste uit 199 vierkantjes (waarvan één grijs) en het tweede uit 201 vierkantjes (allemaal grijs). In totaal bekijken we 50 maal twee L-vormige stukjes.
Het aantal grijze vierkantjes dat we tellen is
$1 + (1 + 5) + (1 + 9) + (1 + 13) + \ldots + (1 + 201) = 1 + (6 + 10 + 14 + \ldots + 202) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (6 + 202) = 5201$.

2 $9^3 = 729$; $99^3 = 970299$; $999^3 = 997002999$. Het lijkt erop dat in het algemeen de derde macht van het getal n bestaande uit k negens er als volgt uit ziet: eerst $k - 1$ negens; dan een 7; dan $k - 1$ nullen; dan een 2; en ten slotte k negens. Om dat te bewijzen, schrijven we n als $10k - 1$. Inderdaad: $(10k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 = 10^{2k}(10^k - 3) + (3 \cdot 10^k - 1)$. Het getal $10^k - 3$ kun je uitschrijven als 999 . . . 997 met $k - 1$ negens. Vermenigvuldigd met 10^{2k} levert dat een getal met $2k$ nullen op het eind. Als we daar $3 \cdot 10^k - 1$ bij optellen, worden de laatste $k + 1$ nullen vervangen door 2999 . . . 999 met k negens. In totaal gaat het dan dus om $(k - 1) + k$ negens; voor $k = 2009$ zijn dat er 4017.

3 We kunnen volstaan met het bekijken van een kwart van de tegel: $\triangle ABC$. De oppervlakte van $\triangle PQR$ is de helft van die van $\triangle ABC$. De driehoeken zijn gelijkvormig, dus corresponderende zijden verhouden zich als $1 : \sqrt{2}$, dus $QR : BC = 1 : \sqrt{2}$.
In $\triangle BQQ'$ is $BQ'^2 + BQ^2 = 1^2$

$$2 \cdot BQ^2 = 1$$
$$BQ^2 = \tfrac{1}{2}$$
$$BQ = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$



Stel $QR = x$ en je krijgt $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot x$, dus $x\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{2}$ ofwel

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}.$$

Dus $BC = x + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 $a + b + c = 18$ geeft $b + c = 18 - a$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 756 \\ a^2 = bc \end{array}\right\} \begin{array}{l} b^2 + 2bc + c^2 = 756 + bc \\ \left.\begin{array}{l} (b+c)^2 = 756 + a^2 \\ b + c = 18 - a \end{array}\right\} \begin{array}{l} (18-a)^2 = 756 + a^2 \\ 324 - 36a + a^2 = 756 + a^2 \\ -36a = -432 \\ a = -12 \end{array} \end{array}$$

$a = -12$ geeft $b + c = 30$ en $bc = 144$.

$$\left.\begin{array}{l} bc = 144 \\ b = 30 - c \end{array}\right\} \begin{array}{l} c(30 - c) = 144 \\ c^2 - 30c + 144 = 0 \\ (c - 24)(c - 6) = 0 \\ c = 24 \ \vee \ c = 6 \end{array}$$

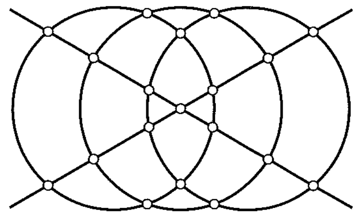
$c = 6$ geeft $b = 24$ en $c = 24$ geeft $b = 6$.
Dus $(a, b, c) = (-12, 24, 6)$ of $(a, b, c) = (-12, 6, 24)$.

2010

A-vragen

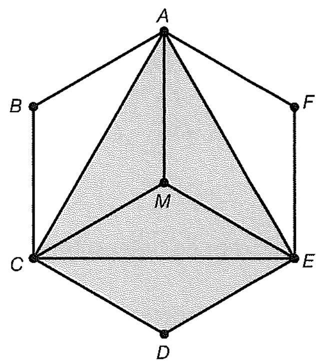
Bladzijde 184

1 Twee cirkels snijden elkaar in hoogstens twee punten, een cirkel en een lijn snijden elkaar in hoogstens twee punten en twee lijnen snijden elkaar in hoogstens één punt.
Er kunnen dus niet meer dan $6 + 6 + 6 + 1 = 19$ snijpunten zijn.
Dat dit aantal ook kan voorkomen, zie je hiernaast.
Dus antwoord D is het goede antwoord.



2 De mogelijke eindscores zijn precies de oneven getallen $-21, -19, ..., 19, 21$.
Dat alleen oneven scores mogelijk zijn zie je als volgt.
Alle opgaven goed levert een score van 21 op.
Voor iedere fout beantwoorde vraag gaat er een even aantal punten van deze 21 punten af, zodat de score oneven blijft.
Dat alle oneven scores tussen -21 en 21 ook mogelijk zijn, zie je als volgt.
Door geen of precies één opgave fout te beantwoorden, kun je scores 21, 19, 17, 15, 13, 11 en 9 halen. Fout beantwoorden van vraag 6 en een van de eerste vier opgaven levert 7, 5, 3 of 1 punt op.
Door juist één opgave goed te maken of alleen opgave 6 en een van de eerste vier opgaven, krijg je scores $-21, -19, ... -1$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

3 Verbind het middelpunt M met A, C en E. Verbind ook C met E.
Zo wordt de zeshoek in zes gelijke driehoeken verdeeld, waarvan er 4 samen de vlieger vormen.
Dus antwoord B is het goede antwoord.



4 Na drie ronden heeft iedereen 1 fiche verloren en zijn er 3 in de pot beland.
Na $12 \cdot 3$ ronden hebben de spelers respectievelijk 1, 2 en 3 fiches over en zitten er 36 fiches in de pot. In de volgende ronde komt daar nog 1 fiche bij en eindigt het spel. Dus antwoord B is het goede antwoord.

5 Het product van twee getallen die eindigen op een 1, eindigt zelf ook op een 1.
Omdat het laatste cijfer van $7^4 = 2401$ gelijk is aan 1, geldt dat dus ook voor iedere macht van 7^4. In het bijzonder is het laatste cijfer van $((((7^6)^5)^4)^3)^2 = (7^4)^{180}$ gelijk aan 1.
Dus antwoord A is het goede antwoord.

6 Stel $a = (\sqrt{2} + 1)^7$ en $b = (\sqrt{2} - 1)^7$. Dan is de gegeven uitdrukking gelijk aan
$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab = 4(\sqrt{2} + 1)^7(\sqrt{2} - 1)^7 = 4((\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1))^7 = 4 \cdot 1^7 = 4$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

© Noordhoff Uitgevers bv

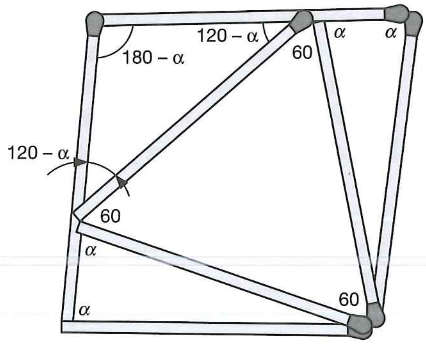
Bladzijde 185

7 Na 9 kilometer verspringt het tweede wieltje van rechts. Nadat deze negenmaal is versprongen, dus na $9 \cdot 9$ kilometer, verspringt het derde wieltje van rechts.
Na $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ kilometer verspringt het vierde wieltje van rechts.
Dus in de stand 002010 is het aantal afgelegde kilometers gelijk aan $2 \cdot 729 + 1 \cdot 9 = 1467$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

8 Van de 6 kortsten, is Piet de langste. Er zijn dus minstens 5 mensen korter dan Piet. Jan is de kortste van de 6 langsten, dus zijn er minstens 5 mensen langer dan Jan. Jan kan daarom niet 21 posities rechts van Piet staan, want dan zouden er van links naar rechts minstens $5 + 1 + 20 + 1 + 5 = 32$ mensen naast elkaar staan. Alle andere posities zijn wel mogelijk.
Hier controleren we dit alleen voor antwoord C: Jan en Piet staan naast elkaar.
Nummer de mensen van klein naar groot van 1 tot en met 30. Zet nu personen 1, 2, 3, 4 en 10 in een rij en zet in elk van de andere rijen één van de personen 5, 6, 7, 8 en 9. De rest mag willekeurig verdeeld worden over de resterende posities.
De kortsten van de rijen zijn nu 1, 5, 6, 7, 8, 9, dus Piet is nummer 9.
Jan is nummer 10, want van zijn rij is hij de langste en in alle andere rijen staat iemand met een nummer groter dan 10.
Dus antwoord E is het goede antwoord.

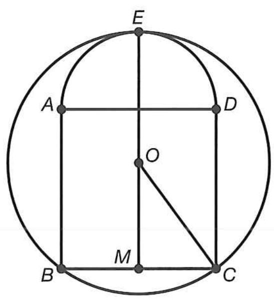
B-vragen

1 De buitenste vier lucifers vormen een parallellogram. De vier basishoeken van de twee aangegeven gelijkbenige driehoeken zijn daarom allemaal gelijk, zeg α en gelijk aan 180° minus de gevraagde hoek. De drie lucifers in het midden vormen een gelijkzijdige driehoek (met hoeken van 60°).
De som van de hoeken van een driehoek is 180°, dus
$(180° - \alpha) + 2(120° - \alpha) = 180°$. We vinden $\alpha = 80°$ zodat de gevraagde hoek gelijk is aan 100°.



2 Dat 2216 bij deling door a rest 29 geeft, betekent precies dat $2216 - 29 = 2187$ deelbaar is door a en dat a groter is dan 29 (de rest is altijd kleiner dan de deler a).
De delers van $2187 = 3^7$ die groter zijn dan 29 zijn 81, 243, 729 en 2187.
Er zijn dus 4 positieve getallen.

3 Noem het middelpunt van de omgeschreven cirkel O, het raakpunt met de kleine cirkel E en geef het midden van BC aan met M.
In $\triangle OMC$ is $OC^2 = MC^2 + OM^2$.
Omdat $OM = EM - OE = 1\frac{1}{2} - OC$ volgt hieruit dat
$OC^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1\frac{1}{2} - OC)^2$
$OC^2 = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} - 3 \cdot OC + OC^2$
$3 \cdot OC = 2\frac{1}{2}$
$OC = \frac{5}{6}$



Dus de straal van de omgeschreven cirkel is $\frac{5}{6}$.

4 We nummeren de rijen van boven naar onder 0 tot en met 27 en de kolommen van links naar rechts 0 tot en met 36. Bekijk het vakje in rij r en kolom k.
Het rode getal is hier $1 + k + 37r$ en het groene getal is $1 + r + 28k$.
Deze twee getallen zijn aan elkaar gelijk precies als $1 + k + 37r = 1 + r + 28k$

$$36r = 27k$$
$$4r = 3k$$

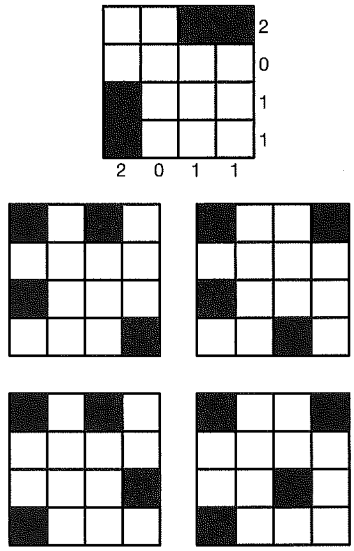
De oplossingen krijg je door voor r de drievouden 0, 3, …, 27 te nemen en voor k de bijbehorende viervouden 0, 4, …, 36.
De bijbehorende gekleurde getallen zijn $1, 1 + 115, 1 + 2 \cdot 115, \ldots, 1 + 9 \cdot 115$.
Optellen van deze tien getallen geeft de uitkomst $(1 + (1 + 9 \cdot 115)) \cdot 5 = 5185$.

© Noordhoff Uitgevers bv

A-vragen

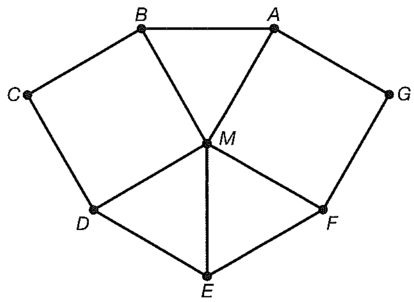
Bladzijde 186

1 Merk eerst op dat alle vakjes in de tweede rij en in de tweede kolom wit gekleurd moeten zijn. We bekijken twee gevallen, afhankelijk van de kleur van het vakje linksboven.
Als dit vakje wit is, moeten de laatste twee vakjes in de eerste rij en kolom zwart zijn. Dit legt de kleuring vast. Zie de bovenste figuur.
Als dit vakje zwart is, moet in de eerste kolom en in de eerste rij elk nog één vakje zwart gekleurd worden.
Voor elk van de $2 \cdot 2 = 4$ keuzes is er precies één oplossing. Er is dan namelijk nog één rij en één kolom die een zwart vakje mist.
Het vakje in die rij en kolom moet dus zwart worden en de rest wit, zie de onderste vier figuren.
Dus antwoord D is het goede antwoord.



