VWO
B
DEEL 2

GETAL & RUIMTE 2

NOORDHOFF UITGEVERS

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo B deel 2
Samen met de delen 1, 3 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld.
De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur.
De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken, waarbij opgemerkt moet worden dat in het laatste hoofdstuk van deel 3 een keuzeonderwerp wordt aangeboden en dat in het vierde hoofdstuk van deel 4 de examentraining aan bod komt. In de vier hoofdstukken van dit boek, die elk een studielast van ongeveer 30 uur hebben, komen de volgende (sub)domeinen aan de orde:
5 Machten en exponenten: B Functies, grafieken en vergelijkingen;
6 Differentiaalrekening: C1 Afgeleide functies en C2 Technieken voor differentiëren;
7 Goniometrische functies: D Goniometrische functies;
8 Meetkunde met coördinaten: E2 Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde.
De delen 1, 2 en 3 zijn bedoeld voor de leerjaren 4 en 5. Afhankelijk van de verdeling van de studielast over deze twee leerjaren kunnen de hoofdstukken 7 en 8 samen met deel 3 in het vijfde leerjaar worden doorgewerkt.

Opbouw
Ook in de elfde editie is gekozen voor een paragraaf voorkennis waarmee elk hoofdstuk begint en waarin de voor het hoofdstuk vereiste voorkennis wordt aangeboden. Elke paragraaf wordt afgesloten met een terugblik. Aan het eind van elk hoofdstuk staat de diagnostische toets, die per paragraaf de basisvaardigheden toetst.
Achter in het boek staan opgaven uit de Wiskunde Olympiade, de gemengde opgaven en het trefwoordenregister.

Testopgaven en denkopgaven
Nieuw in deze editie zijn de testopgaven en de denkopgaven.
Met de testopgaven, aangegeven met een T, wordt een vorm van differentiatie aangeboden. Leerlingen kunnen na het foutloos maken van een testopgave enkele opgaven overslaan.
De denkopgaven zijn aangegeven met een D en bieden een probleem aan dat bij de behandelde theorie hoort, maar dat door de vaak iets andere invalshoek of het ontbreken van tussenstappen een extra beroep doet op het denkvermogen van de leerling. Met de opgaven uit de Wiskunde Olympiade krijgen de leerlingen extra training met het oplossen van wiskundeproblemen.

Online materiaal
Het *Docentenpakket online* bevat een studiewijzer bij elk hoofdstuk. Verder is onder meer het presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven beschikbaar.
Voor de leerlingen is er in *online* een oefenproefwerk bij elk hoofdstuk en zijn er oefenapplets, animaties en demo's.
Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2015

Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit voorgaande hoofdstukken moet je paraat hebben.

O 2 **Oriënterende opgave**
Opgaven waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

T 3 [▶▶6] **Testopgave**
Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder gaan met de opgave die achter ▶▶ staat.

4 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R 5 **Reflecterende opgave**
In een reflectieopgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A 6 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

D 7 **Denkopgave**
Een D-opgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt in de opgave een probleem op een iets andere manier gepresenteerd.

[▶WERKBLAD]
Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

5 Machten en exponenten *6*

Voorkennis Machten en machtsfuncties *8*
5.1 Wortelvormen en gebroken vormen *13*
5.2 Machten met negatieve en gebroken exponenten *27*
5.3 De standaardfunctie $f(x) = g^x$ *36*
5.4 Exponentiële groei *44*
Diagnostische toets *52*

6 Differentiaalrekening *54*

Voorkennis Differentiëren *56*
6.1 Toppen en buigpunten *60*
6.2 De afgeleide van machtsfuncties *68*
6.3 De kettingregel *75*
6.4 Toppen en snijpunten *82*
Diagnostische toets *90*

7 Goniometrische functies *92*

Voorkennis Exacte waarden van goniometrische verhoudingen *94*
7.1 Eenheidscirkel en radiaal *96*
7.2 Goniometrische vergelijkingen *106*
7.3 Transformaties en functies *113*
7.4 Grafieken van goniometrische functies *121*
7.5 Goniometrische functies differentiëren *131*
Diagnostische toets *136*

8 Meetkunde met coördinaten *138*

Voorkennis Stelsels en kwadraatafsplitsen *140*
8.1 Lijnen en hoeken *142*
8.2 Afstanden bij punten en lijnen *152*
8.3 Cirkelvergelijkingen *159*
8.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels *167*
8.5 Meetkunde met GeoGebra *173*
Diagnostische toets *178*

Wiskunde olympiade *180*
Gemengde opgaven *188*
Overzicht GR-handleiding *198*
Trefwoordenregister *199*
Verantwoording *200*

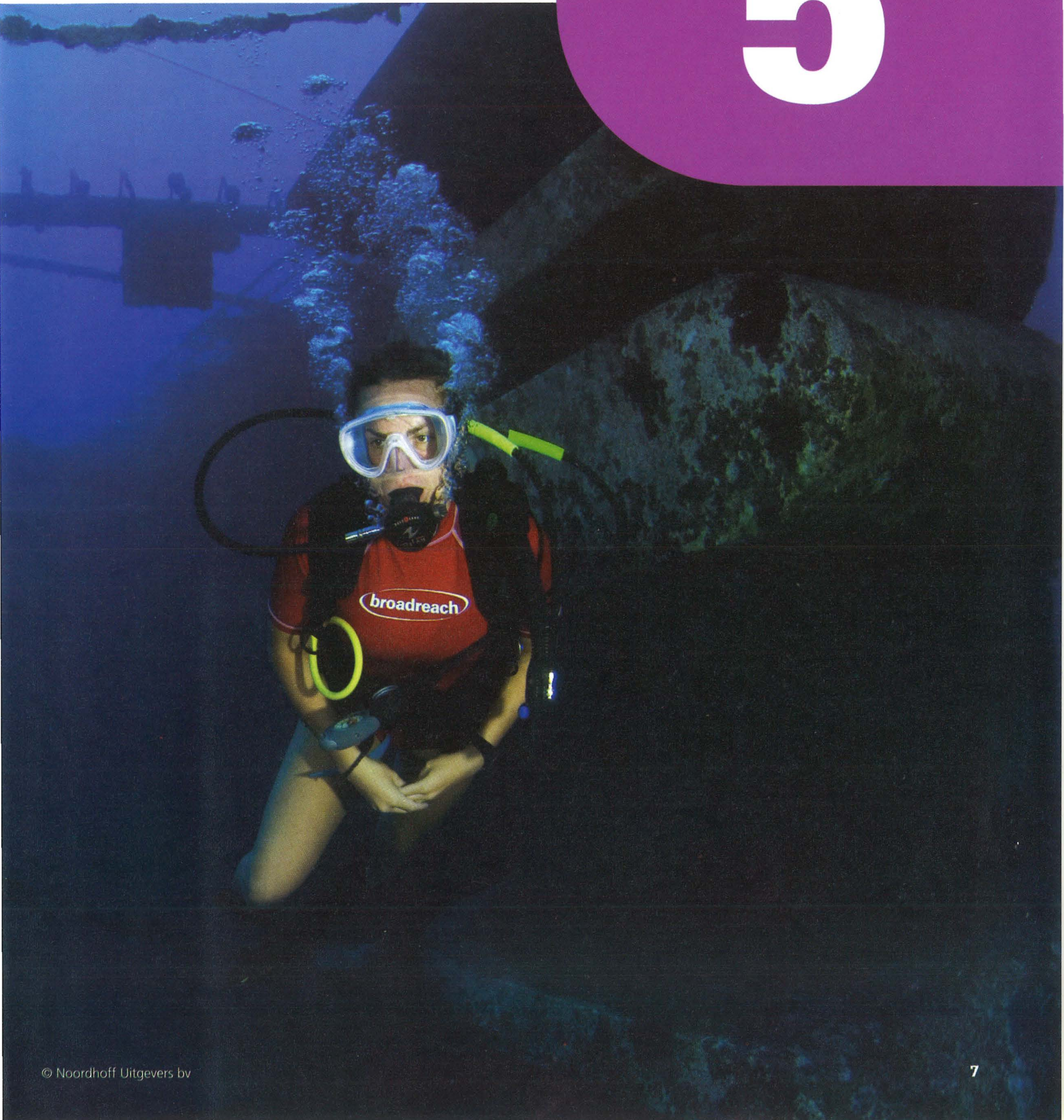
Diepzeeduikers hebben de ervaring dat op grote diepte alles er blauwer uitziet. Dat komt doordat water rood licht meer absorbeert dan blauw licht. In de Caribische Zee bijvoorbeeld is op vijf meter diepte al 92% van het rode licht geabsorbeerd en van het blauwe licht nog maar 83%. Hieruit volgt dat op 9 meter diepte vier keer zoveel blauw licht doordringt dan rood licht.

Wat leer je?

- Werken met grafieken van wortelfuncties, gebroken functies en exponentiële functies.
- Het vrijmaken van variabelen bij wortelformules.
- Wat de betekenis is van machten met negatieve en gebroken exponenten.
- Algebraïsch oplossen van exponentiële vergelijkingen.
- Formules opstellen bij exponentiële groei.

Machten en exponenten

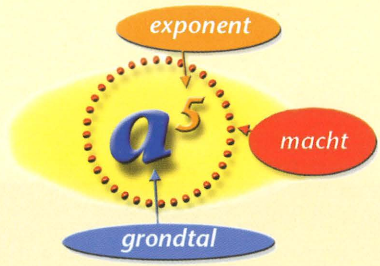
5



Voorkennis Machten en machtsfuncties

Theorie A Rekenregels voor machten

Je weet dat a^5 een **macht** van a is.
In de macht a^5 is a het **grondtal** en 5 de **exponent**.



a^5 is een korte schrijfwijze voor $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, dus voor het product van vijf factoren a.

Rekenen met machten gaat als volgt.

$a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{\text{2 factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{5 factoren}} = a^7$	Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\dfrac{a^5}{a^2} = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^3$	Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^2)^5 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{\text{5 factoren } a^2} = a^{10}$	Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^4 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab}_{\text{4 factoren } ab} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4b^4$	Bij de macht van een product krijg je een product van machten.

Zo krijg je de volgende **rekenregels voor machten**.

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\quad \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $\quad (a^p)^q = a^{pq}$ $\quad (ab)^p = a^p b^p$

Hieronder zie je hoe je de rekenregels gebruikt bij het herleiden.

$(-3a^3)^4 = (-3)^4 \cdot (a^3)^4 = 81a^{12}$

$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 = -27a^6$

$(2a^3)^2 - (a^2)^3 = 4a^6 - a^6 = 3a^6$

$a^5 \cdot a^2 + a^5 + a^2 = a^7 + a^5 + a^2$

$\dfrac{12a^3b}{3ab} = 4a^2$

$(-2)^4 = 16$ en $-2^4 = -16$
$(-3)^3 = -27$ en $-3^3 = -27$

Let op: $a^5 \cdot a^2 = a^7$ maar $a^5 + a^2$ kan niet korter.