2 Het jaartal van de gezochte datum begint met een cijfer dat 2 of hoger is.
We zoeken de eerste datum waarvan het jaartal met een 2 begint en alle acht de cijfers verschillend zijn. Als die bestaat is het de gezochte datum.
Voor de maand vallen 11 (twee dezelfde cijfers) en 12 (cijfer 2 is al gebruikt in het jaartal) af.
De maand (01 t/m 10) bevat dus het cijfer 0. De dag begint daarom of met een 1 of een 3.
In het tweede geval is het de 31-ste, want de 0 is al bezet.
In beide gevallen zit de 1 in de dag. Nu de 0 en 1 al bezet zijn, is het kleinst mogelijke jaartal 2345.
De kleinst mogelijke maand die we dan nog kunnen kiezen is 06, ofwel juni, met als dag de 17e. We zien dat de gevonden datum 17-06-2345 inderdaad met acht verschillende cijfers wordt geschreven.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

3 De zevenhoek kan worden opgedeeld in twee vierkanten en drie gelijkzijdige driehoeken, allemaal met zijden van lengte 2.
We weten dat de oppervlakte van zo'n vierkant gelijk is aan 4. De hoogte van de gelijkzijdige driehoeken is $\sqrt{3}$, dus de oppervlakte van elke driehoek is dan $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$.
De totale oppervlakte van de zevenhoek is dus $2 \cdot 4 + 3 \cdot \sqrt{3} = 8 + 3\sqrt{3}$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.



4 Aangezien de voorspelling van Bram fout was, heeft Bram minstens zes vragen goed.
De voorspelling van Aline was ook fout, zodat Bram hoogstens één vraag meer goed heeft dan Aline. Aline heeft dus minstens vijf vragen goed. Omdat de voorspelling van Cas fout was, heeft hij meer vragen goed dan Aline, dus minstens zes. Aline kan niet meer dan vijf vragen goed hebben. Immers, dan zou Cas minstens zeven vragen goed hebben en zijn er in totaal minstens $6 + 6 + 7 = 19$ vragen goed, zoals de docent (fout) voorspelde. We concluderen dat Aline vijf vragen goed heeft.
Aangezien de andere twee minstens zes vragen goed hebben, heeft Aline het kleinste aantal vragen goed.
Dus antwoord A is het goede antwoord.

5 Jaap kan zeker 62 getallen opschrijven, bijvoorbeeld de getallen 1 tot en met 62 (want $62 + 61 < 125$). Meer dan 62 getallen kan Jaap niet opschrijven. Immers, de getallen 25 tot en met 100 kun je opdelen in paren die samen steeds optellen tot 125: $25 + 100 = 125$, $26 + 99 = 125$, en zo verder tot en met $62 + 63 = 125$.
Van elk van die 38 paren moet hij dus minstens één getal missen. In totaal kan hij daarom niet meer dan $100 - 38 = 62$ getallen opschrijven.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

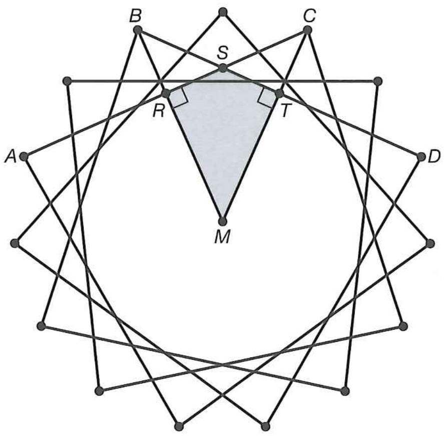
© Noordhoff Uitgevers bv

6 Door met een staartdeling $a = 11 \ldots 11$ (2011 enen) te gaan delen door 37, valt al gauw op dat 111 deelbaar is door 37. Dat feit gaan we gebruiken.
We zien nu namelijk dat het getal $1110 \ldots 0$ deelbaar is door 37, ongeacht het aantal nullen aan het eind. In het bijzonder zijn de volgende getallen deelbaar door 37: $1110 \ldots 0$ (2008 nullen), $1110 \ldots 0$ (2005 nullen), $1110 \ldots 0$ (2002 nullen), en zo verder tot 1110 (1 nul).
De som van deze getallen is $1 \ldots 10$ (2010 enen) en is dus ook deelbaar door 37.
De rest van a bij de deling door 37 is dus gelijk aan 1, want $a - 1$ is deelbaar door 37.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

Bladzijde 187

7 Na 140 seconden heeft Anne 7 rondjes afgelegd en Bob 5. De voorsprong van Anne is op dat moment twee hele rondjes. Na $\frac{140}{4} = 35$ seconden loopt Anne een half rondje voor. Dat is precies de eerste keer dat zij zo ver mogelijk van Bob verwijderd is.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

8 Noem het middelpunt van de vijftienhoek M en het snijpunt van AC en BD punt S (zie de figuur). In vierhoek $MRST$ zien we dat $\angle MRS = 90°$ en $\angle STM = 90°$. Verder zien we dat $\angle TMR = \frac{2}{15} \cdot 360° = 48°$.
De som van de hoeken van een vierhoek is 360°, dus geldt:
$\angle RST = 360° - 2 \cdot 90° - 48° = 132°$. $\angle BSC = \angle RST = 132°$
(overstaande hoeken)
Dus antwoord B is het goede antwoord.



B-vragen

1 Gegeven is dat $x = \dfrac{1}{1+x}$. We zien dat $x \neq 0$, want $0 \neq \dfrac{1}{1}$.
We kunnen dus links en rechts de breuk omkeren.
Dit geeft $\dfrac{1}{x} = x + 1$. Hieruit volgt $\dfrac{1}{x} - x = 1$, dus $x - \dfrac{1}{x} = -1$.

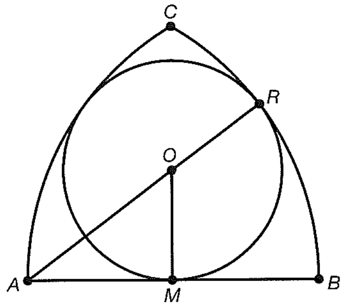
2 Bekijk drie roltrappen naast elkaar: de eerste gaat omhoog, de tweede staat stil en de derde gaat naar beneden. Als Dion de eerste trap omhoog neemt, is hij na 12 stappen boven. Raymond, die omhoog gaat op de derde trap doet er 60 stappen over en is na 12 stappen dus pas op $\frac{1}{5}$. Als een derde persoon (zeg Julian), de middelste trap neemt (ook met hetzelfde tempo), is hij na 12 stappen precies tussen Dion en Raymond in: op $\dfrac{\frac{5}{5} + \frac{1}{5}}{2} = \frac{3}{5}$ van de trap.
Hij heeft dus $\frac{5}{3} \cdot 12 = 20$ stappen nodig om boven te komen.

3 Noem de oudste padvinder A. Er zijn 5 mogelijkheden om voor hem een partner B te vinden voor de eerste dag. Vervolgens zijn er 4 mogelijke partners C voor B op de tweede dag, want hij mag niet opnieuw met A gaan. Voor C zijn er nog 3 mogelijke partners D voor de eerste dag, want hij mag niet tweemaal met B, en A is al bezet. Voor D zijn er daarna nog 2 mogelijke partners E voor de tweede dag, want B en C zijn al bezet en A kan zijn partner niet zijn omdat er dan twee padvinders overblijven die op beide dagen een paar vormen. Ten slotte is er nog 1 padvinder over die geen keuze heeft en op de eerste dag met E meegaat en op de tweede dag met A.
In totaal zijn er dus $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ manieren.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Bekijk de ingeschreven cirkel. Noem het middelpunt O en de straal r.
Het raakpunt aan AB noemen we M en het raakpunt aan boog BC noemen we R.
De drie punten A, O en R liggen op een lijn, zodat $AO = AR - OR = 1 - r$.
Verder geldt $OM = r$ en $AM = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2}$.
In $\triangle AMO$ is $AM^2 + OM^2 = AO^2$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + r^2 = (1-r)^2$$
$$\tfrac{1}{4} + r^2 = 1 - 2r + r^2$$
$$2r = \tfrac{3}{4}$$
$$r = \tfrac{3}{8}$$



© Noordhoff Uitgevers bv

Gemengde opgaven

5 Machten en exponenten

Bladzijde 188

1 **a** $x^4 \cdot \sqrt[3]{x} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{4\frac{1}{3}}$

b $\frac{x^{-3}}{x^2} = x^{-5}$

c $x \cdot \sqrt{\frac{1}{x^5}} = x \cdot \sqrt{x^{-5}} = x^1 \cdot x^{-2\frac{1}{2}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

d $\frac{1}{x} \cdot \left(\sqrt[4]{x^3}\right)^8 = x^{-1} \cdot \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^8 = x^{-1} \cdot x^6 = x^5$

e $\frac{x^3 \cdot x^{-5}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-2\frac{1}{2}}$

f $\left(x\sqrt{x}\right)^{-3} = \left(x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = \left(x^{1\frac{1}{2}}\right)^{-3} = x^{-4\frac{1}{2}}$

2 **a** $2 \cdot (5x)^{2{,}4} - 12 = 18$
$2 \cdot (5x)^{2{,}4} = 30$
$(5x)^{2{,}4} = 15$
$5x = 15^{\frac{1}{2{,}4}}$
$x = \frac{1}{5} \cdot 15^{\frac{1}{2{,}4}} \approx 0{,}618$

b $3 \cdot \sqrt[4]{x^{-5}} = 16$
$\sqrt[4]{x^{-5}} = \frac{16}{3}$
$x^{-\frac{5}{4}} = \frac{16}{3}$
$x = \left(\frac{16}{3}\right)^{-\frac{4}{5}} \approx 0{,}262$

3 **a** $y = \sqrt{2 - 5x} - 3$
$\sqrt{2 - 5x} - 3 = y$
$\sqrt{2 - 5x} = y + 3$
kwadrateren geeft
$2 - 5x = y^2 + 6y + 9$
$-5x = y^2 + 6y + 7$
$x = -\frac{1}{5}y^2 - 1\frac{1}{5}y - 1\frac{2}{5}$

b $B = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[5]{6A - 1} + 2$
$\frac{3}{4} \cdot \sqrt[5]{6A - 1} + 2 = B$
$\frac{3}{4} \cdot \sqrt[5]{6A - 1} = B - 2$
$\sqrt[5]{6A - 1} = \frac{4}{3}(B - 2)$
$(6A - 1)^{\frac{1}{5}} = 1\frac{1}{3}B - 2\frac{2}{3}$
$6A - 1 = \left(1\frac{1}{3}B - 2\frac{2}{3}\right)^5$
$6A = \left(1\frac{1}{3}B - 2\frac{2}{3}\right)^5 + 1$
$A = \frac{1}{6} \cdot \left(1\frac{1}{3}B - 2\frac{2}{3}\right)^5 + \frac{1}{6}$

c $4P\sqrt{Q} - \sqrt{Q} = 3$
$\sqrt{Q}(4P - 1) = 3$
$\sqrt{Q} = \frac{3}{4P - 1}$
kwadrateren geeft
$Q = \frac{9}{(4P - 1)^2}$

d $x = 2t \cdot \sqrt[3]{t}$ substitueren in $y = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$ geeft
$y = 3\left(2t \cdot \sqrt[3]{t}\right)^2 \cdot \sqrt{2t \cdot \sqrt[3]{t}} = 3\left(2t \cdot t^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{2t \cdot t^{\frac{1}{3}}} = 3\left(2t^{1\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{2t^{1\frac{1}{3}}} = 3 \cdot 4t^{2\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{2} \cdot t^{\frac{2}{3}} = 12\sqrt{2}t^{3\frac{1}{3}}$

4 **a** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(10 - 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x\right) = 10 - 3 \cdot 0 = 10$
Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 10$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b noemer is 0 geeft $8 - x = 0$

$$-x = -8$$
$$x = 8$$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 8$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(6 + \frac{3x}{8-x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(6 + \frac{3}{\frac{8}{x} - 1}\right) = 6 + \frac{3}{0-1} = 6 - 3 = 3$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

c $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-2 + 4\cdot\left(1\tfrac{1}{6}\right)^x\right) = -2 - 4\cdot 0 = -2$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$.

d noemer is 0 geeft $3 - 2x = 0$

$$-2x = -3$$
$$x = 1\tfrac{1}{2}$$

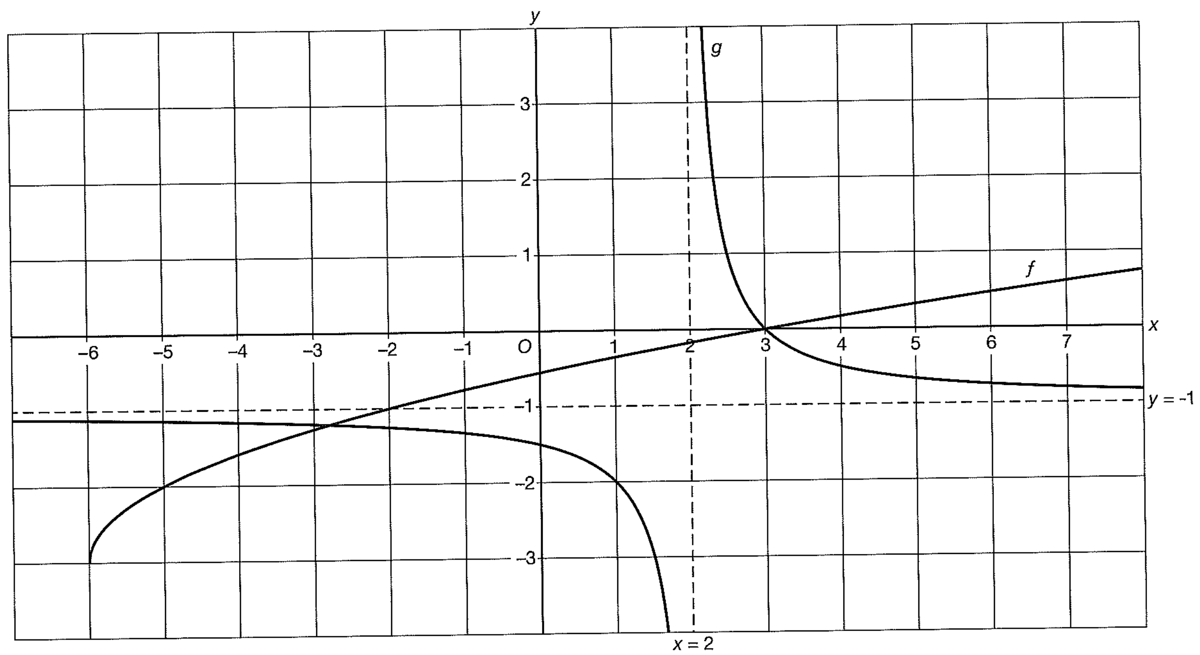
Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 1\tfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to-\infty} j(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+6x}{3-2x} + 3^{x+1} - 2\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{2}{x}+6}{\frac{3}{x}-2} + 3\cdot 3^x - 2\right) = \frac{0+6}{0-2} + 3\cdot 0 - 2 = -3 - 2 = -5$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -5$.

5 **a** Voer in $y_1 = \sqrt{x+6} - 3$ en $y_2 = \frac{1}{x-2} - 1$.

x	-6	-5	-2	0	1	3	4	6	8
$f(x)$	-3	-2	-1	-0,6	-0,4	0	0, 2	0, 5	0,7
$g(x)$	-1,1	-1,2	-1,3	-1,5	-0,4	0	-0,5	-0,8	-0,8



$B_f = [-3, \rightarrow\rangle$

b Intersect geeft $x \approx -2{,}791$ en $x = 3$.

$f(x) \leq g(x)$ geeft $-6 \leq x \leq -2{,}791 \vee 2 < x \leq 3$

c $f(x) = 1$ geeft $\sqrt{x+6} - 3 = 1$

$$\sqrt{x+6} = 4$$
$$x + 6 = 16$$
$$x = 10$$

$f(x) \leq 1$ geeft $-6 \leq x \leq 10$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $f(-2) = \sqrt{-2+6} - 3 = -1$

$x \leq -2$ geeft $-3 \leq f(x) \leq -1$

e $g(x) = -5$ geeft $\frac{1}{x-2} - 1 = -5$

$\frac{1}{x-2} = -4$

$-4(x-2) = 1$

$-4x + 8 = 1$

$-4x = -7$

$x = 1\frac{3}{4}$

$g(x) \geq -5$ geeft $x \leq 1\frac{3}{4} \vee x > 2$

f $g(0) = \frac{1}{0-2} - 1 = -1\frac{1}{2}$ en $g(6) = \frac{1}{6-2} - 1 = -\frac{3}{4}$.

$0 \leq x \leq 6$ geeft $g(x) \leq -1\frac{1}{2} \vee g(x) \geq -\frac{3}{4}$

Bladzijde 189

6 **a** noemer is 0 geeft $2x + 3 = 0$

$2x = -3$

$x = -1\frac{1}{2}$

Dus de verticale asymptoot van de grafieken van f en g is de lijn $x = -1\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x+2}{2x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{4+0}{2+0} = 2$$

Dus de horizontale asymptoot van de grafieken van f is de lijn $y = 2$.

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{|4x+2|}{2x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x+2}{2x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{4+0}{2+0} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{|4x+2|}{2x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-(4x+2)}{2x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x-2}{2x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-4-0}{2+0} = -2$$

Dus de horizontale asymptoten van de grafiek van g zijn de lijnen $\begin{cases} y = 2 \text{ voor } x \to \infty \\ y = -2 \text{ voor } x \to -\infty \end{cases}$

b $g(x) = \frac{|4x+2|}{2x+3} = \frac{4x+2}{2x+3}$ voor $4x + 2 \geq 0$ ofwel $x \geq -\frac{1}{2}$

Dus $f(x) = g(x)$ voor $x \geq -\frac{1}{2}$.

c $g(x) = \begin{cases} \frac{4x+2}{2x+3} \text{ voor } 4x+2 \geq 0 \text{ ofwel } x \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{-4x-2}{2x+3} \text{ voor } 4x+2 < 0 \text{ ofwel } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

$g(x) = 1$ geeft $\frac{4x+2}{2x+3} = 1 \vee \frac{-4x-2}{2x+3} = 1$

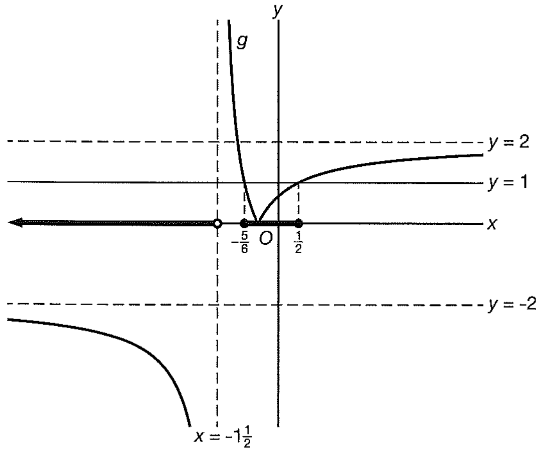
$4x + 2 = 2x + 3 \vee -4x - 2 = 2x + 3$

$2x = 1 \vee -6x = 5$

$x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{5}{6}$

vold. vold.

© Noordhoff Uitgevers bv



$g(x) \leq 1$ geeft $x < -1\frac{1}{2} \vee -\frac{5}{6} \leq x \leq \frac{1}{2}$

7 **a** $30 - 3^{3x+1} = 3$
$-3^{3x+1} = -27$
$3^{3x+1} = 3^3$
$3x + 1 = 3$
$3x = 2$
$x = \frac{2}{3}$

b $2^{x^2-2} = 32$
$2^{x^2-2} = 2^5$
$x^2 - 2 = 5$
$x^2 = 7$
$x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$

c $2 \cdot 3^{x-1} + 5 = 59$
$2 \cdot 3^{x-1} = 54$
$3^{x-1} = 27$
$3^{x-1} = 3^3$
$x - 1 = 3$
$x = 4$

d $4^{3x+1} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$
$(2^2)^{3x+1} = 2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
$2^{6x+2} = 2^{-2\frac{1}{2}}$
$6x + 2 = -2\frac{1}{2}$
$6x = -4\frac{1}{2}$
$x = -\frac{3}{4}$

e $5^{1-3x} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{25}$
$5^{1-3x} = 5^{-1} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$
$5^{1-3x} = 5^{-\frac{1}{3}}$
$1 - 3x = -\frac{1}{3}$
$-3x = -1\frac{1}{3}$
$x = \frac{4}{9}$

f $4^{3x-x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$
$(2^2)^{3x-x^2} = (2^{-1})^{3-x}$
$2^{6x-2x^2} = 2^{-3+x}$
$6x - 2x^2 = -3 + x$
$2x^2 - 5x - 3 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$
$x = \dfrac{5-7}{4} \vee x = \dfrac{5+7}{4}$
$x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$

g $3^{x-3} + 3^{x-4} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$
$3^x \cdot 3^{-3} + 3^x \cdot 3^{-4} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$
$\frac{1}{27} \cdot 3^x + \frac{1}{81} \cdot 3^x = \frac{4}{3}\sqrt{3}$
$\frac{4}{81} \cdot 3^x = \frac{4}{3}\sqrt{3}$
$3^x = 27\sqrt{3}$
$3^x = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
$3^x = 3^{3\frac{1}{2}}$
$x = 3\frac{1}{2}$

h $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 9^{2x-5}$
$(3^{-1})^{x+2} = (3^2)^{2x-5}$
$3^{-x-2} = 32^{4x-10}$
$-x - 2 = 4x - 10$
$-5x = -8$
$x = 1\frac{3}{5}$

i $2^{x+2} - 2^{x-1} = 14\sqrt{2}$
$2^x \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2^{-1} = 14\sqrt{2}$
$4 \cdot 2^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x = 14\sqrt{2}$
$3\frac{1}{2} \cdot 2^x = 14\sqrt{2}$
$2^x = 4\sqrt{2}$
$2^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
$2^x = 2^{2\frac{1}{2}}$
$x = 2\frac{1}{2}$

j $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+2} + 2^{x+3} = 4\frac{1}{8}$
$(2^{-1})^{-x+2} + 2^x \cdot 2^3 = 4\frac{1}{8}$
$2^{x-2} + 8 \cdot 2^x = 4\frac{1}{8}$
$2^x \cdot 2^{-2} + 8 \cdot 2^x = 4\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4} \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x = 4\frac{1}{8}$
$8\frac{1}{4} \cdot 2^x = 4\frac{1}{8}$
$2^x = \frac{1}{2}$
$2^x = 2^{-1}$
$x = -1$

8 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}096$
$g_{10\,\text{jaar}} = 1{,}096^{10} \approx 2{,}50$
De toename is 150% per 10 jaar.

b $g_{\text{maand}} = 1{,}096^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}008$
De toename is 0,8% per maand.

c $g_{\text{dag}} = 0{,}83$
$g_{\text{week}} = 0{,}83^7 \approx 0{,}271$
De afname is 72,9% per week.

d $g_{\text{uur}} = 0{,}83^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}992$
De afname is 0,8% per uur.

9 **a** $\left.\begin{array}{l} T = a \cdot R^{1{,}5} \\ R = 5{,}28 \text{ en } T = 4{,}5 \end{array}\right\} a \cdot 5{,}28^{1{,}5} = 4{,}5$

$a = \dfrac{4{,}5}{5{,}28^{1{,}5}} \approx 0{,}37$

b $R = 35{,}6$ geeft $T = 0{,}37 \cdot 35{,}6^{1{,}5} \approx 78{,}6$
Dus de omlooptijd T is ongeveer 78,6 dagen.

c $R_{\text{Rhea}} = 5{,}28$ geeft $R_{\text{Titan}} = \frac{25}{11} \cdot 5{,}28 = 12$

$T = 0{,}37 \cdot 12^{1{,}5} \approx 15{,}38$

De omlooptijd is $\dfrac{15{,}38}{4{,}5} \approx 3{,}4$ keer zo groot.

Alternatieve oplossing

De omlooptijd is $\left(\frac{25}{11}\right)^{1{,}5} \approx 3{,}4$ keer zo groot.

d $0{,}37R^{1{,}5} = T$

$R^{1{,}5} = \dfrac{1}{0{,}37} \cdot T$

$R = \left(\dfrac{1}{0{,}37} \cdot T\right)^{\frac{1}{1{,}5}} = \left(\dfrac{1}{0{,}37}\right)^{\frac{1}{1{,}5}} \cdot T^{\frac{1}{1{,}5}} \approx 1{,}94 \cdot T^{0{,}67}$

Dus $R = 1{,}94 \cdot T^{0{,}67}$.

e 15 uur geeft $T = \frac{15}{24}$.

$R = 1{,}94 \cdot \left(\frac{15}{24}\right)^{0{,}67} \approx 1{,}42$
De straal van de baan is $1{,}42 \times 10^5$ km.

Bladzijde 190

10 **a** $y = 2^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 3} y = 3 \cdot 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, -2)} f(x) = 3 \cdot 2^x - 2$

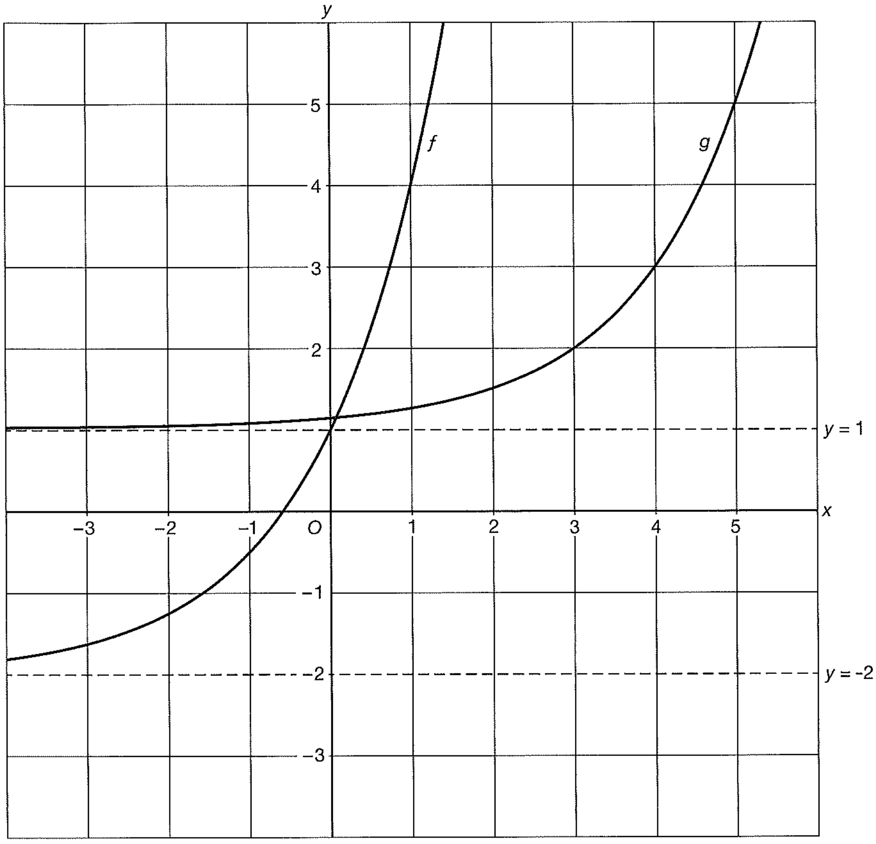
$y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (3, 1)} g(x) = 2^{x-3} + 1$

b Voer in $y_1 = 3 \cdot 2^x - 2$ en $y_2 = 2^{x-3} + 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1,6	-1,3	-0,5	1	4	10

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1,1	1,1	1,3	1,5	2	3	5	9

© Noordhoff Uitgevers bv



$B_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$ en $B_g = \langle 1, \rightarrow \rangle$.

c Intersect geeft $x \approx 0{,}06$ en $y \approx 1{,}13$, dus het snijpunt is (0,06; 1,13).

d $f(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $3 \cdot 2^x - 2 = -\frac{1}{2}$

$$3 \cdot 2^x = 1\tfrac{1}{2}$$
$$2^x = \tfrac{1}{2}$$
$$2^x = 2^{-1}$$
$$x = -1$$

e $g(7) = 2^{7-3} + 1 = 16 + 1 = 17$

Voor $x \leq 7$ is $1 < g(x) \leq 17$.

f Voer in $y_3 = 9$.