1 Herleid.

a $x^2 \cdot x^3$

b $2p^3 \cdot 3p^2$

c $4a^2b \cdot 5a^3b^2$

d $-2p^4q^3 \cdot -3pq$

e $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y$

f $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab$

2 Herleid.

a $(p^2q)^3$

b $(3x^2)^3$

c $(-5x^2y^3)^2$

d $(-4ab^4)^2$

e $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3$

f $(3a^3)^2 + (2a^2)^3$

3 Herleid.

a $\dfrac{24a^4b^2}{6ab}$

b $\dfrac{5x^3y^2}{10x^2y}$

c $\dfrac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

4 Herleid.

a $(ab)^4 \cdot a$

b $(-2ab)^3 \cdot b$

c $(3a)^2 + (2b)^2$

d $(3a)^3 - 8a^3$

e $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2$

f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4$

5 Herleid.

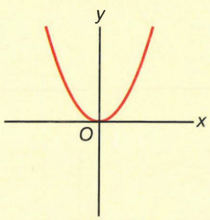
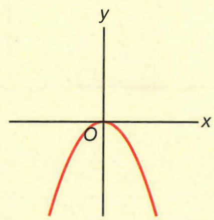
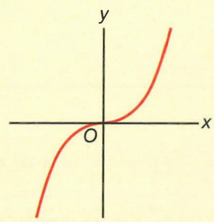
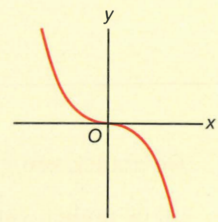
a $a^{2n} \cdot a^{n-1}$

b $a^{n^2-1} \cdot a^{n-1}$

c $\dfrac{a^{n^2-n}}{a^{n-1}}$

Theorie B Machtsfuncties

Een functie van de vorm $f(x) = ax^n$ met $a \neq 0$ is een **machtsfunctie**.
In het schema hieronder zie je hoe de grafiek van f er uitziet voor $n > 1$ en n geheel.

***n* even**		***n* oneven**	
			
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
de y-as is symmetrieas en de top is (0, 0)		het punt van symmetrie is (0, 0)	

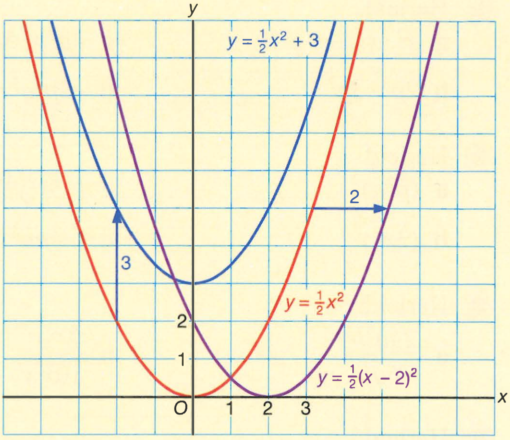
De functies $f(x) = ax^n$ zijn **standaardfuncties** en de bijbehorende grafieken zijn **standaardgrafieken**, dat wil zeggen dat je de grafieken zonder toelichting mag tekenen.

Bij de verschuiving 3 omhoog heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als **beeldgrafiek** de parabool $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$. Zie figuur 5.1.

Bij de verschuiving 2 naar rechts heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als beeldgrafiek de parabool $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$.

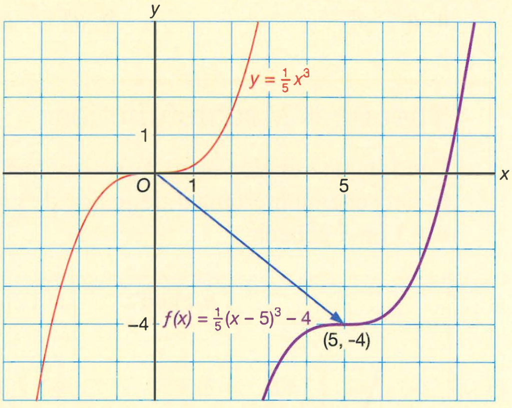
Bij de verschuiving 3 omhoog en 2 naar rechts heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als beeldgrafiek de parabool $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$.
In plaats van de verschuiving 2 naar rechts en 3 omhoog zeggen we de verschuiving (2, 3).

We noteren
$$y = \tfrac{1}{2}x^2 \;\xrightarrow{\text{verschuiving } (2,\,3)}\; y = \tfrac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$$



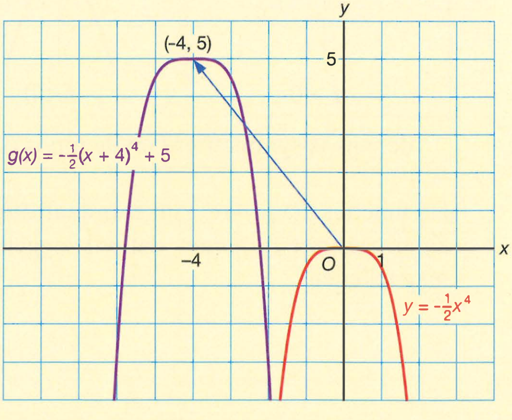
figuur 5.1

De grafiek van $f(x) = \frac{1}{5}(x - 5)^3 - 4$ ontstaat uit de grafiek van $y = \frac{1}{5}x^3$ bij de verschuiving (5, -4).
Zie de figuur hiernaast.
Bij de grafiek van f zijn de coördinaten van het punt van symmetrie genoteerd.



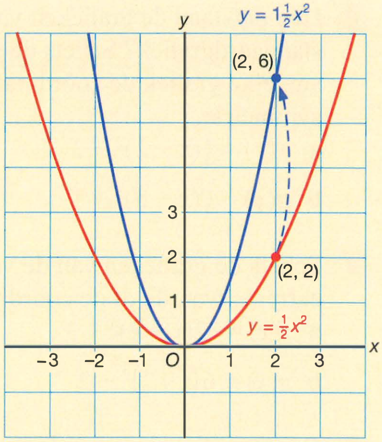
figuur 5.2

De grafiek van $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)^4 + 5$ ontstaat uit de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x^4$ bij de verschuiving (-4, 5).
Zie de figuur hiernaast.
De top van de grafiek van g is (−4, 5), het maximum is $g(-4) = 5$ en het bereik is $B_g = \langle\leftarrow, 5]$.



figuur 5.3

Bij de vermenigvuldiging met 3 heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als beeld de parabool $y = 3 \cdot \frac{1}{2}x^2$, dus $y = 1\frac{1}{2}x^2$.
Het punt (2, 2) ligt op de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$.
Het beeldpunt (2, 6) ligt op de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x^2$.
Zie figuur 5.4.
De grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ is **vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de *x*-as**.

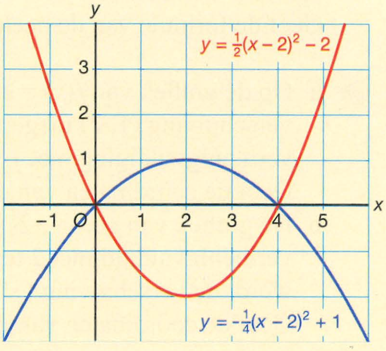


figuur 5.4

Bij de vermenigvuldiging met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$ als beeld de grafiek van $y = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2\right)$, dus van $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$. Zie figuur 5.5.
Bij het vermenigvuldigen met -2 ten opzichte van de x-as heeft de grafiek van $y = -4x^3 + 1$ als beeld de grafiek van $y = -2(-4x^3 + 1)$, dus van $y = 8x^3 - 2$.
Notatie: $y = -4x^3 + 1$

$$\big\downarrow \text{verm. } x\text{-as}, -2$$

$y = 8x^3 - 2$



figuur 5.5

Voorbeeld

Op de grafiek van $y = \frac{1}{4}x^2$ wordt eerst de verschuiving (2, −3) toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met −2 ten opzichte van de x-as.

a Geef de formule van de beeldgrafiek.
b Geef de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.

Uitwerking

a $y = \frac{1}{4}x^2$

$$\big\downarrow \text{verschuiving } (2, -3)$$

$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3$

$$\big\downarrow \text{verm. } x\text{-as}, -2$$

$y = -2\left(\frac{1}{4}(x-2)^2 - 3\right)$
ofwel $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 6$

b De top is (2, 6).

Bij de verschuiving (2, −3) vervang je in de formule x door $x - 2$ en trek je 3 af van de functiewaarde.

Bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met −2, vermenigvuldig je de functiewaarde met −2.

5

6 Hoe ontstaan de grafieken van de volgende functies uit een standaardgrafiek? Schets de grafieken in aparte figuren en geef van elke grafiek de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$

b $g(x) = \frac{1}{4}(x+3)^3 + 1$

c $h(x) = -0{,}2\left(x + 2\frac{1}{2}\right)^4 + 2$

d $k(x) = -0{,}3(x-4)^5 - 3$

7 Schets de grafieken van de volgende functies. Geef ook de extreme waarde of de coördinaten van het punt van symmetrie.

a $f(x) = -2(x+2)^4 - 3$

b $g(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 - 2$

c $h(x) = 0{,}18(x-3)^2 - 4$

d $k(x) = -0{,}1(x-1)^5 + 4$

8 Op de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x^3$ wordt eerst de verschuiving $(-3, -5)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -3 ten opzichte van de x-as.
Geef de formule van de beeldgrafiek.

5

9 **a** Op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^4 + 7$ wordt eerst de verschuiving $(1, 2)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met $1\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as.
Geef de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.

b De grafiek van $g(x) = -2\frac{1}{2}(x+4)^6 - 7$ wordt eerst vermenigvuldigd met 2 ten opzichte van de x-as en vervolgens wordt de verschuiving $(-1, 3)$ toegepast.
Geef de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.

10 **a** Op de grafiek van $y = 0{,}3x^4$ wordt eerst de verschuiving $(-5, 6)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -3 ten opzichte van de x-as.
Geef van de beeldgrafiek de formule en de coördinaten van de top.

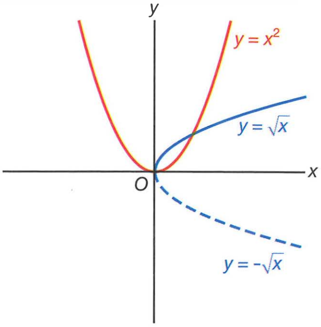
b Op de grafiek van $y = 0{,}3x^4$ wordt eerst de vermenigvuldiging met -3 ten opzichte van de x-as toegepast en vervolgens de verschuiving $(-5, 6)$.
Geef van de beeldgrafiek de formule en de coördinaten van de top.

5.1 Wortelvormen en gebroken vormen

O 1 **a** Plot de grafiek van $y = \sqrt{x}$.
Geef het domein en het bereik.
b Plot de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$.
Hoe ontstaat de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$ uit die van $y = \sqrt{x}$?

Informatief Het verband tussen de grafieken van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$

Je weet dat de grafiek van $y = x^2$ een parabool is die de x-as raakt in de oorsprong.
Verwissel je x en y dan krijg je de parabool $x = y^2$ die de y-as raakt in de oorsprong.
Uit $x = y^2$ volgt $y^2 = x$ en dit geeft $y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}$.
Dus de grafiek van $y = \sqrt{x}$ is een halve parabool die de y-as raakt in de oorsprong

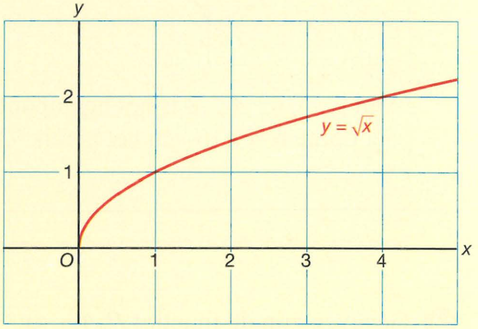


5

Theorie A Domein en bereik van wortelfuncties

De eenvoudigste **wortelfunctie** is $f(x) = \sqrt{x}$.
De grafiek van f is een standaardgrafiek en is in figuur 5.6 getekend. Hierbij is de volgende tabel gebruikt.

x	0	1	2	4	6
$f(x)$	0	1	1,4	2	2,4



figuur 5.6

De grafiek is een halve parabool die de y-as in het **beginpunt** $O(0, 0)$ raakt.
Het domein van f is $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.