Intersect met y_1 en y_3 geeft $x_A \approx 1{,}874$.

Intersect met y_2 en y_3 geeft $x_B = 6$.

$AB = 6 - 1{,}784 \approx 4{,}13$

11 **a** Van 1 mei tot 21 mei zijn 20 dagen.

Van 21 mei tot en met 31 mei zijn 11 dagen.

Op 31 mei zijn er $1{,}05^{20} \cdot 0{,}92^{11} \approx 1{,}06$ miljard bacteriën.

b Noem de groeifactor per dag vanaf 21 mei g.

Er geldt $1{,}05^{20} \cdot g^{11} = 1$

$$g^{11} = \frac{1}{1{,}05^{20}}$$

$$g = \left(\frac{1}{1{,}05^{20}}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 0{,}915$$

Dus de afname per dag zou 8,5% moeten zijn.

c Stel toename n dagen, dan is er $31 - n$ dagen afname.

Er geldt $1{,}05^n \cdot 0{,}9^{31-n} = 1$.

Voer in $y_1 = 1{,}05^x \cdot 0{,}9^{31-x}$ en $y_2 = 1$.

Intersect geeft $x \approx 21{,}2$.

Hierbij hoort 22 mei.

12 **a**
$$\left.\begin{array}{l} \text{Stel } P_b = c \cdot g^d \\ g_{2\text{ cm}} = 0{,}5 \text{ geeft } g_{\text{cm}} = 0{,}5^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}707 \\ c = 100 \end{array}\right\} P_b = 100 \cdot 0{,}707^d$$

b $P_b = 10$ geeft $100 \cdot 0{,}707^d = 10$
Voer in $y_1 = 100 \cdot 0{,}707^x$ en $y_2 = 10$.
Intersect geeft $x \approx 6{,}64$.
Dus om 90% van de intensiteit te absorberen, is 66 mm bot nodig.

c $P_l = 50$ geeft $100 \cdot 0{,}03125^d = 50$.
Voer in $y_1 = 100 \cdot 0{,}03125^x$ en $y_2 = 50$.
Intersect geeft $x = 0{,}2$.
Dus de halveringdikte is 2 mm.

d $P_l = 10$ geeft $100 \cdot 0{,}03125^d = 10$
Voer in $y_1 = 100 \cdot 0{,}03125^x$ en $y_2 = 10$.
Intersect geeft $x \approx 0{,}664$.
Om 90% van de intensiteit te absorberen, is 6,6 mm lood nodig.
Dus je hebt $\frac{66}{6{,}6} = 10$ keer minder lood dan bot nodig.

6 Differentiaalrekening

Bladzijde 191

13 **a** $f(x) = (x^2 + 1)^4$ geeft $f'(x) = 4(x^2 + 1)^3 \cdot 2x = 8x(x^2 + 1)^3$

b $g(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 7}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

geeft $g'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + \frac{7}{4}x^{-1\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{7}{4x\sqrt{x}} = \dfrac{3x^2 + 4x + 7}{4x\sqrt{x}}$

c $h(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot (3x^2 - 5x)$ geeft
$h'(x) = 2(x^2 + 1) \cdot 2x \cdot (3x^2 - 5x) + (x^2 + 1)^2 \cdot (6x - 5) = 4x(x^2 + 1)(3x^2 - 5x) + (6x - 5)(x^2 + 1)^2$

d $j(x) = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x^3 + 2} = \dfrac{x^{2\frac{3}{4}}}{x^3 + 2}$ geeft

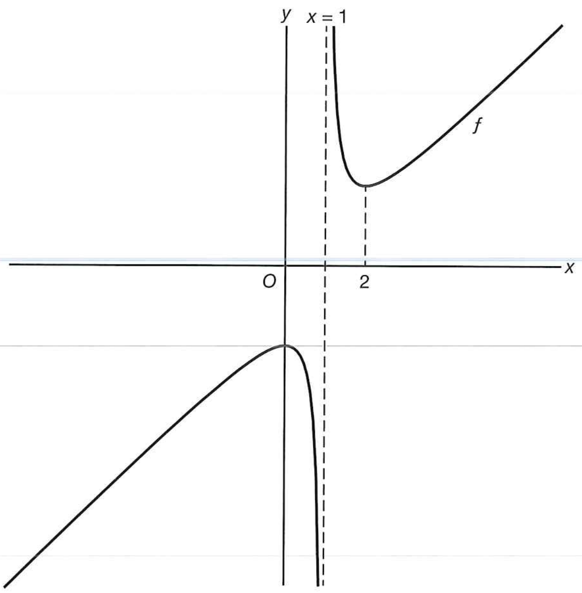
$$j'(x) = \frac{(x^3 + 2) \cdot 2\frac{3}{4}x^{1\frac{3}{4}} - x^{2\frac{3}{4}} \cdot 3x^2}{(x^3 + 2)^2} = \frac{2\frac{3}{4}x^{4\frac{3}{4}} + 5\frac{1}{2}x^{1\frac{3}{4}} - 3x^{4\frac{3}{4}}}{(x^3 + 2)^2} = \frac{-\frac{1}{4}x^{4\frac{3}{4}} + 5\frac{1}{2}x^{1\frac{3}{4}}}{(x^3 + 2)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3} + 5\frac{1}{2}x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{(x^3 + 2)^2} = \frac{-x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3} + 22x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{4(x^3 + 2)^2}$$

14 **a** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x - 1)(2x - 2) - (x^2 - 2x + 2) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x = 0$
$x(x - 2) = 0$
$x = 0 \vee x = 2$



max. is $f(0) = -2$ en min. is $f(2) = 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b De vergelijking $f(x) = p$ heeft geen oplossingen voor $-2 < p < 2$.

c Stel k: $y = ax + b$.

$$a = f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 2 \cdot -2}{(-2-1)^2} = \tfrac{8}{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \tfrac{8}{9}x + b \\ f(-2) = \dfrac{10}{-3} = -3\tfrac{1}{3} \text{ dus } A\left(-2, -3\tfrac{1}{3}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \tfrac{8}{9} \cdot -2 + b = -3\tfrac{1}{3} \\ -1\tfrac{7}{9} + b = -3\tfrac{1}{3} \\ b = -1\tfrac{5}{9} \end{array}$$

Dus k: $y = \tfrac{8}{9}x - 1\tfrac{5}{9}$.

15 **a** $f(x) = \dfrac{6}{(3x+5) \cdot \sqrt{3x+5}} = \dfrac{6}{(3x+5)^{1\frac{1}{2}}} = 6(3x+5)^{-1\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = -9(3x+5)^{-2\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{-27}{(3x+5)^{2\frac{1}{2}}} = \frac{-27}{(3x+5)^2 \cdot \sqrt{3x+5}}$$

b $g(x) = (2x+6) \cdot \sqrt{x^2+6x+10}$ geeft

$$g'(x) = 2 \cdot \sqrt{x^2+6x+10} + (2x+6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+6x+10}} \cdot (2x+6) = \frac{4(x^2+6x+10)}{2\sqrt{x^2+6x+10}} + \frac{(2x+6)^2}{2\sqrt{x^2+6x+10}}$$

$$= \frac{4x^2+24x+40+4x^2+24x+36}{2\sqrt{x^2+6x+10}} = \frac{8x^2+48x+76}{2\sqrt{x^2+6x+10}} = \frac{4x^2+24x+38}{\sqrt{x^2+6x+10}}$$

c $h(x) = \dfrac{3x}{(x^2-6x)^3} = 3x(x^2-6x)^{-3}$ geeft

$$h'(x) = 3 \cdot (x^2-6x)^{-3} + -9x(x^2-6x)^{-4} \cdot (2x-6) = \frac{3}{(x^2-6x)^3} + \frac{-9x(2x-6)}{(x^2-6x)^4}$$

$$= \frac{3(x^2-6x)}{(x^2-6x)^4} + \frac{-18x^2+54x}{(x^2-6x)^4} = \frac{3x^2-18x-18x^2+54x}{(x^2-6x)^4} = \frac{-15x^2+36x}{(x^2-6x)^4}$$

d $j(x) = x^4 \cdot (2x^2-1)^3$ geeft $j'(x) = 4x^3 \cdot (2x^2-1)^3 + x^4 \cdot 3(2x^2-1)^2 \cdot 4x = 4x^3(2x^2-1)^3 + 12x^5(2x^2-1)^2$

e $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ geeft

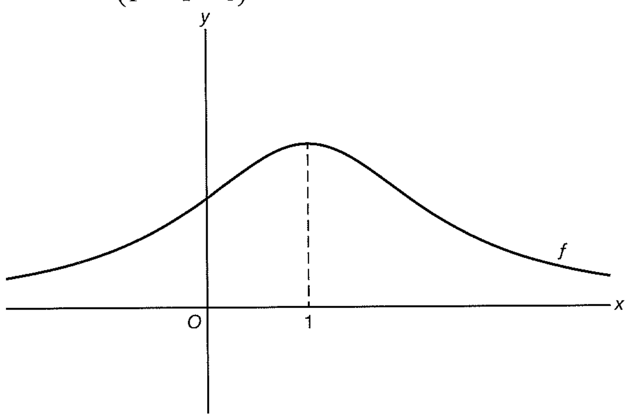
$$k'(x) = \frac{\sqrt{x^3+1} \cdot 1 - x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^3+1}} \cdot 3x^2}{x^3+1} = \frac{2(x^3+1) - 3x^3}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}} = \frac{2x^3+2-3x^3}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}} = \frac{-x^3+2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}$$

f $l(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+3x}{x\sqrt{x}} = \dfrac{x^{1\frac{1}{2}}+3x}{x^{1\frac{1}{2}}} = 1 + 3x^{-\frac{1}{2}} = 1 + 3\sqrt{x}$ geeft $l'(x) = 3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

16 **a** $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3-x+6}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x^3-x+6) \cdot 1 - (x+2) \cdot (3x^2-1)}{(x^3-x+6)^2} = \frac{x^3-x+6-3x^3+x-6x^2+2}{(x^3-x+6)^2} = \frac{-2x^3-6x^2+8}{(x^3-x+6)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 8}{(1^3-1+6)^2} = \frac{0}{36} = 0$$



In de schets is te zien dat de grafiek van f een top heeft voor $x = 1$, dus f heeft een extreme waarde voor $x = 1$.

b $(x+2)(x^2-2x+3) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2x^2 - 4x + 6 = x^3 - x + 6$

c $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3 - x + 6} = \dfrac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+3)} = \dfrac{1}{x^2-2x+3}$ mits $x \neq -2$

De grafiek van f heeft een perforatie voor $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^3 - x + 6} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+3)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x^2-2x+3} = \frac{1}{11}$

De perforatie is dus $\left(-2, \frac{1}{11}\right)$.

d $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3 - x + 6} = \dfrac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+3)} = \dfrac{1}{x^2-2x+3}$ mits $x \neq -2$ geeft

$f'(x) = \dfrac{(x^2-2x+3)\cdot 0 - 1\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2} = \dfrac{-2x+2}{(x^2-2x+3)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $-2x + 2 = 0$

$-2x = -2$

$x = 1$

voldoet

17 $f_p(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2px^3 + px^2 - 4x - 2$

$f_p'(x) = 2x^3 - 6px^2 + 2px - 4$

$f_p''(x) = 6x^2 - 12px + 2p$

$f_p''(x) = 0$ geeft $6x^2 - 12px + 2p = 0$

$\left.\begin{array}{l}\text{twee buigpunten als } D > 0 \\ D = (-12p)^2 - 4\cdot 6\cdot 2p = 144p^2 - 48p\end{array}\right\}\ 144p^2 - 48p > 0$

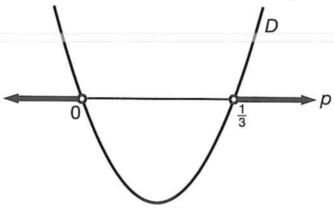
$D = 0$ geeft $144p^2 - 48p = 0$

$3p^2 - p = 0$

$p(3p - 1) = 0$

$p = 0 \vee 3p = 1$

$p = 0 \vee p = \frac{1}{3}$



Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < 0 \vee p > \frac{1}{3}$.

18 $f_p(x) = \dfrac{10x + p}{x^2 + 1}$ geeft

$f_p'(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot 10 - (10x+p)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{10x^2 + 10 - 20x^2 - 2px}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-10x^2 - 2px + 10}{(x^2+1)^2}$

$f_p'(1) = \text{rc}_k$ geeft $\dfrac{-10\cdot 1^2 - 2p\cdot 1 + 10}{(1^2+1)^2} = -1\frac{1}{2}$

$\dfrac{-2p}{4} = -\dfrac{3}{2}$

$-4p = -12$

$p = 3$

$f_3(x) = \dfrac{10x + 3}{x^2 + 1}$

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = -1\frac{1}{2}x + b \\ f_3(1) = \dfrac{13}{2} = 6\frac{1}{2}, \text{ dus } A\left(1, 6\frac{1}{2}\right)\end{array}\right\}\ \begin{array}{l} -1\frac{1}{2}\cdot 1 + b = 6\frac{1}{2} \\ b = 8 \end{array}$

Dus $k\colon y = -1\frac{1}{2}x + 8$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 192

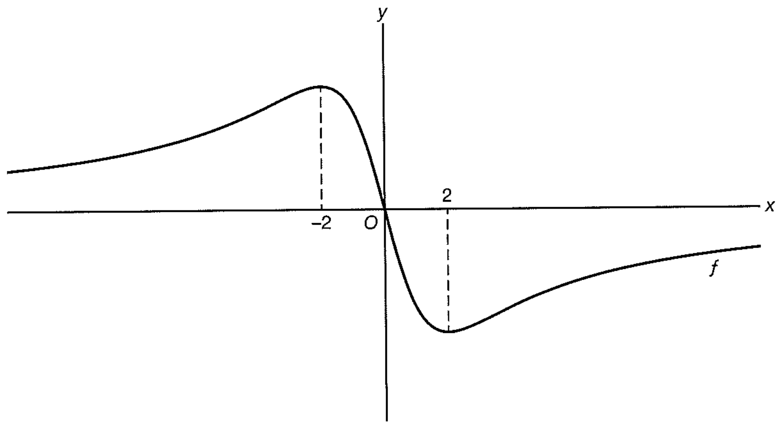
19 a $f(x) = \frac{-10x}{x^2+4}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2+4)\cdot -10 - -10x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-10x^2 - 40 + 20x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{10x^2-40}{(x^2+4)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $10x^2 - 40 = 0$

$10x^2 = 40$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$



max. is $f(-2) = 2\frac{1}{2}$ en min. is $f(2) = -2\frac{1}{2}$.

$f(x) = 0$ geeft $-10x = 0$, dus $x = 0$.

De grafiek snijdt de x-as alleen in (0, 0), dus $B_f = [-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}]$.

b $f(x) = p$ heeft twee oplossingen voor $-2\frac{1}{2} < p < 0 \vee 0 < p < 2\frac{1}{2}$.

20 a $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+2}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{(x+2)\cdot 0 - 1 \cdot 1}{(x+2)^2} = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(0) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ f(0) = 1\frac{1}{2} \text{ dus } A\left(0, 1\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} b = 1\frac{1}{2}$$

Dus k: $y = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}$.

b $f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{1}{(x+2)^2} = 0$

$\frac{1}{(x+2)^2} = 1$

$(x+2)^2 = 1$

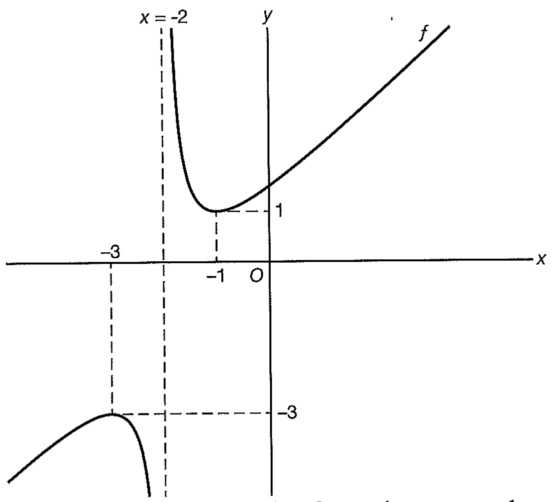
$x + 2 = -1 \vee x + 2 = 1$

$x = -3 \vee x = -1$

$f(-3) = -3$ en $f(-1) = 1$, dus de horizontale raaklijnen zijn $y = -3$ en $y = 1$.

De afstand tussen deze lijnen is $1 - -3 = 4$.

c



De vergelijking $f(x) = p$ heeft precies twee oplossingen voor $p < -3 \vee p > 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $f'(x) = \frac{15}{16}$ geeft $1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{15}{16}$

$\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{16}$

$(x+2)^2 = 16$

$x + 2 = 4 \vee x + 2 = -4$

$x = 2 \vee x = -6$

21 **a** $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 - px^2 - 4x + 1$ geeft $f_p'(x) = -x^2 - 2px - 4$

$f_p'(4) = 0$ geeft $-16 - 8p - 4 = 0$

$-8p = 20$

$p = -2\frac{1}{2}$

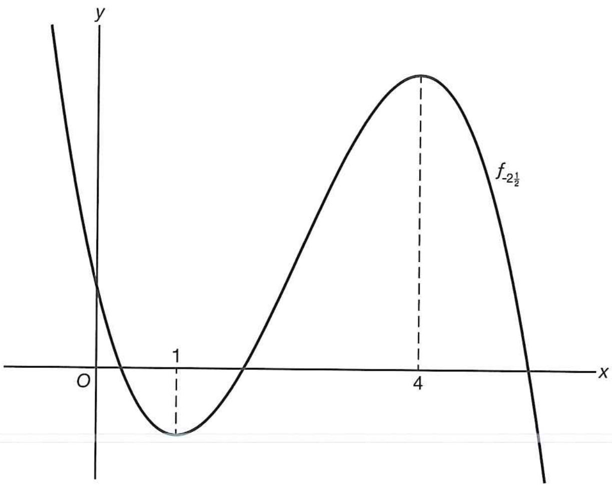
$f_{-2\frac{1}{2}}'(x) = -x^2 + 5x - 4$

$f_{-2\frac{1}{2}}'(x) = 0$ geeft $-x^2 + 5x - 4 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1 \vee x = 4$



$f_{-2\frac{1}{2}}(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = -\frac{5}{6}$

Het andere extreem is min. is $f_{-2\frac{1}{2}}(1) = -\frac{5}{6}$.

b f_p heeft twee extreme waarden dus $f_p'(x) = 0$ heeft twee oplossingen.

$\left.\begin{array}{l} D > 0 \\ D = (-2p)^2 - 4 \cdot -1 \cdot -4 = 4p^2 - 16 \end{array}\right\} 4p^2 - 16 > 0$

$4p^2 > 16$

$p^2 > 4$

$p < -2 \vee p > 2$

Dus f_p heeft twee extreme waarden voor $p < -2 \vee p > 2$.

c $f_p'(x) = 0$ geeft $-x^2 - 2px - 4 = 0$

$-2px = x^2 + 4$

$\left.\begin{array}{l} \text{Voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \frac{x^2+4}{-2x} \\ y = -\frac{1}{3}x^3 - px^2 - 4x + 1 \end{array}\right\} y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2+4}{2x} \cdot x^2 - 4x + 1$

$y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + 2x - 4x + 1$

$y = \frac{1}{6}x^3 - 2x + 1$

$x = 0$ geeft $f_p'(0) = 4 \neq 0$, dus geen top.

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = \frac{1}{6}x^3 - 2x + 1$.

22 **a** $f_p(x) = x\sqrt{x} - p\sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}} - p\sqrt{x}$ geeft

$f_p'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - p \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - p}{2\sqrt{x}}$

$f_p'(16) = 5$ geeft $\frac{3 \cdot 16 - p}{2\sqrt{16}} = 5$

$\frac{48 - p}{8} = 5$

$48 - p = 40$

$-p = -8$

$p = 8$

© Noordhoff Uitgevers bv

$$\left.\begin{array}{l} f_8(x) = x\sqrt{x} - 8\sqrt{x} \\ f_8(16) = 16\sqrt{16} - 8\sqrt{16} = 32 \text{ dus } A(16, 32) \\ k\text{: } y = 5x + q \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 16 + q = 32 \\ 80 + q = 32 \\ q = -48 \end{array}$$

Dus $p = 8$ en $q = -48$.

b $f_p{}'(x) = 0$ geeft $3x - p = 0$

$$-p = -3x$$

$$\left.\begin{array}{l} p = 3x \\ y = x\sqrt{x} - p\sqrt{x} \end{array}\right\} y = x\sqrt{x} - 3x\sqrt{x}$$

$$y = -2x\sqrt{x}$$

Dus de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -2x\sqrt{x}$.

c $f_p{}'(x) = 0$ geeft $p = 3x$, dus $x = \frac{1}{3}p$.

$$\left.\begin{array}{l} y_{\text{top}} = f_p\left(\frac{1}{3}p\right) = \frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} - p\sqrt{\frac{1}{3}p} = -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} \\ y_{\text{top}} = -2 \end{array}\right\} -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} = -2$$

$$\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}p\right)^{1\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{1}{3}p = 1$$

$$p = 3$$

7 Goniometrische functies

Bladzijde 193

23 $A(\cos(40°), \sin(40°)) \approx A(0{,}766; 0{,}643)$
$B(\cos(160°), \sin(160°)) \approx B(-0{,}940; 0{,}342)$
$C(\cos(-80°), \sin(-80°)) \approx C(0{,}174; -0{,}985)$

24 **a** $A\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right), \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

b $C\left(\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right), \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)\right) = C\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$

c $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\beta = -\frac{3}{4}\pi$

d De langste cirkelboog BC is $2\pi - \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi = 1\frac{5}{12}\pi$.

25 **a** $\cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$3x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

b $\sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{1}{3}x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{3}x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 6\pi \vee x = 2\frac{3}{4}\pi + k \cdot 6\pi$

c $1 + \tan\left(3x - \frac{3}{4}\pi\right) = 0$

$\tan\left(3x - \frac{3}{4}\pi\right) = -1$

$3x - \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$

$3x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\pi\right)\cdot\cos(2x)=0$

$\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\pi\right)=0 \vee \cos(2x)=0$

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\pi=k\cdot\pi \vee 2x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$

$\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot\pi \vee x=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi$

$x=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee x=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi$

e $3\tan\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\pi\right)=\sqrt{3}$

$\tan\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\pi$

$\frac{1}{4}x=k\cdot\pi$

$x=k\cdot 4\pi$

f $4\cos^2\left(2\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)=3$

$\cos^2\left(2\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{3}{4}$

$\cos\left(2\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)=\sqrt{\frac{3}{4}} \vee \cos\left(2\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)=-\sqrt{\frac{3}{4}}$

$\cos\left(2\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \cos\left(2\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$2\pi x-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2\pi x-\frac{1}{2}\pi=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2\pi x-\frac{1}{2}\pi=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2\pi x-\frac{1}{2}\pi=-\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$2\pi x=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2\pi x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2\pi x=1\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2\pi x=-\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=\frac{1}{3}+k\cdot 1 \vee x=\frac{1}{6}+k\cdot 1 \vee x=\frac{2}{3}+k\cdot 1 \vee x=-\frac{1}{6}+k\cdot 1$

Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x=\frac{1}{3}+k\cdot\frac{1}{2} \vee x=\frac{1}{6}+k\cdot\frac{1}{2}$.

26 **a** $\cos\left(2x-\frac{1}{2}\pi\right)=\cos(\pi-x)$

$2x-\frac{1}{2}\pi=\pi-x+k\cdot 2\pi \vee 2x-\frac{1}{2}\pi=-(\pi-x)+k\cdot 2\pi$

$3x=1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2x-\frac{1}{2}\pi=-\pi+x+k\cdot 2\pi$

$x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi \vee x=-\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

b $\sin\left(2x+\frac{1}{3}\pi\right)=\sin\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)$

$2x+\frac{1}{3}\pi=x-\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2x+\frac{1}{3}\pi=\pi-\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)+k\cdot 2\pi$

$x=-\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2x+\frac{1}{3}\pi=\pi-x+\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=-\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 3x=1\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=-\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee x=\frac{7}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

c $\sin(\pi x)=\sin(2\pi x)$

$\pi x=2\pi x+k\cdot 2\pi \vee \pi x=\pi-2\pi x+k\cdot 2\pi$

$-\pi x=k\cdot 2\pi \vee 3\pi x=\pi+k\cdot 2\pi$

$x=k\cdot 2 \vee x=\frac{1}{3}+k\cdot\frac{2}{3}$

d $\cos(10\pi x)=\cos(5\pi x-6\pi)$

$10\pi x=5\pi x-6\pi+k\cdot 2\pi \vee 10\pi x=-(5\pi x-6\pi)+k\cdot 2\pi$

$5\pi x=-6\pi+k\cdot 2\pi \vee 10\pi x=-5\pi x+6\pi+k\cdot 2\pi$

$x=-1\frac{1}{5}+k\cdot\frac{2}{5} \vee 15\pi x=6\pi+k\cdot 2\pi$

$x=k\cdot\frac{2}{5} \vee x=\frac{2}{5}+k\cdot\frac{2}{15}$

$x=k\cdot\frac{2}{5} \vee x=k\cdot\frac{2}{15}$

Deze antwoorden kunnen (dit is niet verplicht) nog samengenomen worden tot $x=k\cdot\frac{2}{15}$.