Uitgaande van de standaardgrafiek $y = \sqrt{x}$ zijn door verschuiven en/of vermenigvuldigen grafieken van andere wortelfuncties te tekenen.
In plaats van verschuiving gebruiken we het woord **translatie**.

grafiek van $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (p,\, q)}$ **beeldgrafiek** $y = \sqrt{x - p} + q$

grafiek van $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } a}$ **beeldgrafiek** $y = a\sqrt{x}$

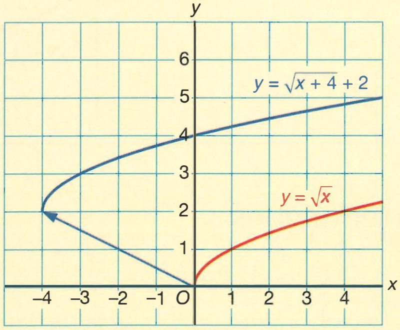
Translaties en vermenigvuldigingen zijn voorbeelden van **transformaties**.
De volgorde waarin je transformaties toepast is van belang.

$y = \sqrt{x}$
$\downarrow$ translatie (2, 3)
$y = \sqrt{x - 2} + 3$
$\downarrow$ verm. x-as, 4
$y = 4(\sqrt{x-2} + 3) = 4\sqrt{x-2} + 12$

$y = \sqrt{x}$
$\downarrow$ verm. x-as, 4
$y = 4\sqrt{x}$
$\downarrow$ translatie (2, 3)
$y = 4\sqrt{x-2} + 3$

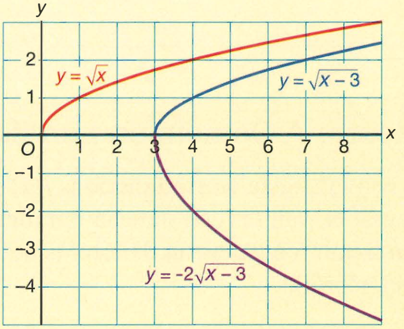
Het effect van transformaties op beginpunt, domein en bereik zie je hieronder.

$y = \sqrt{x}$
$\downarrow$ translatie (-4, 2)
$y = \sqrt{x+4} + 2$



Van $y = \sqrt{x+4} + 2$ is het beginpunt (-4, 2), het domein $[-4, \rightarrow\rangle$ en het bereik $[2, \rightarrow\rangle$.

$y = \sqrt{x}$
$\downarrow$ translatie (3, 0)
$y = \sqrt{x-3}$
$\downarrow$ verm. x-as, -2
$y = -2\sqrt{x-3}$



Van $y = -2\sqrt{x-3}$ is het beginpunt (3, 0), het domein $[3, \rightarrow\rangle$ en het bereik $\langle\leftarrow, 0]$.

2 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$ en $g(x) = -2\sqrt{x+3}$.
a Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?
b Schets de grafieken van f en g.
c Geef D_f, B_f, D_g en B_g.

Vermeld in de schets de coördinaten van het beginpunt.

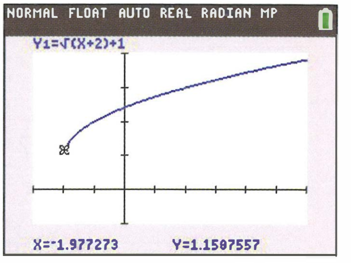
3 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$ en $g(x) = -\sqrt{x+5}$.
a Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?
b Schets de grafieken van f en g.
c Geef D_f, B_f, D_g en B_g.

A 4 Geef van elk van de volgende functies de coördinaten van het beginpunt van de grafiek. Geef ook het domein en het bereik.

a $f(x) = \sqrt{x+5} + 3$
b $g(x) = \sqrt{x+3} - 7$
c $h(x) = \text{-}2\sqrt{x+1}$
d $k(x) = 3\sqrt{x} + 1$
e $l(x) = \text{-}\sqrt{x-1} - 1$
f $m(x) = \text{-}3 + \sqrt{x}$

D 5 Van de functie $f(x) = \sqrt{a - x^2} + b$ is $D_f = [\text{-}4, 4]$ en $B_f = [5, c]$.
Bereken a, b en c.

O 6 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x+2} + 1$.
a Geef de coördinaten van het beginpunt van de grafiek van f.
b In figuur 5.7 is de grafiek van f geplot. Vervolgens is met de trace-cursor over de grafiek naar het beginpunt gelopen.
Wat valt je op? Hoe zou dat komen?

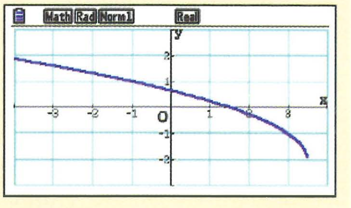


figuur 5.7 Gekozen is voor Xmin = -3, Xmax = 6, Ymin = -1 en Ymax = 4.

Theorie B De grafiek van een wortelfunctie tekenen

Bij het plotten van de grafiek van een wortelfunctie zal het beginpunt meestal niet geplot worden.

De grafiek van $f(x) = \text{-}2 + \sqrt{7 - 2x}$ is een halve parabool.
Het is niet eenvoudig om door middel van transformaties de grafiek van f te krijgen uit die van $y = \sqrt{x}$. Het is daarom noodzakelijk bij een wortelfunctie de coördinaten van het beginpunt algebraïsch te berekenen. Je berekent daartoe het domein en hieruit volgt het beginpunt.
Bij $f(x) = \text{-}2 + \sqrt{7 - 2x}$ vind je het domein als volgt.



figuur 5.8

Onder het wortelteken moet een niet-negatief getal staan, dus
$7 - 2x \geq 0$
$\text{-}2x \geq \text{-}7$
$x \leq 3\frac{1}{2}$

$\boxed{f(3\tfrac{1}{2}) = \text{-}2 + \sqrt{0} = \text{-}2}$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2}]$ en het beginpunt is $(3\frac{1}{2}, \text{-}2)$.

Afspraak
Bij het tekenen van de grafiek van een wortelfunctie bereken je eerst het domein en vermeld je de coördinaten van het beginpunt.
Verder maak je een tabel.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - \sqrt{6 - 2x}$.

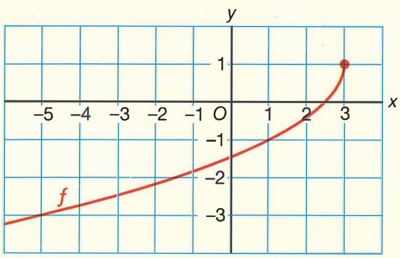
a Teken de grafiek van f en geef B_f.
b Los algebraïsch op $f(x) \geq -2$.
c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -5$?

Uitwerking

a $6 - 2x \geq 0$ geeft $-2x \geq -6$, dus $x \leq 3$ en $D_f = \langle \leftarrow, 3]$.
Het beginpunt is (3, 1).
Voer in $y_1 = 1 - \sqrt{6 - 2x}$.

In de tabel is afgerond op één decimaal. Dat is voldoende voor het tekenen van de grafiek.

x	-5	-2	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2,2	-1,4	-1	-0,4	1

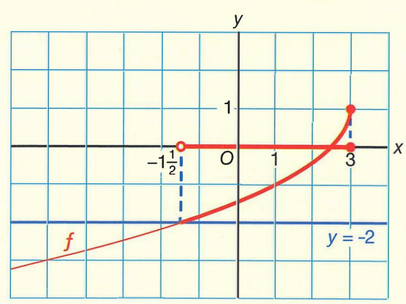


$B_f = \langle \leftarrow, 1]$

b $f(x) = -2$ geeft $1 - \sqrt{6 - 2x} = -2$
$\sqrt{6 - 2x} = 3$
kwadrateren geeft
$6 - 2x = 9$
$-2x = 3$
$x = -1\frac{1}{2}$
voldoet

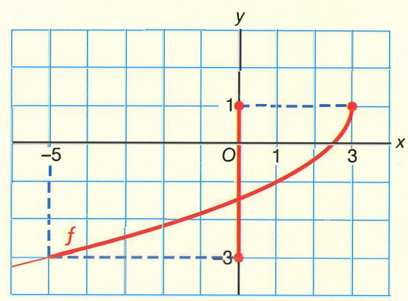
$f(x) \geq -2$ geeft $-1\frac{1}{2} < x \leq 3$

Kijk waar de grafiek van f boven de lijn $y = -2$ ligt en houd rekening met het domein.



c $f(-5) = -3$
$x \geq -5$ geeft $-3 \leq f(x) \leq 1$

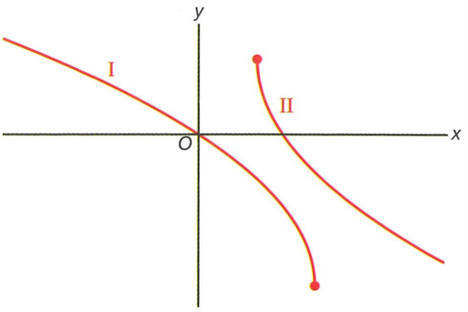
Houd rekening met het bereik.



R 7 Voor elke a, b, c en d is gegeven de functie $f(x) = a + b\sqrt{c(x+d)}$.
In de figuur hiernaast zijn twee mogelijke grafieken getekend.
Vul telkens $<$ of $>$ in.

a Bij grafiek I geldt a ... 0, b ... 0, c ... 0 en d ... 0.

b Bij grafiek II geldt a ... 0, b ... 0, c ... 0 en d ... 0.



figuur 5.9

8 Geef van elk van de volgende functies het domein, het bereik en de coördinaten van het beginpunt van de grafiek.

a $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$

b $g(x) = 3 + \sqrt{4x - 8}$

c $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$

d $k(x) = -2\sqrt{x} + 3$

9 Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5}$.

a Teken de grafiek van f en geef B_f.

b Los algebraïsch op $f(x) > -2$.

c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x < 22$?

A 10 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{7 - 3x} - 4$.

a Schets de grafiek van f en geef B_f.

b Los algebraïsch op $f(x) > -2$.

c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -3$?

A 11 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + \sqrt{7 - 2x}$ en $g(x) = x$.
Los algebraïsch op $f(x) < g(x)$.

D 12 Het beginpunt van de grafiek van $f(x) = 4 - \sqrt{5 + ax}$ ligt op de lijn k: $y = 2x - 1$.
Bereken a.

D 13 De grafiek van de functie $f(x) = a\sqrt{x} + b$ gaat door de punten (5, 3) en (13, 9).
Bereken a en b.