27 **a** $\sin\left(1\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$1\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee 1\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\pi=\pi-\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$

$1\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \vee 1\frac{1}{2}x=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 1\frac{1}{3}\pi \vee x=\frac{5}{9}\pi+k\cdot 1\frac{1}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x=\frac{1}{3}\pi \vee x=1\frac{2}{3}\pi \vee x=\frac{5}{9}\pi \vee x=1\frac{8}{9}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\cos^3(2\frac{1}{2}x) + \cos(2\frac{1}{2}x) = 0$

$\cos(2\frac{1}{2}x) \cdot (\cos^2(2\frac{1}{2}x) + 1) = 0$

$\cos(2\frac{1}{2}x) = 0 \vee \cos^2(2\frac{1}{2}x) = -1$

$2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ geen oplossing

$x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{5}\pi \vee x = \frac{3}{5}\pi \vee x = \pi \vee x = 1\frac{2}{5}\pi \vee x = 1\frac{4}{5}\pi$

c $\sin^2(1\frac{1}{2}x) = \sin(1\frac{1}{2}x) + 2$

$\sin^2(1\frac{1}{2}x) - \sin(1\frac{1}{2}x) - 2 = 0$

$(\sin(1\frac{1}{2}x) - 2)(\sin(1\frac{1}{2}x) + 1) = 0$

$\sin(1\frac{1}{2}x) = 2 \vee \sin(1\frac{1}{2}x) = -1$

geen opl. $\quad 1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \pi$

d $\tan(2x + \frac{1}{3}\pi) = \tan(3x - \frac{1}{6}\pi)$

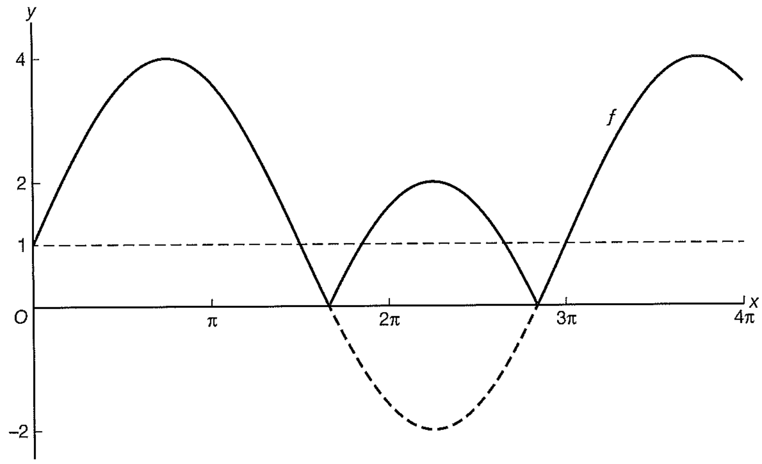
$2x + \frac{1}{3}\pi = 3x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$

$-x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

28 **a** Voer in $y_1 = |1 + 3\sin(\frac{2}{3}x)|$.



b De periode is $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$.

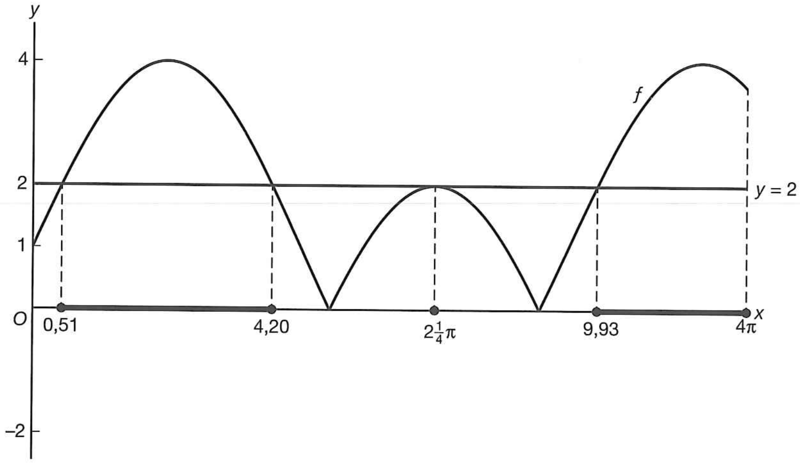
Dus de grafiek heeft een horizontale raaklijn voor $x = \frac{1}{4} \cdot 3\pi = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4} \cdot 3\pi = 2\frac{1}{4}\pi$ en

$x = 1\frac{1}{4} \cdot 3\pi = 3\frac{3}{4}\pi$.

De coördinaten zijn $(\frac{3}{4}\pi, 4), (2\frac{1}{4}\pi, 2)$ en $(3\frac{3}{4}\pi, 4)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Voer in $y_2 = 2$.
Intersect geeft $x \approx 0{,}51, x \approx 4{,}20, x = 2\frac{1}{4}\pi$ (zie vraag b) en $x \approx 9{,}93$.



$f(x) \geq 2$ geeft $0{,}51 \leq x \leq 4{,}20 \vee x = 2\frac{1}{4}\pi \vee 9{,}93 \leq x \leq 4\pi$

d De maximale helling is waar de grafiek van $y = 1 + 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat, dus als geldt $f(x) = 1$, bijvoorbeeld voor $x = 0$.
Voor y_1 is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 2$, dus de maximale helling is 2.

Bladzijde 194

29 **a** $y = \cos(x)$
$\downarrow$ translatie $(0, -2)$
$y = -2 + \cos(x)$
$\downarrow$ verm. x-as, 3
$y = -6 + 3\cos(x)$

b $y = \cos(x)$
$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 0)$
$y = \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
$y = \cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$

c $y = \cos(x)$
$\downarrow$ verm. x-as, 3
$y = 3\cos(x)$
$\downarrow$ translatie $(0, -2)$
$y = -2 + 3\cos(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
$y = -2 + 3\cos(2x)$

d $y = \cos(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
$y = \cos(2x)$
$\downarrow$ verm. x-as, 3
$y = 3\cos(2x)$
$\downarrow$ translatie $(0, -2)$
$y = -2 + 3\cos(2x)$

e $y = \cos(x)$
$\downarrow$ verm. x-as, 3
$y = 3\cos(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
$y = 3\cos(2x)$
$\downarrow$ translatie $(0, -2)$
$y = -2 + 3\cos(2x)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
$y = -2 + 3\cos(4x)$

f $y = \cos(x)$
$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 0)$
$y = \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
$\downarrow$ verm. x-as, 3
$y = 3\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
$y = 3\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$
$\downarrow$ translatie $(0, -2)$
$y = -2 + 3\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$

30 **a** $\sin\left(4x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(4x - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(4x - \frac{5}{6}\pi\right)$

b $-\cos\left(3x + \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(3x + 1\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(3x + 1\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(3x + 1\frac{2}{3}\pi\right)$

c $3\sin^2(x) - 2\cos(x) = 3(1 - \cos^2(x)) - 2\cos(x) = 3 - 3\cos^2(x) - 2\cos(x) = -3\cos^2(x) - 2\cos(x) + 3$

d $3\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) - 2\cos^2(x) = 3\sin(x) - 2(1 - \sin^2(x)) = 3\sin(x) - 2 + 2\sin^2(x) = 2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

31 **a** $N = a + b\sin(c(t-d))$

$a = \dfrac{40+0}{2} = 20$

$b = 40 - 20 = 20$

Periode is $2 \cdot (4 - -2) = 12$, dus $c = \dfrac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = -2$, dus $d = -2$.
Dus $N = 20 + 20\sin\left(\frac{1}{6}\pi(t+2)\right)$.

b $N = 20 - 20\cos\left(\frac{1}{6}\pi(t-d)\right)$
Een laagste punt is $(7, 0)$, dus $d = 7$.
Dus $N = 20 - 20\cos\left(\frac{1}{6}\pi(t-7)\right)$.

32 **a** $y = \cos(x)$

$\downarrow$ verm. x-as, 20

$y = 20\cos(x)$

$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{\pi}$

$y = 20\cos(\pi x)$

$\downarrow$ translatie (0, 15)

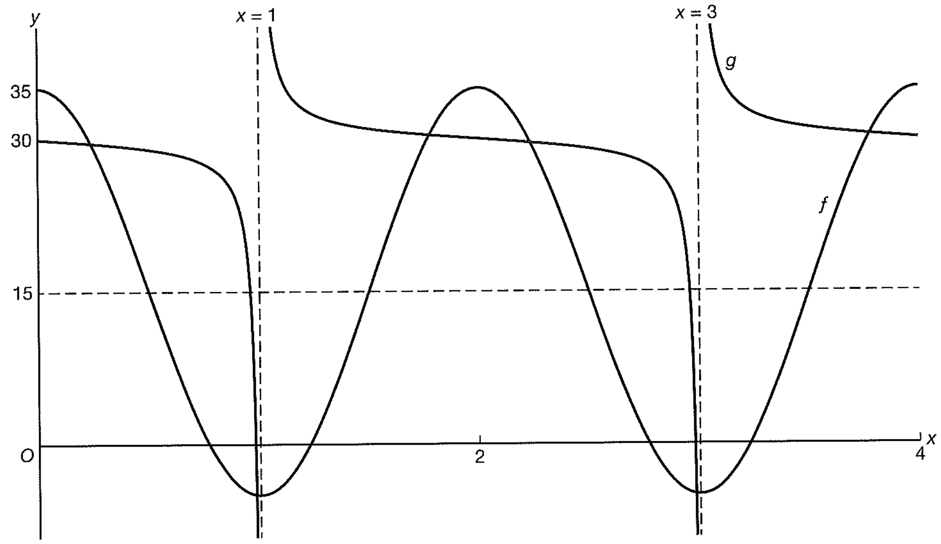
$f(x) = 15 + 20\cos(\pi x)$

b beginpunt (0, 30)

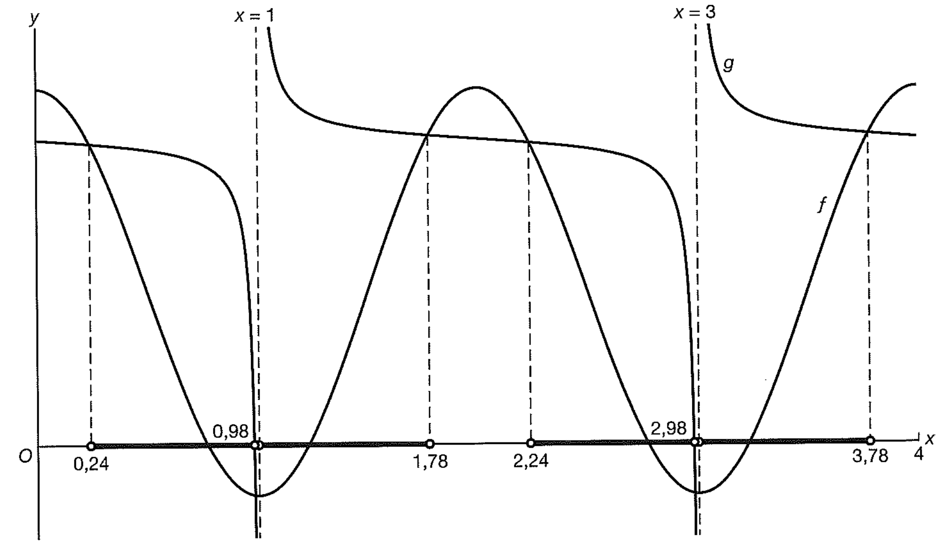
periode is $\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 2$

De asymptoten zijn $x = 1$ en $x = 3$.

c Voer in $y_1 = 15 + 20\cos(\pi x)$ en $y_2 = 30 - \tan\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$.



d Intersect geeft $x \approx 0{,}24, x \approx 0{,}98, x \approx 1{,}78, x \approx 2{,}24, x \approx 2{,}98$ en $x \approx 3{,}78$.



$f(x) < g(x)$ geeft $0{,}24 < x < 0{,}98 \vee 1 < x < 1{,}78 \vee 2{,}24 < x < 2{,}98 \vee 3 < x < 3{,}78$

33 **a** $f(x) = 3 - \sin\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$ geeft $f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

b $g(x) = x^4 \cdot \cos(3x - 4)$ geeft
$g'(x) = 4x^3 \cdot \cos(3x - 4) + x^4 \cdot -\sin(3x - 4) \cdot 3 = 4x^3 \cdot \cos(3x - 4) - 3x^4 \cdot \sin(3x - 4)$

c $h(x) = \dfrac{1}{\sin(x) + \cos(x)}$ geeft $h'(x) = \dfrac{(\sin(x) + \cos(x)) \cdot 0 - 1 \cdot (\cos(x) - \sin(x))}{(\sin(x) + \cos(x))^2} = \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2}$

d $j(x) = 2\pi x - \dfrac{3}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi x - 1\right)$ geeft $j'(x) = 2\pi - \dfrac{3}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi x - 1\right) \cdot \frac{1}{3}\pi = 2\pi - \cos\left(\frac{1}{3}\pi x - 1\right)$

e $k(x) = \dfrac{x^2 + \cos(2x)}{\sin(2x)}$ geeft

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{\sin(2x) \cdot (2x - \sin(2x) \cdot 2) - (x^2 + \cos(2x)) \cdot \cos(2x) \cdot 2}{\sin^2(2x)} \\ &= \frac{2x\sin(2x) - 2\sin^2(2x) - 2x^2\cos(2x) - 2\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} \\ &= \frac{2x\sin(2x) - 2x^2\cos(2x) - 2(\sin^2(2x) + \cos^2(2x))}{\sin^2(2x)} \\ &= \frac{2x\sin(2x) - 2x^2\cos(2x) - 2}{\sin^2(2x)} \end{aligned}$$

f $l(x) = 4\cos^4(x)$ geeft $l'(x) = 16\cos^3(x) \cdot -\sin(x) = -16\sin(x)\cos^3(x)$

g $m(x) = x\sin^2(x)$ geeft $m'(x) = 1 \cdot \sin^2(x) + x \cdot 2\sin(x) \cdot \cos(x) = \sin^2(x) + 2x\sin(x)\cos(x)$

h $n(x) = 5x^2 \tan(3x)$ geeft $n'(x) = 10x \cdot \tan(3x) + 5x^2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 = 10x\tan(3x) + \dfrac{15x^2}{\cos^2(3x)}$

Bladzijde 195

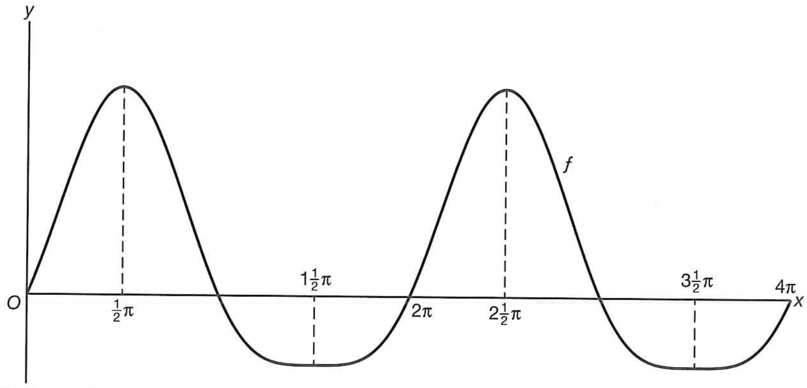
34 **a** $f(x) = 2\sin(x) + \sin^2(x)$ geeft $f'(x) = 2\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)$
Stel l: $y = ax + b$.
$a = f'(\pi) = 2\cos(\pi) + 2\sin(\pi)\cos(\pi) = 2 \cdot -1 + 2 \cdot 0 \cdot -1 = -2$

$$\left.\begin{aligned} &y = -2x + b \\ &f(\pi) = 2\sin(\pi) + \sin^2(\pi) = 0, \text{ dus } A(\pi, 0) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &-2 \cdot \pi + b = 0 \\ &b = 2\pi \end{aligned}$$

Dus l: $y = -2x + 2\pi$.

b $f'(x) = 0$ geeft $2\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$
$2\cos(x) \cdot (1 + \sin(x)) = 0$
$\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = -1$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

x op $[0, 4\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 2\frac{1}{2}\pi \vee x = 3\frac{1}{2}\pi$.



$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = f\left(2\frac{1}{2}\pi\right) = 3$ en $f\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = f\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = -1$, dus $B_f = [-1, 3]$.

8 Meetkunde met coördinaten

35 **a** $\begin{cases} x = 2t + \frac{1}{2} \\ y = \frac{4}{5}t + p \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x = 4t + 1 \\ 5y = 4t + 5p \end{cases}$

$$\frac{\begin{aligned} 2x &= 4t + 1 \\ 5y &= 4t + 5p \end{aligned}}{2x - 5y = 1 - 5p} -$$

$$\left.\begin{aligned} &2x - 5y = 1 - 5p \text{ geeft } \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = \frac{1 - 5p}{10} \\ &\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\frac{1 - 5p}{10} = 1 \\ &1 - 5p = 10 \\ &-5p = 9 \\ &p = -1\tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\begin{cases} x = 2t + p \\ y = -1\frac{1}{2}t - 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x = 6t + 3p \\ 4y = -6t - 4 \end{cases}$ +

$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 3p - 4 \\ 3x + 4y = 2p \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3p - 4 = 2p \\ p = 4 \end{array}$

c $\begin{cases} x = 3t - p \\ y = pt - 4 \end{cases} \begin{vmatrix} p \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} px = 3pt - p^2 \\ 3y = 3pt - 12 \end{cases}$ −

$\left.\begin{array}{l} px - 3y = -p^2 + 12 \\ \text{door } (3, 14) \end{array}\right\} \begin{array}{l} p \cdot 3 - 3 \cdot 14 = -p^2 + 12 \\ 3p - 42 = -p^2 + 12 \\ p^2 + 3p - 54 = 0 \\ (p - 6)(p + 9) = 0 \\ p = 6 \vee p = -9 \end{array}$

36 **a** $3x + y = 6$, ofwel $y = -3x + 6$ geeft $\text{rc}_k = -3$
$\tan(\alpha) = -3$ geeft $\alpha = -71{,}56...°$
$y = -2x + 3$ geeft $\text{rc}_l = -2$
$\tan(\beta) = -2$ geeft $\beta = -63{,}43...°$
$\beta - \alpha = -63{,}43... - -71{,}56...° \approx 8{,}1°$
De gevraagde hoek is 8,1°.

b $\text{rc}_m = \dfrac{4 - 0}{0 - 3} = -1\frac{1}{3}$
$\tan(\alpha) = -1\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -53{,}13...°$
$\text{rc}_n = \dfrac{3 - 1}{3 - 1} = 1$
$\tan(\beta) = 1$ geeft $\beta = 45°$
$\beta - \alpha = 45° - -53{,}13...° = 98{,}13...°$
De gevraagde hoek is $180° - 98{,}13...° \approx 81{,}9°$.

c $y = \frac{1}{2}x + 2$ geeft $\text{rc}_p = \frac{1}{2}$
$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26{,}56...°$
$y = \frac{1}{3}x - 6$ geeft $\text{rc}_q = \frac{1}{3}$
$\tan(\beta) = \frac{1}{3}$ geeft $\beta = 18{,}43...°$
$\alpha - \beta = 26{,}56...° - 18{,}43...° \approx 8{,}1°$
De gevraagde hoek is 8,1°.

37 **a** $k: \dfrac{x}{p + 1} + \dfrac{y}{3p} = 1$
Dus $k: 3px + (p + 1)y = 3p(p + 1)$.

b $\left.\begin{array}{l} 3px + (p + 1)y = 3p(p + 1) \\ \text{door } C(-1, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3p \cdot -1 + (p + 1) \cdot 6 = 3p(p + 1) \\ -3p + 6p + 6 = 3p^2 + 3p \\ -3p^2 = -6 \\ p^2 = 2 \\ p = \sqrt{2} \vee p = -\sqrt{2} \end{array}$

c $l: 2x + 3y = 6$
$3y = -2x + 6$
$y = -\frac{2}{3}x + 2$
Dus $\text{rc}_l = -\frac{2}{3}$.
$\text{rc}_k = \dfrac{3p - 0}{0 - (p + 1)} = -\dfrac{3p}{p + 1}$

$\text{rc}_k \cdot \text{rc}_p = -1$ geeft $-\dfrac{3p}{p + 1} \cdot -\frac{2}{3} = -1$

$\dfrac{2p}{p + 1} = -1$
$2p = -(p + 1)$
$2p = -p - 1$
$3p = -1$
$p = -\frac{1}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $d(A,B) = \sqrt{(0-(p+1))^2 + (3p-0)^2} = \sqrt{p^2+2p+1+9p^2} = \sqrt{10p^2+2p+1}$

$d(A,B) = 3$ geeft $\sqrt{10p^2+2p+1} = 3$

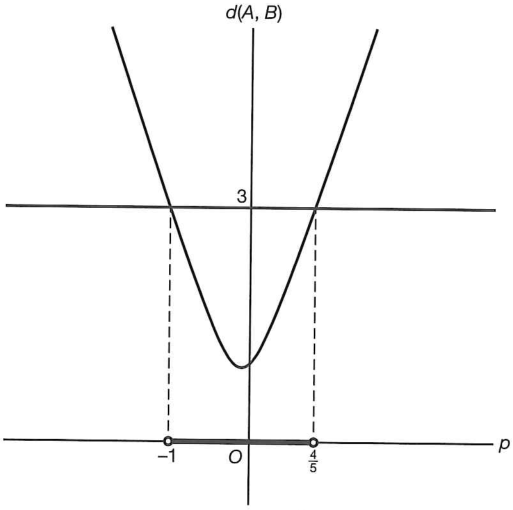
kwadrateren geeft

$10p^2 + 2p + 1 = 9$

$10p^2 + 2p - 8 = 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 10 \cdot -8 = 324$

$p = \dfrac{-2+18}{20} = \frac{4}{5} \vee p = \dfrac{-2-18}{20} = -1$



$d(A,B) < 3$ geeft $-1 < p < \frac{4}{5}$

e $m \perp k$ en m door O, dus $m: (p+1)x - 3py = 0$.

$M(\frac{1}{2}(p+1+0), \frac{1}{2}(0+3p))$, dus $M(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}p)$.

$\left.\begin{array}{l}(p+1)x - 3py = 0 \\ \text{door } M(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}p)\end{array}\right\} (p+1)\cdot(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}) - 3p \cdot 1\frac{1}{2}p = 0$

$\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}p^2 = 0$

$-4p^2 + p + \frac{1}{2} = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot -4 \cdot \frac{1}{2} = 9$

$p = \dfrac{-1+3}{-8} = -\frac{1}{4} \vee p = \dfrac{-1-3}{-8} = \frac{1}{2}$

38 **a** $d(A,B) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

b c_1 heeft middelpunt $M(2, 3)$ en straal $r = \sqrt{10}$.

$d(A,M) = \sqrt{(2-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$d(A,c_1) = r - d(A,M) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$

c $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$

$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 0$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

c_2 heeft middelpunt $N(2, -1)$ en straal $r = \sqrt{5}$.

$d(A,N) = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$d(A,c_2) = d(A,N) - r = \sqrt{26} - \sqrt{5}$

d l staat loodrecht op k, dus $l: 4x - 3y = c$.

$\left.\begin{array}{l}4x - 3y = c \\ \text{door } A(3,4)\end{array}\right\} c = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0$

Dus $l: 4x - 3y = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

l snijden met k geeft $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases} \left| \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right|$ geeft $\begin{cases} 16x - 12y = 0 \\ 9x + 12y = 45 \end{cases}$ +

$$25x = 45$$

$$\left.\begin{matrix} x = 1\tfrac{4}{5} \\ 4x - 3y = 0 \end{matrix}\right\} \; 4 \cdot 1\tfrac{4}{5} - 3y = 0$$

$$-3y = -7\tfrac{1}{5}$$

$$y = 2\tfrac{2}{5}$$

Dus het snijpunt is $S\left(1\tfrac{4}{5}, 2\tfrac{2}{5}\right)$.

$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(1\tfrac{4}{5} - 3)^2 + (2\tfrac{2}{5} - 4)^2} = \sqrt{(\tfrac{6}{5})^2 + (\tfrac{8}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{36}{25} + \tfrac{64}{25}} = \sqrt{4} = 2$

39 **a** $\begin{cases} x = \tfrac{1}{2}t + 6 \\ y = 4t - 4 \end{cases} \left| \begin{matrix} 8 \\ 1 \end{matrix} \right|$ geeft $\begin{cases} 8x = 4t + 48 \\ y = 4t - 4 \end{cases}$ −

$$8x - y = 52$$

Dus k: $8x - y = 52$.

b $l \perp m$, dus l: $3x + 2y = c$.

$\left.\begin{matrix} 3x + 2y = c \\ \text{door } A(1, 2) \end{matrix}\right\} c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

Dus l: $3x + 2y = 7$.

c r gaat door O en B en staat loodrecht op n.

$\text{rc}_r = \dfrac{2 - 0}{3 - 0} = \tfrac{2}{3}$, dus $\text{rc}_n = -1\tfrac{1}{2}$.

$\left.\begin{matrix} n: y = -1\tfrac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(3, 2) \end{matrix}\right\} -1\tfrac{1}{2} \cdot 3 + b = 2$

$$-4\tfrac{1}{2} + b = 2$$

$$b = 6\tfrac{1}{2}$$

Dus n: $y = -1\tfrac{1}{2}x + 6\tfrac{1}{2}$.

d q: $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{-3} = 1$ geeft q: $3x - 5y = 15$

$\left.\begin{matrix} p // q, \text{ dus } p: 3x - 5y = c \\ \text{door } C(3, -1) \end{matrix}\right\} c = 3 \cdot 3 - 5 \cdot -1 = 14$

Dus p: $3x - 5y = 14$.

Bladzijde 196

40 **a** De middelloodlijnen van de zijden van een driehoek gaan door één punt. Dit punt is het middelpunt van de omgeschreven cirkel. De afstand van het middelpunt van de omgeschreven cirkel tot één van de hoekpunten van de driehoek is de straal van de omgeschreven cirkel. Wanneer het middelpunt en de straal van de omgeschreven cirkel bekend zijn, is de vergelijking van de cirkel op te stellen.

b $\text{rc}_{AB} = \dfrac{1 - 8}{7 - 6} = -7$ en $k \perp AB$, dus $\text{rc}_k = \tfrac{1}{7}$.