O 14 **a** Toon aan dat uit $y = 2\sqrt{x}$ volgt $x = \frac{1}{4}y^2$.

b Vul in: Uit $y = \sqrt{x - 2}$ volgt $x = \ldots$.

c Vul in: Uit $y = 2\sqrt{x - 2}$ volgt $x = \ldots$.

5

Theorie C Variabelen vrijmaken bij wortelformules

Bij de formule $y = 2 + \sqrt{x - 3}$ kun je de variabele x vrijmaken zodat x is uitgedrukt in y ofwel x als functie van y is geschreven. Dit gaat als volgt.

$y = 2 + \sqrt{x - 3}$ — Verwissel beide leden zodat x in het linkerlid komt.

$2 + \sqrt{x - 3} = y$ — Isoleer de wortelvorm.

$\sqrt{x - 3} = y - 2$

kwadrateren geeft

$x - 3 = y^2 - 4y + 4$

$x = y^2 - 4y + 7$

Afspraak

Bij het vrijmaken van variabelen hoef je geen voorwaarden te vermelden.

5

Voorbeeld

Maak t vrij bij de formule $N = 3 - 2\sqrt{t - 1}$.

Uitwerking

$N = 3 - 2\sqrt{t - 1}$

$2\sqrt{t - 1} = 3 - N$

kwadrateren geeft

$4(t - 1) = 9 - 6N + N^2$

$4t - 4 = 9 - 6N + N^2$

$4t = 13 - 6N + N^2$

$t = \frac{1}{4}N^2 - 1\frac{1}{2}N + 3\frac{1}{4}$

Informatief Voorwaarden bij vrijmaken van variabelen bij wortelformules

De functie $f(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$ heeft $D_f = [3, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [2, \rightarrow\rangle$, dat wil zeggen $x \geq 3$ en $y \geq 2$.
Deze voorwaarden blijven gelden bij het vrijmaken van x.
Maak je x vrij bij $y = 2 + \sqrt{x - 3}$, dan krijg je $x = y^2 - 4y + 7$.
Dus ook bij $x = y^2 - 4y + 7$ is $x \geq 3$ en $y \geq 2$. Dat betekent dat je bij $x = y^2 - 4y + 7$ bijvoorbeeld niet $y = 0$ mag nemen. De voorwaarde $y \geq 2$ schrijven we er echter niet bij.

15 **a** Maak t vrij bij de formule $F = 3\sqrt{2t - 1}$.
b Schrijf B als functie van A bij de formule $A = 5 + \sqrt{4 - 3B}$.
c Gegeven is $2x\sqrt{y} - 5 = 0$. Druk y uit in x.
d Gegeven is $R\sqrt{q} - \sqrt{R} = 6$. Schrijf q als functie van R.

A 16 Bij een verkiezing wordt door middel van een steekproef een schatting gegeven van het percentage van de mensen dat op de politieke partij X stemt. De nauwkeurigheid van de schatting hangt af van de omvang n van de steekproef, maar ook van het gevonden percentage p in het onderzoek. Met de formule $a = 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(100 - p)}{n}}$ is het 95%-betrouwbaarheidsinterval te berekenen. Daarmee weet je met een zekerheid van 95% dat het werkelijke percentage tussen $p - a$ en $p + a$ ligt. Zo hoort bij een steekproef van omvang 300 met een steekproefresultaat van 35,1% een nauwkeurigheid van 5,4%. Dat wil zeggen dat het werkelijke percentage met 95% zekerheid tussen $35{,}1 - 5{,}4 = 29{,}7\%$ en $35{,}1 + 5{,}4 = 40{,}5\%$ zal liggen.
a In een steekproef van 1500 personen kiezen er 450 voor partij X. Bereken de nauwkeurigheid van de schatting.
b Bij de gemeenteraadsverkiezingen in Amsterdam is bij een exit-poll aan 400 personen gevraagd op welke partij ze gestemd hebben. Van deze 400 personen hebben er 82 op partij Y gestemd. In totaal hebben 28 500 mensen een stem uitgebracht.
Hoeveel daarvan kunnen er met een zekerheid van 95% maximaal op partij Y gestemd hebben?
c Bereken hoe groot de steekproef moet zijn om met een nauwkeurigheid van 4% een percentage van 40% te voorspellen.
d Uit een steekproef van 200 personen wordt met een nauwkeurigheid van 6% een percentage voorspeld.
Bereken welk percentage.
e De gegeven formule is te schrijven in de vorm $n = \dfrac{dp^2 + ep}{a^2}$.
Bereken d in twee decimalen nauwkeurig en e in gehelen.

O 17 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
a Plot de grafiek van f op het standaardscherm.
b Wat kun je van $f(x)$ zeggen als je x steeds groter kiest? En wat als je voor x steeds kleinere getallen (bijvoorbeeld -1000, -10 000, ...) kiest?
c Maak een tabel op de GR. Neem beginwaarde -0,1 en stapgrootte 0,01. Wat gebeurt er met $f(x)$ als je x dicht bij 0 kiest?
d Lees de tekst hiernaast en verklaar dat in de tabel op de GR bij $x = 0$ ERROR staat.

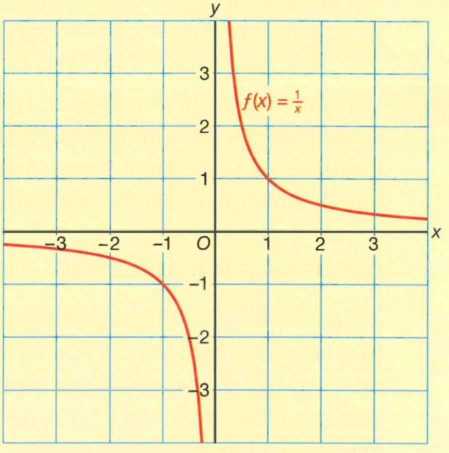
$\dfrac{12}{3} = 4$, want $4 \cdot 3 = 12$
$\dfrac{-18}{3} = -6$, want ...
$\dfrac{0}{8} = 0$, want ...
$\dfrac{1}{0}$ ..., want ...

Theorie D Gebroken functies en limieten

Functies als $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{5}{x+3}$ en $h(x) = 5 + \frac{x}{2x-1}$ zijn voorbeelden van **gebroken functies**.

In een gebroken functie komt de variabele in de noemer van de breuk voor. De eenvoudigste gebroken functie is de standaardfunctie $f(x) = \frac{1}{x}$.

De grafiek van deze functie is een standaardgrafiek en heet **hyperbool**.



figuur 5.10 De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ heeft de x-as en de y-as als asymptoot.

Omdat $f(0)$ niet kan, bestaat de grafiek uit twee losse delen. Deze delen heten de **takken van de hyperbool**. Bij de grafiek van f spelen de x-as en de y-as een belangrijke rol.

Neem je x heel groot, bijvoorbeeld 1000, dan ligt het bijbehorende punt van de grafiek heel dicht bij de x-as.
Neem je x heel sterk negatief, bijvoorbeeld −1000, dan ligt het bijbehorende punt van de grafiek ook heel dicht bij de x-as.
De x-as (de lijn $y = 0$) is de **horizontale asymptoot** van de grafiek van f. In figuur 5.10 zie je dat de y-as (de lijn $x = 0$) de **verticale asymptoot** van de grafiek is.

Een asymptoot is een lijn waarmee de grafiek op den duur vrijwel samenvalt.

Dat $f(x) = \frac{1}{x}$ nadert tot 0 als x heel groot wordt genomen noteren we als $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Uitspraak: de limiet van $\frac{1}{x}$ voor x naar oneindig is nul.

Uit $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ volgt $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(a \cdot \frac{1}{x}\right) = a \cdot 0 = 0$. Dit geeft de **standaardlimiet** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ betekent
$f(x)$ kan onbeperkt tot b naderen door x maar groot genoeg te nemen.

Bij het berekenen van $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x-5}{2x+4}$ maak je gebruik van de standaardlimiet $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x} = 0$.

Hiertoe deel je teller en noemer van $\dfrac{6x-5}{2x+4}$ door x.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x-5}{2x+4} = \lim_{x \to \infty} \frac{6 - \frac{5}{x}}{2 + \frac{4}{x}} = \frac{6-0}{2+0} = 3$$

Voorbeeld

Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+3}{3-x}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x-1}{|4-x|}$

Aanpak

b $|4-x| = \begin{cases} 4-x \text{ als } 4-x \geq 0 \text{ ofwel } x \leq 4 \\ \text{-}(4-x) \text{ als } 4-x < 0 \text{ ofwel } x > 4 \end{cases}$

Dus $|4-x| = \text{-}(4-x)$ als $x \to \infty$.

Uitwerking

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+3}{3-x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \dfrac{2+0}{0-1} = \text{-}2$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x-1}{|4-x|} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x-1}{\text{-}(4-x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x-1}{\text{-}4+x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - \frac{1}{x}}{\frac{\text{-}4}{x} + 1} = \dfrac{5-0}{0+1} = 5$

18 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x+3}{5x-4}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8-x}{3x+4}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|2x-3|}{4x-1}$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5-x}{|3x-2|}$

19 Bereken.

a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|3-4x|}{x-1}$

b $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|2x+5|}{|3-x|}$

c $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|3-x|+x}{|x+5|-2x}$

d $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x|-2}{3-|x|}$

O 20 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x+1}$.
Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Wat volgt hieruit voor de horizontale asymptoot van de grafiek van f?

Theorie E Gebroken functies en asymptoten

Bij de berekening van de formule van de horizontale asymptoot in opgave 20 heb je de standaardlimiet $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x} = 0$ gebruikt.

Ook $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a}{x} = 0$ is een standaardlimiet.

Bij de functie $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x+1}$ krijg je

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-3}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4-\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{4-0}{2+0} = 2.$$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 2$.

Als $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ of als $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, dan is de lijn $y = b$ horizontale asymptoot van de grafiek van f.

De algemene vorm van een **eerstegraads gebroken functie** is
$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ met $c \neq 0$ waarbij de grafiek geen perforatie heeft.

Een voorbeeld van een functie waarbij je te maken hebt met een perforatie is $f(x) = \dfrac{6x-3}{2x-1}$. De perforatie is $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. Zie ook opgave 21.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{6x-3}{2x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{3(2x-1)}{2x-1} =$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} 3 = 3$$

Aangetoond kan worden dat de grafiek van elke eerstegraads gebroken functie via transformaties kan ontstaan uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$. Omdat de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ één horizontale asymptoot heeft (de x-as), heeft ook de grafiek van een eerstegraads gebroken functie één horizontale asymptoot. Daarom is het voldoende om de limiet voor $x \to \infty$ te berekenen om de horizontale asymptoot van de grafiek van een eerstegraads gebroken functie te vinden.

Bij de grafiek van de functie $g(x) = \frac{|4x - 1|}{x + 1}$ heb je te maken met twee horizontale asymptoten. Dit kun je als volgt inzien.

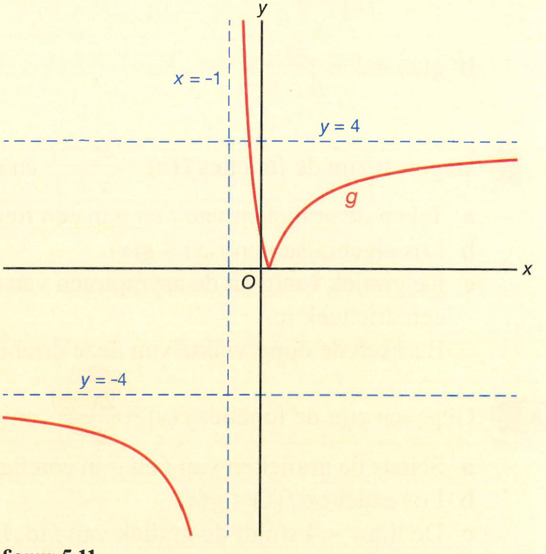
$$g(x) = \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} & \text{als } 4x - 1 \geq 0 \text{ ofwel } x \geq \frac{1}{4} \\ \frac{-4x+1}{x+1} & \text{als } 4x - 1 < 0 \text{ ofwel } x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Daarom krijg je $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{4-0}{1+0} = 4$ en

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-4+0}{1+0} = -4.$$

Dus voor $x \to \infty$ nadert de grafiek de horizontale asymptoot $y = 4$ en voor $x \to -\infty$ nadert de grafiek de horizontale asymptoot $y = -4$.
In figuur 5.11 zie je de grafiek van g.

Afspraak
Bij het tekenen of schetsen van de grafiek van een gebroken functie stel je eerst de formules op van de asymptoten. Je tekent de asymptoten als stippellijnen in de figuur en zet de formule erbij.



figuur 5.11

Bij gebroken functies krijg je formules van asymptoten als volgt.
Verticale asymptoot **Gebruik noemer = 0 en teller ≠ 0.**
Horizontale asymptoot **Bereken $\lim\limits_{x\to\infty}$ en/of $\lim\limits_{x\to-\infty}$.**

R 21 De algemene vorm van een eerstegraads gebroken functie is $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ met $c \neq 0$ en $ad \neq bc$.

a Laat met een getallenvoorbeeld zien dat $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ met $c = 0$ geen hyperbool is.

b Laat met een getallenvoorbeeld zien dat $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ met $ad = bc$ geen hyperbool is.

c Toon aan: de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek van een eerstegraads gebroken functie is $y = \frac{a}{c}$.

D 22 **a** Op de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$ worden achtereenvolgens de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 3 en de translatie $(-1, 2)$ toegepast.
Noteer de formule van de beeldgrafiek in de vorm $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

b Welke transformaties moeten worden toegepast op de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$ om de hyperbool $y = \frac{3x - 4}{x - 2}$ te krijgen?

5

23 Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek.

a $f(x) = \frac{2x - 3}{2x + 5}$

b $g(x) = 2 + \frac{3x}{4 - x}$

c $h(x) = \frac{|3x - 8|}{x + 2}$

d $k(x) = \frac{|2x| - 4}{|3 - x|}$

24 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$ en $g(x) = -2x + 1$.

a Teken de grafieken van f en g in één figuur.

b Los algebraïsch op $f(x) \leq g(x)$.

c De grafiek van g en de asymptoten van de grafiek van f sluiten een driehoek in.
Bereken de oppervlakte van deze driehoek.

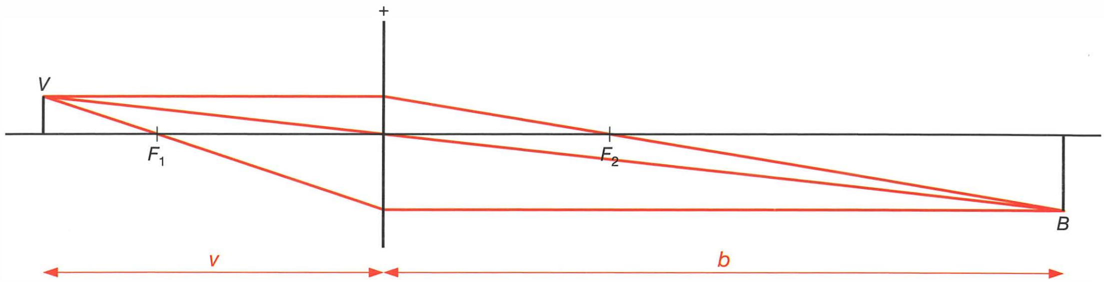
A 25 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ en $g(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$.

a Schets de grafieken van f en g in één figuur.

b Los exact op $f(x) < g(x)$.

c De lijn $y = 4$ snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.
Bereken algebraïsch de lengte van het lijnstuk AB.

A 26 Voor lenzen met brandpuntsafstand $f = 3$ cm is de lenzenformule $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$ te herleiden tot de formule $b = \frac{3v}{v-3}$. Hierin is b de beeldpuntsafstand en v de voorwerpsafstand in cm.



figuur 5.12

a Toon aan dat de formule $b = \frac{3v}{v-3}$ juist is.

b Geef van de grafiek van b de formules van de asymptoten en teken de grafiek. Wat is de praktische betekenis van de asymptoten?

c Bereken algebraïsch de waarde van v waarvoor de beeldpuntsafstand gelijk is aan de voorwerpsafstand.

d Bereken algebraïsch voor welke v de vergrotingsfactor $\left|\frac{b}{v}\right|$ gelijk is aan 2.

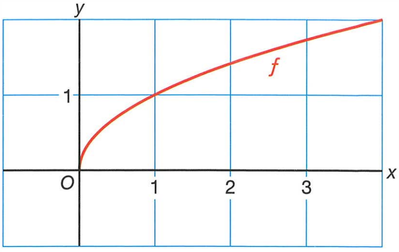
5

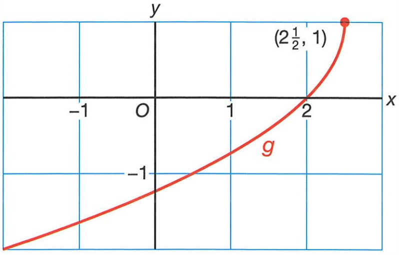
Terugblik

Domein en bereik van wortelfuncties

De eenvoudigste wortelfunctie is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$.
De grafiek is een halve parabool met beginpunt (0, 0).
Het domein is $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.
Om de grafiek van $g(x) = 1 - \sqrt{5 - 2x}$ te tekenen, maak je een tabel waarin ook het beginpunt staat. Daarom bereken je eerst het domein.
Uit $5 - 2x \geq 0$ volgt $-2x \geq -5$, dus $x \leq 2\frac{1}{2}$.

Dus $D_g = \langle\leftarrow, 2\frac{1}{2}]$ en het beginpunt is $(2\frac{1}{2}, 1)$.





5

Variabelen vrijmaken bij wortelformules

Bij de formule $K = 4 + \sqrt{3p + 1}$ kun je p vrijmaken.

$$K = 4 + \sqrt{3p + 1}$$

$$\sqrt{3p + 1} = K - 4 \text{ kwadrateren geeft } 3p + 1 = K^2 - 8K + 16$$

$$3p = K^2 - 8K + 15$$

$$p = \tfrac{1}{3}K^2 - 2\tfrac{2}{3}K + 5$$

Gebroken functies en asymptoten

De grafiek van de standaardfunctie $f(x) = \dfrac{1}{x}$ heet hyperbool.

De x-as is de horizontale asymptoot van de grafiek en de y-as is de verticale asymptoot.

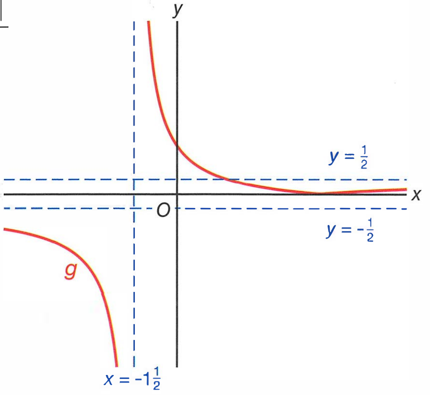
De verticale asymptoot van de grafiek van $g(x) = \dfrac{|5 - x|}{2x + 3}$

volgt uit noemer = 0 en teller $\neq 0$.
Dit geeft de lijn $x = -1\frac{1}{2}$.
De horizontale asymptoten volgen uit

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-(5 - x)}{2x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-5 + x}{2x + 3} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-5}{x} + 1}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{0 + 1}{2 + 0} = \tfrac{1}{2}$$

en $$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{5 - x}{2x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{5}{x} - 1}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{0 - 1}{2 + 0} = -\tfrac{1}{2}.$$



Dus de horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = \frac{1}{2}$ en $y = -\frac{1}{2}$.
Bij het tekenen of schetsen van de grafiek van g stippel je eerst de asymptoten en zet je de formules erbij.

5.2 Machten met negatieve en gebroken exponenten

27 In de tabel hiernaast kun je zowel in de exponenten als in de getallen rechts van het =-teken een regelmaat herkennen.

a Hoe volgt uit deze regelmaat dat $2^0 = 1$ en $2^{-2} = \frac{1}{4}$?

b Vul in $2^{-3} = \frac{1}{\dots}$ en $2^{-4} = \frac{1}{\dots}$.

Op dezelfde manier als hierboven kun je inzien dat $3^0 = 1$ en $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$.

c Vul in: $x^{-1} = \dfrac{1}{\dots}$ en $x^{-3} = \dfrac{1}{\dots}$.

$2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = \dots$
$2^0 = \dots$
$2^{-1} = \dots$
$2^{-2} = \dots$
$2^{-3} = \dots$

5

Theorie A Machten met negatieve exponenten

In opgave 27 komen de machten 2^0, x^{-1} en x^{-3} voor.

Om de betekenis van x^0 te begrijpen, kijken we naar $\dfrac{x^2}{x^2}$.

Je weet $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

Gebruik je de regel $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\dfrac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0$.

We spreken daarom af dat $x^0 = 1$.

Om de betekenis van x^{-3} te begrijpen, kijken we naar $\dfrac{x^2}{x^5}$.

Je weet $\dfrac{x^2}{x^5} = \dfrac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x} = \dfrac{1}{x \cdot x \cdot x} = \dfrac{1}{x^3}$.

Gebruik je de regel $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\dfrac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$.

We spreken daarom af dat $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$.

En zo is $x^{-6} = \dfrac{1}{x^6}$ en $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

In de opgaven mag je ervan uitgaan dat $a \neq 0$.

Rekenregels voor machten
- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
- $(a^p)^q = a^{pq}$
- $(ab)^p = a^p b^p$

$x^0 = 1$

$x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$

$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$

$\dfrac{1}{5} = 5^{-1}$

Voorbeeld

Schrijf als macht van a.

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}}$

Uitwerking

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8} = a^2 \cdot a^{-8} = a^{-6}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a} = \frac{a^{-2}}{a^1} = a^{-2-1} = a^{-3}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2 = a^{-p} \cdot a^6 = a^{-p+6}$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}} = \frac{a^{-5}}{a^{-n}} = a^{-5--n} = a^{-5+n}$

Je kunt 6^{-2} als volgt herleiden. $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

En zo is $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-3} = 2^3 = 8$ en $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Je schrijft $5a^{-3}b^2$ als volgt zonder negatieve exponenten.

$5a^{-3}b^2 = 5 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot b^2 = \frac{5b^2}{a^3}$

Je mag hierbij de tussenstap weglaten.

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $8a^{-5}b^3$ **b** $\frac{2}{5}a^{-2}b$

Uitwerking

a $8a^{-5}b^3 = \frac{8b^3}{a^5}$ **b** $\frac{2}{5}a^{-2}b = \frac{2b}{5a^2}$

Met tussenstappen:

$8a^{-5}b^3 = 8 \cdot \frac{1}{a^5} \cdot b^3 = \frac{8b^3}{a^5}$

$\frac{2}{5}a^{-2}b = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b = \frac{2b}{5a^2}$

28 Schrijf als macht van a.

a $\frac{1}{a^2}$

b $a^4 \cdot \frac{1}{a^6}$

c $\frac{a^n}{\left(\frac{1}{a^4}\right)}$

d $\frac{a^8}{a^0}$

e $(a^3)^{-2}$

f $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a}$

g $\frac{a}{a^{12}}$

h $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n$

i $\frac{\left(\frac{1}{a^n}\right)}{a^{-3}}$

29 Herleid.

a 7^{-2}
b $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
c $3 \cdot 5^{-2}$
d $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$
e $4 \cdot 10^{-3}$
f $\frac{1}{2} : 6^{-2}$

30 Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $6a^{-5}b^3$
b $\frac{1}{3}a^{-3}$
c $5a^{-4}b^2$
d $\frac{3}{5}a^{-4}$
e $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-3}$
f $\frac{1}{6}a^{-2}b^4$
g $-4 \cdot (3a)^{-2}$
h $(3a)^{-2}b^{-3}$
i $\frac{3}{8}a^{-1}b$

Theorie B Formules met machten herleiden

De formule $y = 3(2x^2)^5 \cdot \dfrac{4}{x^{12}}$ is te schrijven in de vorm $y = ax^n$.

Je gebruikt hierbij de rekenregels voor machten.

Voorbeeld

Schrijf de formule van $y = 3(2x^2)^5 \cdot \dfrac{4}{x^{12}}$ in de vorm $y = ax^n$.

Uitwerking

$$y = 3(2x^2)^5 \cdot \frac{4}{x^{12}} = 3 \cdot 2^5 \cdot (x^2)^5 \cdot 4 \cdot x^{-12} = 3 \cdot 32 \cdot x^{10} \cdot 4 \cdot x^{-12} = 384 \cdot x^{-2}$$

$$\boxed{\frac{4}{x^{12}} = 4 \cdot \frac{1}{x^{12}} = 4 \cdot x^{-12}}$$

Dus $y = 384x^{-2}$.

31 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^n$.

a $y = \frac{1}{3}(3x^2)^3 \cdot \dfrac{2}{x^{10}}$
b $y = \dfrac{162}{(3x^2)^4}$
c $y = 3(3x)^{-2} \cdot 4x$

A 32 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^n$.

a $y = \left(\frac{1}{3}x^2\right)^{-1} \cdot x^4$
b $y = 75 \cdot (5x)^{-2} \cdot 3x^{12}$
c $y = \dfrac{5}{x^2} \cdot (3x^{-2})^3$

O 33 Uit $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ en $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$ volgt $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Licht op dezelfde manier toe dat $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Theorie C Machten met gebroken exponenten

Met behulp van de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ lichten we de betekenis van $x^{\frac{1}{5}}$ toe. Je kiest daartoe $p = \frac{1}{5}$ en $q = 5$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Je krijgt } \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5 = x^1 = x. \\ \text{Je weet } \left(\sqrt[5]{x}\right)^5 = x.\end{array}\right\} \text{We spreken af dat } x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}.$$

Algemeen is $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$. En verder is $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \text{ en } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Machten met een gebroken exponent kun je dus herleiden tot een (hogeremachts)wortel.

Zo is $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$, $a^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ en $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$.

Bijzondere machten

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

$a^0 = 1$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponent.

a $4a^{-\frac{1}{3}}$ **b** $5ab^{-\frac{1}{2}}$ **c** $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$

Uitwerking

a $4a^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{a^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{a}}$

b $5ab^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{5a}{b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{5a}{\sqrt{b}}$

c $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{\sqrt{a}}{4 \cdot \sqrt[3]{b^2}}$

Voorbeeld

Schrijf als macht van x.

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **b** $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ **c** $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

Uitwerking

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

b $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{2-\frac{1}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

c $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{12}}$

34 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponent.

$$\tfrac{3}{5}a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{7}} = \frac{3b^{\frac{2}{7}}}{5a^{\frac{1}{3}}} = \frac{3 \cdot \sqrt[7]{b^2}}{5 \cdot \sqrt[3]{a}}$$

a $5a^{\frac{1}{3}}$
b $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b$
c $3a^{-\frac{2}{3}}$
d $\frac{2}{3}a^{-3} \cdot b^{\frac{1}{3}}$
e $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$
f $(5a)^{-\frac{1}{2}}$

35 Schrijf als macht van a.

a $a \cdot \sqrt[3]{a}$
b $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$
c $\dfrac{1}{a}$
d $\dfrac{1}{a^3}$
e $a^2 \cdot \sqrt{a}$
f $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$
g $\sqrt[3]{a^{12}}$
h $\dfrac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a}$
i $\dfrac{a^3}{\sqrt[3]{a}}$

36 Je kunt $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ als macht van 2 schrijven: $\frac{1}{4}\sqrt{2} = \dfrac{1}{2^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}}$.
Schrijf als macht van 2, 3 of 10.

a $8\sqrt{2}$
b $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
c $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$
d $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2}$
e $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$
f $\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$
g $\frac{1}{100}\sqrt{10}$
h $\frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
i $10 \cdot \sqrt[3]{0{,}1}$

37 Je weet $x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$. Omgekeerd is $x^{2\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^2 \cdot \sqrt{x}$.
En zo is $2^{a+4} = 2^a \cdot 2^4 = 2^a \cdot 16 = 16 \cdot 2^a$.
Herleid op dezelfde manier.

a $x^{2\frac{1}{3}}$
b $2^{2\frac{1}{2}}$
c $2^{x+\frac{1}{3}}$
d 3^{x+2}
e 5^{a+1}
f $\left(\frac{1}{2}\right)^{a-2}$
g 4^{a-3}
h 2^{2a-1}
i $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-3x}$

A 38 Schrijf als macht van x.

a $\dfrac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$
b $x \cdot \sqrt[7]{x^3}$
c $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x}}$
d $x^4 \cdot \sqrt{x}$
e $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$
f $\dfrac{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}$
g $x^2 \cdot \dfrac{1}{x^3}$
h $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$
i $\dfrac{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}}$

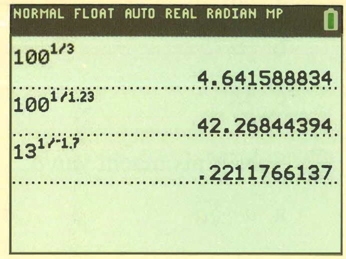
A 39 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

a $y = \dfrac{5}{x\sqrt{x}}$
b $y = 5x\sqrt{x^3}$
c $y = \dfrac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x}$
d $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3}$
e $y = 5x^{-0{,}2} \cdot x^{1{,}3}$
f $y = \dfrac{50x^{1{,}9}}{10x^{1{,}1}}$

5

Theorie D Vergelijkingen met gebroken exponenten

Je weet dat de oplossing van de vergelijking $x^3 = 100$ gelijk is aan $x = \sqrt[3]{100}$ en ook dat $\sqrt[3]{100} = 100^{\frac{1}{3}}$.
Dus de oplossing van $x^3 = 100$ is $100^{\frac{1}{3}} \approx 4{,}64$.
De oplossing van $x^{1{,}23} = 100$ is $100^{\frac{1}{1{,}23}} \approx 42{,}27$ en de oplossing van $x^{-1{,}7} = 13$ is $x = 13^{\frac{1}{-1{,}7}} \approx 0{,}22$.



In het informatief hieronder kun je zien dat er problemen kunnen ontstaan als je bij machten met gebroken exponenten negatieve grondtallen toestaat.
Vandaar dat we bij de vergelijking $x^p = c$ met p een gebroken getal het grondtal x positief nemen.

Voor $c > 0$ en $x > 0$ geldt $x^p = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{p}}$.

Informatief Gebroken exponenten en hogeremachtswortels

De regel $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ passen we uitsluitend toe bij positieve grondtallen.

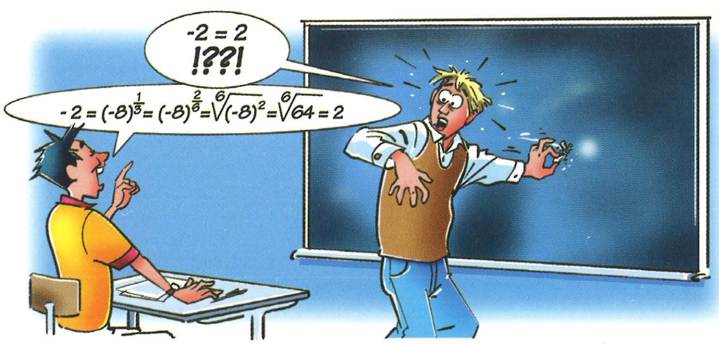
Bij negatieve grondtallen moet erbij dat de breuk $\frac{p}{q}$ niet vereenvoudigd kan worden. Dus

$(-2)^{1{,}4} = (-2)^{\frac{14}{10}} = (-2)^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^7} = \sqrt[5]{-128} \approx -2{,}639$
$(-2)^{1{,}5} = (-2)^{\frac{15}{10}} = (-2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-2)^3} = \sqrt{-8}$ bestaat niet
$(-2)^{1{,}6} = (-2)^{\frac{16}{10}} = (-2)^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^8} = \sqrt[5]{256} \approx 3{,}031$

Laat je de voorwaarde dat de breuk $\frac{p}{q}$ niet vereenvoudigd kan worden weg, dan krijg je

$(-2)^{1{,}4} = (-2)^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{(-2)^{14}} = \sqrt[10]{16384} = 2{,}639$ en dit klopt niet

$(-2)^{1{,}5} = (-2)^{\frac{15}{10}} = (-2)^{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^6} = \sqrt[4]{64} \approx 2{,}828$ en dit klopt niet.
In de opgaven mag je uitgaan van positieve grondtallen.



Bij het algebraïsch oplossen zorg je ervoor dat je een exact antwoord hebt. Daarna benader je de oplossing als dat wordt gevraagd.

Voorbeeld

Los algebraïsch op. Rond af op drie decimalen.

a $x^{1,21} = 70$

b $5x^{-1,3} + 18 = 40$

Uitwerking

a $x^{1,21} = 70$

$x = 70^{\frac{1}{1,21}} \approx 33,487$

b $5x^{-1,3} + 18 = 40$

$5x^{-1,3} = 22$

$x^{-1,3} = \frac{22}{5}$

$x = \left(\frac{22}{5}\right)^{-\frac{1}{1,3}} \approx 0,320$

40 Los algebraïsch op. Rond af op drie decimalen.

a $x^{1,6} = 50$

b $x^{-4,1} = 5$

c $\left(\frac{1}{2}x\right)^{-1,3} = 11$

d $x^{-1} = 21$

e $(5x)^{0,55} = 18$

f $\sqrt[3]{x^2} = 28$

A 41 Los algebraïsch op. Rond af op drie decimalen.

a $3x^{2,25} + 1 = 27$

b $(5x)^{-1,3} + 8 = 21$

c $4x^{-1,8} + 16 = 5000$

d $8 - 3x^{1,16} = 1$

e $5 \cdot \sqrt[3]{2x} = 8$

f $3 \cdot \sqrt[4]{x^3} - 1 = 36$

O 42 De formule $y = 20x^3$ is te schrijven in de vorm $x = a \cdot y^b$.
Laat zien dat in twee decimalen nauwkeurig geldt $a \approx 0,37$ en $b \approx 0,33$.

Theorie E Variabele vrijmaken bij de formule $y = ax^p$

Het is mogelijk bij de formule $y = ax^p$ de variabele x vrij te maken.

Bij $y = 25x^{1,16}$ krijg je $25x^{1,16} = y$

$$x^{1,16} = \frac{1}{25}y$$

$$x = \left(\frac{1}{25}y\right)^{\frac{1}{1,16}}$$

$$x = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{1,16}} \cdot y^{\frac{1}{1,16}}$$

$$x \approx 0,062 \cdot y^{0,86}$$

Dus $x = 0,062\ y^{0,86}$.

5

5

Voorbeeld

Schrijf de formule $y = \frac{10}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$ in de vorm $x = a \cdot y^b$.
Rond zo nodig af op twee decimalen.

Uitwerking

$$y = \frac{10}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{10}{x^{2\frac{1}{2}}} = 10x^{-2\frac{1}{2}} = 10x^{-2,5}$$

$$\begin{aligned} y = 10x^{-2,5} \text{ geeft } 10x^{-2,5} &= y \\ x^{-2,5} &= 0{,}1y \\ x &= (0{,}1y)^{\frac{1}{-2,5}} \\ x &= 0{,}1^{\frac{1}{-2,5}} \cdot y^{\frac{1}{-2,5}} \\ x &\approx 2{,}51 \cdot y^{-0,4} \end{aligned}$$

Dus $x = 2{,}51 \cdot y^{-0,4}$.

43 Maak x vrij. Rond af op twee decimalen.
a $y = 5x^{1,2}$ **b** $y = 0{,}1x^{-1,7}$ **c** $y = 125x^{-2,3}$

44 Schrijf de formule in de vorm $x = a \cdot y^b$. Rond af op twee decimalen.
a $y = 15x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ **b** $y = \frac{6}{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}}$ **c** $y = \frac{12}{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x}$

A 45 **a** Schrijf de formule $K = 15q^{-1,6}$ in de vorm $q = a \cdot K^b$. Rond a af op twee decimalen.
b Maak t vrij bij de formule $v = 25t\sqrt{t}$. Rond af op twee decimalen.

D 46 Maak m vrij bij de formule $F = \frac{m\sqrt{m}}{m\sqrt{m} - 1}$.

A 47 Het verband tussen de populatiedichtheid P en de gemiddelde lengte l in meter van een diersoort is te benaderen door de formule $P = 800 \cdot l^{-2,25}$. Hierbij is P het aantal exemplaren per km^2.
a Onderzoek of de bewering 'grote dieren leven gemiddeld verder van elkaar dan kleinere' in overeenstemming is met de formule.
b In een gebied met een oppervlakte van 250 km^2 leven kariboes. Kariboes zijn gemiddeld 2,15 meter lang. Bereken het aantal kariboes in dit gebied.
c Schrijf de formule in de vorm $l = aP^b$. Rond a af op één decimaal en b op twee decimalen.
d In een gebied van 5 km^2 leven ongeveer 160 000 wandelende takken. Bereken de gemiddelde lengte van deze insectensoort.

Terugblik

Negatieve exponenten

5^{-3} betekent $\frac{1}{5^3}$, 6^{-1} betekent $\frac{1}{6}$ en $\frac{5}{6}q^{-4}$ betekent $\frac{5}{6q^4}$.

Algemeen is $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ met $a \neq 0$. Ook is $a^0 = 1$ met $a \neq 0$.

Uit de regel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ volgt ook dat $\frac{1}{5^{-3}} = 5^3$, $\frac{1}{6^{-1}} = 6$ en $\frac{5}{6q^{-4}} = \frac{5}{6}q^4$.

Gebroken exponenten

$5^{\frac{1}{3}}$ betekent $\sqrt[3]{5}$, $6^{\frac{1}{2}}$ betekent $\sqrt{6}$ en $a^{\frac{3}{4}}$ betekent $\sqrt[4]{a^3}$.

Algemeen is $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Hierbij is $a > 0$.
De regels

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$ en $(ab)^p = a^p b^p$

gelden ook voor negatieve en gebroken exponenten.

$x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^4 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{4\frac{2}{3}}$

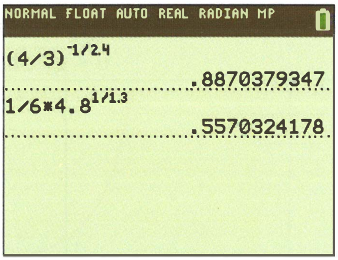
$\frac{3\sqrt{x}}{5x^2} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{5x^2} = \frac{3}{5}x^{-1\frac{1}{2}}$

$\left(2x^2 \cdot \sqrt{y}\right)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 \cdot \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 8x^6y^{1\frac{1}{2}} = 8x^6y \cdot y^{\frac{1}{2}} = 8x^6y\sqrt{y}$

Vergelijkingen met gebroken exponenten

Bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen als $6x^{-2,4} + 5 = 13$ en $5(6x)^{1,3} = 24$ gebruik je de regel: voor $c > 0$ en $x > 0$ geldt $x^p = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{p}}$.

$6x^{-2,4} + 5 = 13$	$5(6x)^{1,3} = 24$
$6x^{-2,4} = 8$	$(6x)^{1,3} = 4,8$
$x^{-2,4} = \frac{4}{3}$	$6x = 4,8^{\frac{1}{1,3}}$
$x = \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2,4}}$	$x = \frac{1}{6} \cdot 4,8^{\frac{1}{1,3}}$



Daarna kun je de oplossingen benaderen op de GR. Zie hiernaast.

Formules met machten

De formule $y = \frac{50 \cdot \sqrt[4]{x}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$ is te herleiden tot de vorm $y = ax^p$.

$y = \frac{50 \cdot \sqrt[4]{x}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{50x^{\frac{1}{4}}}{x^{2\frac{1}{3}}} = 50x^{-2\frac{1}{12}}$

Om x vrij te maken bij $y = 50x^{-2\frac{1}{12}}$ ga je te werk zoals hiernaast. Je krijgt $x = 6,54 \cdot y^{-0,48}$.

$y = 50x^{-2\frac{1}{12}}$
$50x^{-2\frac{1}{12}} = y$
$x^{-2\frac{1}{12}} = 0,02y$
$x = (0,02y)^{\frac{1}{-2\frac{1}{12}}}$
$x = 0,02^{\frac{1}{-2\frac{1}{12}}} \cdot y^{\frac{1}{-2\frac{1}{12}}}$
$x \approx 6,54 \cdot y^{-0,48}$

5

5.3 De standaardfunctie $f(x) = g^x$

O 48 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

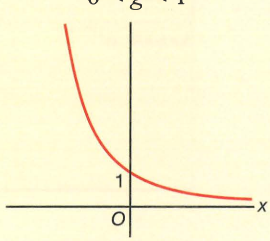
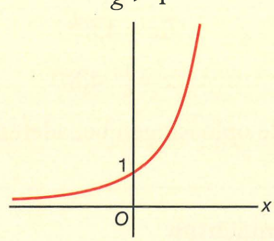
a Plot de grafiek van f en licht toe dat $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$.
b Licht toe dat $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.
c Plot de grafiek van g en licht toe dat $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.
d Geef het bereik van g.

Theorie A Exponentiële functies

De functie $f(x) = 2^x$ is een **exponentiële functie**. De grafiek is stijgend en komt aan de linkerkant steeds dichter bij de x-as. De x-as is de horizontale asymptoot van de grafiek.
Er geldt $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$.

In opgave 48c heb je gezien dat $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

Het bereik van de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
Het domein van deze functies bestaat uit alle getallen. We noteren dit domein als $\mathbb{R}$. Hierbij is $\mathbb{R}$ de verzameling van de **reële getallen**.
De functies $f(x) = g^x$ met $g > 0$ en $g \neq 1$ zijn **exponentiële standaardfuncties** en de bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken.
Voor $0 < g < 1$ is de grafiek dalend en voor $g > 1$ is de grafiek stijgend.

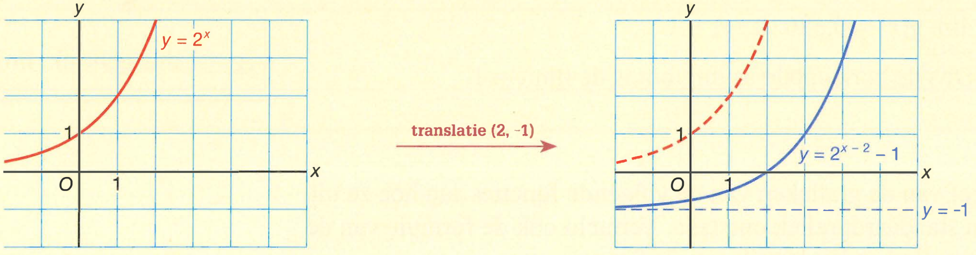
De grafiek van $f(x) = g^x$	
$0 < g < 1$  dalend $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$	$g > 1$  stijgend $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$
domein $\mathbb{R}$ bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$ de x-as (de lijn $y = 0$) is asymptoot	

Op de grafiek van $y = g^x$ kun je transformaties uitvoeren.

Het effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = g^x$

grafiek van		**beeldgrafiek**
$y = g^x$	$\xrightarrow{\text{translatie } (0,\, q)}$	$y = g^x + q$ **met asymptoot** $y = q$
$y = g^x$	$\xrightarrow{\text{translatie } (p,\, 0)}$	$y = g^{x-p}$ **met asymptoot** $y = 0$
$y = g^x$	$\xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as}, a}$	$y = a \cdot g^x$ **met asymptoot** $y = 0$

Zo is de beeldgrafiek van $y = 2^x$ bij de translatie (2, -1) de grafiek van $y = 2^{x-2} - 1$ met horizontale asymptoot de lijn $y = -1$. Zie de figuren hieronder.



De grafiek van de functie $f(x) = 5 - 3 \cdot 0{,}6^x$ ontstaat uit de grafiek van $y = 0{,}6^x$ bij achtereenvolgens de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met -3 en de translatie (0, 5).

$$y = 0{,}6^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } -3} y = -3 \cdot 0{,}6^x \xrightarrow{\text{translatie } (0,\, 5)} f(x) = 5 - 3 \cdot 0{,}6^x$$

Uit deze transformaties volgt dat de horizontale asymptoot de lijn $y = 5$ is en het bereik $B_f = \langle \leftarrow, 5\rangle$.

Je kunt de formule van de horizontale asymptoot ook krijgen door een limiet te berekenen. Gebruik $\lim\limits_{x \to \infty} 0{,}6^x = 0$.

Je krijgt $\lim\limits_{x \to \infty}(5 - 3 \cdot 0{,}6^x) = 5 - 3 \cdot 0 = 5$ en hieruit volgt dat de horizontale asymptoot de lijn $y = 5$ is.

Bij het berekenen van een horizontale asymptoot kun je de volgende standaardlimieten gebruiken.

Voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$.

Voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$.

Voorbeeld

Bereken van de grafieken van de volgende functies de formule van de horizontale asymptoot.

a $f(x) = 100 - 15 \cdot 2{,}1^{x+1}$

b $g(x) = 2 \cdot 0{,}7^{3-x} + 1$

Uitwerking

a $f(x) = 100 - 15 \cdot 2{,}1^{x+1} = 100 - 15 \cdot 2{,}1^{x} \cdot 2{,}1 = 100 - 31{,}5 \cdot 2{,}1^{x}$ ← $g > 1$ dus gebruik $\lim\limits_{x \to -\infty}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 100 - 31{,}5 \cdot 0 = 100$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 100$.

b $g(x) = 2 \cdot 0{,}7^{3-x} + 1 = 2 \cdot 0{,}7^{3} \cdot 0{,}7^{-x} + 1 = 2 \cdot 0{,}7^{3} \cdot ((0{,}7)^{-1})^{x} + 1 = 0{,}686 \cdot 1{,}42...^{x} + 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0{,}686 \cdot 0 + 1 = 1$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

$g > 1$ dus gebruik $\lim\limits_{x \to -\infty}$.

5

49 Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Vermeld ook de formule van de asymptoot en het bereik van de functie.

a $f(x) = 3^{x+1} + 5$

b $g(x) = 3 - 2 \cdot 0{,}5^{x}$

c $h(x) = 6 + 4 \cdot 1{,}1^{x}$

d $k(x) = 0{,}01 \cdot 12{,}5^{x} - 150$

50 Bereken van de grafieken van de volgende functies de formule van de horizontale asymptoot.

a $f(x) = 25 - 5 \cdot 1{,}5^{x}$

b $g(x) = 60 + 10 \cdot 0{,}8^{x}$

c $h(x) = 1{,}5 \cdot 1{,}8^{1-x} - 12$

d $k(x) = 180 \cdot 0{,}98^{x+1} - 50$

A 51 De volgende transformaties worden toegepast op de standaardgrafiek $y = 3^{x}$.
Geef telkens de formule van de grafiek die zo ontstaat.

a Eerst met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen t.o.v. de x-as, dan 3 omhoog.

b Eerst spiegelen in de x-as, dan 1 omlaag.

c Eerst de translatie $(4, -5)$, dan met 3 vermenigvuldigen t.o.v. de x-as.

d Eerst met 3 vermenigvuldigen t.o.v. de x-as, dan de translatie $(4, -5)$.

Theorie B Exponentiële ongelijkheden

Bij het oplossen van **exponentiële ongelijkheden** gebruik je grafieken. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

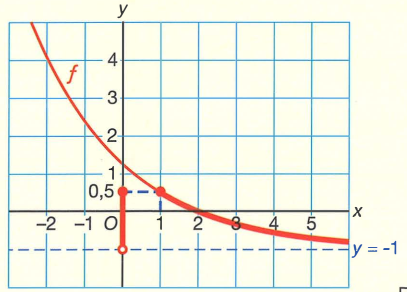
Gegeven is de functie $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 1$.

a Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq 1$?

b Los op $f(x) > 2$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

Uitwerking

a $f(1) = 0{,}5$ en $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 1\right) = 0 - 1 = -1$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -1$.

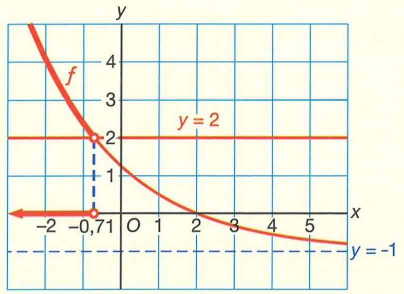


Teken de horizontale asymptoot als stippellijn en zet de formule erbij.

$x \geq 1$ geeft $-1 < f(x) \leq 0{,}5$

Houd rekening met het bereik.

b Voer in $y_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 1$ en $y_2 = 2$.
Intersect geeft $x \approx -0{,}71$.



$f(x) > 2$ geeft $x < -0{,}71$

52 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x+3} - 4$.

a Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 3$?

b Los op $f(x) \leq -1$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

53 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x - 2$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

a Los op $f(x) \geq g(x)$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

b Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen?

A 54 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0{,}5^{x-3} - 1$.

a Teken de grafieken van f en g in één figuur.

b Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = p$ geen oplossing?

c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 2$?

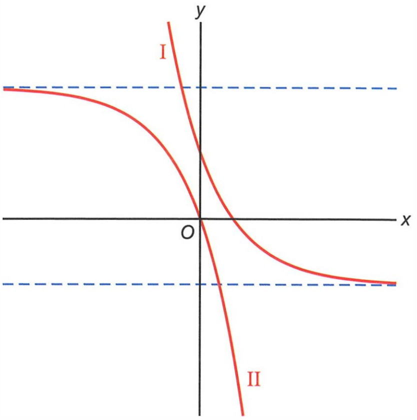
d De lijn $x = 1$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken de lengte van het lijnstuk AB.

e De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt P en de grafiek van g in het punt Q.
Bereken in drie decimalen nauwkeurig de lengte van het lijnstuk PQ.

D 55 Voor elke a, b en c is gegeven de functie $f(x) = a + b \cdot 2^{cx}$.
In de figuur hiernaast zijn twee mogelijke grafieken getekend.
Vul telkens < of > in.

a Bij grafiek I geldt a ... 0, b ... 0 en c ... 0.

b Bij grafiek II geldt a ... 0, b ... 0 en c ... 0.



figuur 5.13

O 56 Je kunt de vergelijking $2^{x-3} = \sqrt{2}$ algebraïsch oplossen.
Je schrijft dan $\sqrt{2}$ als macht van 2.
Los de vergelijking $2^{x-3} = \sqrt{2}$ algebraïsch op.

Uit $2^A = 2^B$ volgt $A = B$.

Theorie C Exponentiële vergelijkingen algebraïsch oplossen

Sommige **exponentiële vergelijkingen** moet je algebraïsch kunnen oplossen, bijvoorbeeld $2^{x-3} = \sqrt{2}$, $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$ en $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$.
Je werkt dan toe naar een vorm waarin het linkerlid en het rechterlid als macht van hetzelfde grondtal geschreven zijn.

Daarna gebruik je

$g^A = g^B$ geeft $A = B$

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$ **b** $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$ **c** $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$

Uitwerking

a $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$
$3^{x+1} = 3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
$3^{x+1} = 3^{-1\frac{1}{2}}$
$x + 1 = -1\frac{1}{2}$
$x = -2\frac{1}{2}$

b $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$
$3^{2x-1} = 9$
$3^{2x-1} = 3^2$
$2x - 1 = 2$
$2x = 3$
$x = 1\frac{1}{2}$

c $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$
$9^{\frac{1}{2}x-3} = 3$
$(3^2)^{\frac{1}{2}x-3} = 3$
$3^{x-6} = 3^1$
$x - 6 = 1$
$x = 7$

T 57 [▶▶60] Los algebraïsch op.

a $2^x = \frac{1}{8}\sqrt{2}$ **c** $2 \cdot 3^{x+1} = 162$ **e** $4^{3x+1} = \frac{1}{2}$

b $2^{3x-1} = 16$ **d** $6^{2x+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ **f** $5 \cdot 16^{2-x} = 40$

58 Los algebraïsch op.

a $2^{x+1} = 64$ **c** $2^{2x} = 2$ **e** $2^x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

b $2^{x-3} = \frac{1}{8}$ **d** $2^x = 1$ **f** $5^{x+6} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

59 Los algebraïsch op.

a $3^{2x+1} = 27\sqrt{3}$ **c** $3^x - 2 = 25$ **e** $10 \cdot 3^x = 270$

b $10^{2x+1} = 0{,}01$ **d** $5 \cdot 2^x = 80$ **f** $3 \cdot 8^{2-x} = 48$

A 60 Los algebraïsch op.

a $3 \cdot 2^x + 4 = 28$ **c** $3 \cdot 7^{3x+1} = 147$ **e** $5 \cdot 4^{x-1} = 2\frac{1}{2}$

b $5^{2x-6} = 0{,}04$ **d** $32^{x-2} = \frac{1}{16}$ **f** $8 \cdot 2^x = 4^{x+1}$

A 61 Gegeven zijn de functies $f(x) = (\sqrt{2})^{x+4}$ en $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

a Los algebraïsch op $f(x) \geq g(x)$.

b Los algebraïsch op $g(x) \geq \sqrt{2}$.

A 62 Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$. De grafiek van f wordt eerst met 6 vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as en daarna 10 omlaag verschoven. Zo ontstaat de grafiek van g.
Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken van f en g.

O 63 Gegeven is de vergelijking $2^{x+1} + 2^x = 48$.

a Licht toe dat uit $2^{x+1} + 2^x = 48$ volgt $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$.

b Licht toe dat uit $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$ volgt $3 \cdot 2^x = 48$ en los deze vergelijking algebraïsch op.

Theorie D Herleiden tot de vorm $g^A = g^B$

De vergelijking $3^{x+2} + 3^x = 10$ is algebraïsch op te lossen.
Gebruik dat $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$ en neem vervolgens de termen $9 \cdot 3^x$ en 3^x samen.

$3^{x+2} + 3^x = 10$
$3^x \cdot 3^2 + 3^x = 10$
$9 \cdot 3^x + 3^x = 10$
$10 \cdot 3^x = 10$
$3^x = 1$
$3^x = 3^0$
$x = 0$

64 Los algebraïsch op.

- **a** $3^{x+2} + 3^x = 810$
- **b** $2^{x-1} + 2^{x+1} = 10$
- **c** $2^{x+3} - 2^x = \frac{7}{8}$
- **d** $3^{x+2} = 24 + 3^x$
- **e** $3^x - 3^{x-1} = 2\sqrt{3}$
- **f** $5^{x-1} + 5^{x-2} = 6\sqrt{5}$

5

A 65 Bereken exact de oplossingen.

- **a** $3^{x+1} = 9^{x+2}$
- **b** $3^{x+1} - 3^{x-1} = 8\sqrt{3}$
- **c** $3^{x^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$
- **d** $5^x + 5^{x+1} = \frac{6}{25}$
- **e** $5^{x^2+5} = 125^{x+1}$
- **f** $2^{x+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} = 28$
- **g** $4^{x^2+1} = 8^{x^2-1}$
- **h** $2^{x+3} - 4^{\frac{1}{2}x-1} = 3\frac{7}{8}$

A 66 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^{x+1} - 4$ en $g(x) = 6 - 3^{x-1}$.

- **a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek? En de grafiek van g?
- **b** Teken de grafieken van f en g in één figuur.
- **c** Geef B_f en B_g.
- **d** Los algebraïsch op $f(x) \leq g(x)$.
- **e** De lijn $x = 2\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.
- **f** Los algebraïsch op $f(x) - g(x) = 80$.
- **g** Voor welke p heeft de vergelijking $g(x) - f(x) = p$ geen oplossingen?

Terugblik

De functie $f(x) = g^x$

De functie $f(x) = g^x$ is een exponentiële functie met $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.
De grafiek van f is een standaardgrafiek, de x-as is de horizontale asymptoot.
Voor $g > 1$ is de grafiek stijgend, voor $0 < g < 1$ is de grafiek dalend.

Asymptoot en limiet