N is het midden van AB, dus $N\left(\tfrac{1}{2}(6 + 7), \tfrac{1}{2}(8 + 1)\right)$ ofwel $N\left(6\tfrac{1}{2}, 4\tfrac{1}{2}\right)$.

$\left.\begin{matrix} k: y = \tfrac{1}{7}x + b \\ \text{door } N(6\tfrac{1}{2}, 4\tfrac{1}{2}) \end{matrix}\right\} \tfrac{1}{7} \cdot 6\tfrac{1}{2} + b = 4\tfrac{1}{2}$

$$\tfrac{13}{14} + b = 4\tfrac{1}{2}$$

$$b = 3\tfrac{4}{7}$$

Dus k: $y = \tfrac{1}{7}x + 3\tfrac{4}{7}$.

$\text{rc}_{AC} = \dfrac{4 - 8}{-2 - 6} = \tfrac{1}{2}$ en $l \perp AC$, dus $\text{rc}_l = -2$.

P is het midden van AC, dus $P\left(\tfrac{1}{2}(6 + -2), \tfrac{1}{2}(8 + 4)\right)$ ofwel $N(2, 6)$.

$\left.\begin{matrix} l: y = -2x + b \\ \text{door } P(2, 6) \end{matrix}\right\} -2 \cdot 2 + b = 6$

$$-4 + b = 6$$

$$b = 10$$

Dus l: $y = -2x + 10$.

© Noordhoff Uitgevers bv

k en l snijden geeft $\frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7} = -2x + 10$

$2\frac{1}{7}x = 6\frac{3}{7}$

$x = 3$

$x = 3$ geeft $y = -2 \cdot 3 + 10 = 4$, dus $M(3, 4)$.

$d(M, A) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Dus c: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

41 **a** c_1 gaat door $A(0, 2)$ en $B(0, 8)$, dus het middelpunt M ligt op de lijn $y = 5$.
c_1 raakt de x-as in $C(4, 0)$, dus M ligt op de lijn $x = 4$.
Dus is $M(4, 5)$ en is de straal gelijk aan 5.
Dit geeft c_1: $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$.
Het middelpunt N van c_2 is $N(0, 5)$ en de straal is gelijk aan 3.
Dit geeft c_2: $x^2 + (y-5)^2 = 9$.

b $3x + 4y = p$ geeft $4y = -3x + p$, dus $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}p$.

$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 25$

$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

Substitutie van $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}p$ in $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$ geeft

$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}p\right)^2 - 8x - 10 \cdot \left(-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}p\right) + 16 = 0$

$x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{8}px + \frac{1}{16}p^2 - 8x + 7\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}p + 16 = 0$

$1\frac{9}{16}x^2 + (-\frac{1}{2} - \frac{3}{8}p)x + \frac{1}{16}p^2 - 2\frac{1}{2}p + 16 = 0$

$25x^2 + (-8 - 6p)x + p^2 - 40p + 256 = 0$

$D = (-8-6p)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (p^2 - 40p + 256) = 64 + 96p + 36p^2 - 100p^2 + 4000p - 25600$

$= -64p^2 + 4096p - 25536$

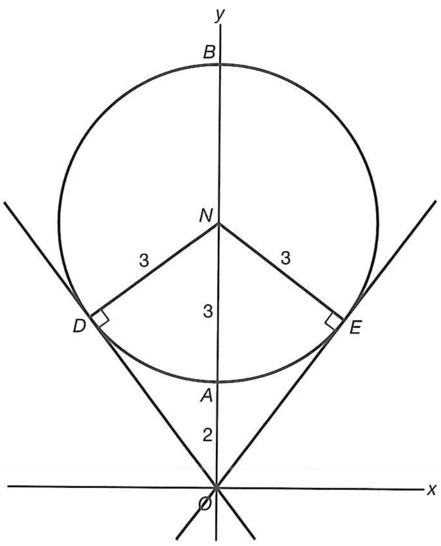
Raken, dus $D = 0$ geeft $-64p^2 + 4096p - 25536 = 0$

$p^2 - 64p + 399 = 0$

$D = (-64)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 399 = 2500$

$p = \dfrac{64 - 50}{2} = 7 \vee p = \dfrac{64 + 50}{2} = 57$

c



In $\triangle DON$ is $\sin(\angle DON) = \dfrac{DN}{ON} = \frac{3}{5}$ geeft $\angle DON = 36{,}86...°$.

De hoek tussen de raaklijnen is $2 \cdot 36{,}86...° \approx 74°$.

d Een pv van c_2 is $x = 3\cos(t) \wedge y = 5 + 3\sin(t)$.
Het midden van $P(3\cos(t), 5 + 3\sin(t))$ en $C(4, 0)$ is

$Q\left(\dfrac{3\cos(t) + 4}{2}, \dfrac{5 + 3\sin(t) + 0}{2}\right) = Q(2 + 1\frac{1}{2}\cos(t), 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sin(t))$.

Dus Q ligt op de cirkel $(x-2)^2 + \left(y - 2\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5y + 6\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

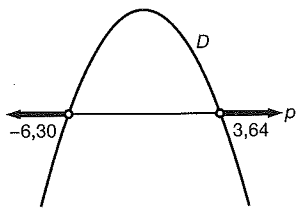
$x^2 + y^2 - 4x - 5y + 8 = 0$

Dus c_3: $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 8 = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

42 Een pv van c_1 is $x = 4 + 2\cos(t) \wedge y = -3 + 2\sin(t)$.
Het midden van $P(4 + 2\cos(t), -3 + 2\sin(t))$ en $A(0, -6)$ is
$$Q\left(\frac{4 + 2\cos(t) + 0}{2}, \frac{-3 + 2\sin(t) - 6}{2}\right) = Q(2 + \cos(t), -4\tfrac{1}{2} + \sin(t)).$$
Het midden van $P(4 + 2\cos(t), -3 + 2\sin(t))$ en $B(6, 0)$ is
$$R\left(\frac{4 + 2\cos(t) + 6}{2}, \frac{-3 + 2\sin(t) + 0}{2}\right) = R(5 + \cos(t), -1\tfrac{1}{2} + \sin(t)).$$
Het midden van $P(4 + 2\cos(t), -3 + 2\sin(t))$ en O is
$$S\left(\frac{4 + 2\cos(t) + 0}{2}, \frac{-3 + 2\sin(t) + 0}{2}\right) = S(2 + \cos(t), -1\tfrac{1}{2} + \sin(t)).$$
Het punt T is het midden van zijde QR, dus
$$T\left(\frac{2 + \cos(t) + 5 + \cos(t)}{2}, \frac{-4\tfrac{1}{2} + \sin(t) + -1\tfrac{1}{2} + \sin(t)}{2}\right) = T\left(3\tfrac{1}{2} + \cos(t), -3 + \sin(t)\right).$$
Het zwaartepunt ligt op de zwaartelijn ST zo, dat geldt $TZ : SZ = 1 : 2$, dus
$$Z\left(\frac{2 \cdot \left(3\tfrac{1}{2} + \cos(t)\right) + 1 \cdot (2 + \cos(t))}{3}, \frac{2 \cdot (-3 + \sin(t)) + 1 \cdot \left(-1\tfrac{1}{2} + \sin(t)\right)}{3}\right) = Z(3 + \cos(t), -2\tfrac{1}{2} + \sin(t))$$
Dus z ligt op de cirkel $(x - 3)^2 + \left(y + 2\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 5y + 6\tfrac{1}{4} = 1$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 5y + 14\tfrac{1}{4} = 0$$
Dus c_3: $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 14\tfrac{1}{4} = 0$.

43 **a** $x - 3y = q$ geeft $3y = x - q$, dus $y = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}q$.
Substitutie van $y = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}q$ in $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ geeft
$x^2 + \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}q\right)^2 + 2x + 4 \cdot \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}q\right) - 5 = 0$
$x^2 + \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{2}{9}qx + \tfrac{1}{9}q^2 + 2x + 1\tfrac{1}{3}x - 1\tfrac{1}{3}q - 5 = 0$
$1\tfrac{1}{9}x^2 + \left(3\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{9}q\right)x + \tfrac{1}{9}q^2 - 1\tfrac{1}{3}q - 5 = 0$
$10x^2 + (30 - 2q)x + q^2 - 12q - 45 = 0$
$D = (30 - 2q)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (q^2 - 12q - 45) = 900 - 120q + 4q^2 - 40q^2 + 480q + 1800 = -36q^2 + 360q + 2700$
Raken, dus $D = 0$ geeft $-36q^2 + 360q + 2700 = 0$
$$q^2 - 10q - 75 = 0$$
$$(q + 5)(q - 15) = 0$$
$$q = -5 \vee q = 15$$
b $3x + y = p$ geeft $y = -3x + p$
Substitutie van $y = -3x + p$ in $x^2 + y^2 + px + 4y - 5 = 0$ geeft
$x^2 + (-3x + p)^2 + px + 4 \cdot (-3x + p) - 5 = 0$
$x^2 + 9x^2 - 6px + p^2 + px - 12x + 4p - 5 = 0$
$10x^2 + (-12 - 5p)x + p^2 + 4p - 5 = 0$
$D = (-12 - 5p)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (p^2 + 4p - 5) = 144 + 120p + 25p^2 - 40p^2 - 160p + 200 = -15p^2 - 40p + 344$
Raken dus $D < 0$ geeft $-15p^2 - 40p + 344 < 0$
Voer in $y_1 = -15x^2 - 40x + 344$.
Optie zero geeft $x \approx -6{,}30$ en $x \approx 3{,}64$.



$D < 0$ geeft $p < -6{,}30 \vee p > 3{,}64$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 197

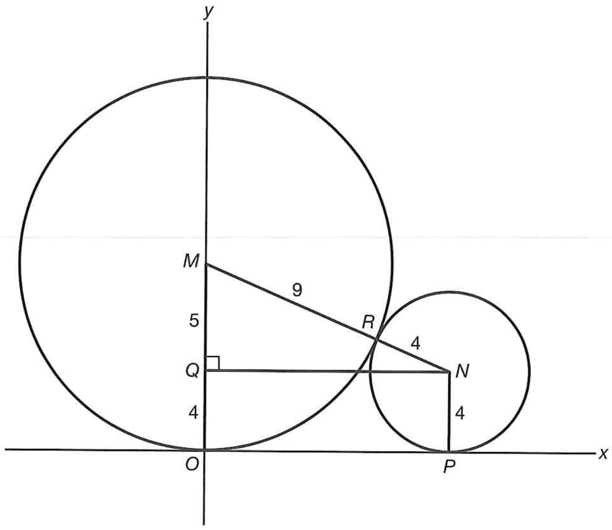
44 **a** In $\triangle QNM$ is $QN^2 + QM^2 = MN^2$

$QN^2 + 5^2 = 13^2$

$QN^2 = 169 - 25 = 144$

$QN = 12$

$O(OPNM) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 9) \cdot 12 = 78$



b In $\triangle QNM$ is $QN^2 + QM^2 = MN^2$

$QN^2 + (r - s)^2 = (r + s)^2$

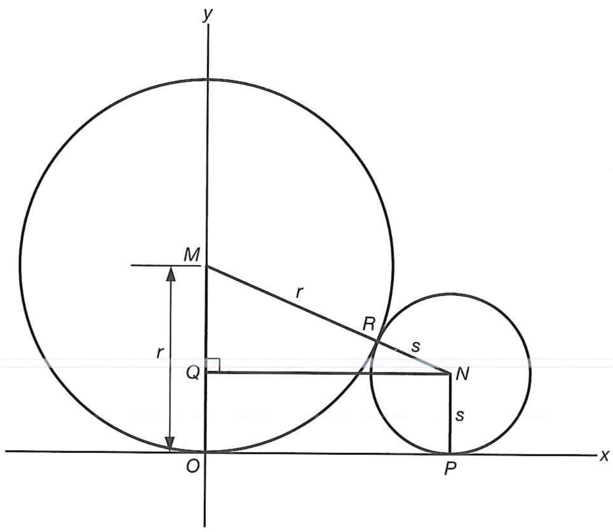
$QN^2 = (r + s)^2 - (r - s)^2$

$QN^2 = r^2 + 2rs + s^2 - (r^2 - 2rs + s^2)$

$QN^2 = 4rs$

$QN = 2\sqrt{rs}$

$O(OPNM) = \frac{1}{2} \cdot (r + s) \cdot 2\sqrt{rs} = (r + s)\sqrt{rs}$



c In $\triangle QNM$ is $QM^2 + QN^2 = MN^2$

$(r - s)^2 + OP^2 = MN^2$

$(r - s)^2 + 15^2 = 25^2$

$(r - s)^2 = 625 - 225$

$(r - s)^2 = 400$

$r - s = 20$

$MN = 25$ geeft $r + s = 25$

$r + s = 25$

$r - s = 20$

$\overline{}\ +$

$2r \ = 45$

$\left.\begin{array}{l} r = 22\frac{1}{2} \\ r + s = 25 \end{array}\right\} 22\frac{1}{2} + s = 25$

$s = 2\frac{1}{2}$

Dus $r = 22\frac{1}{2}$ en $s = 2\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv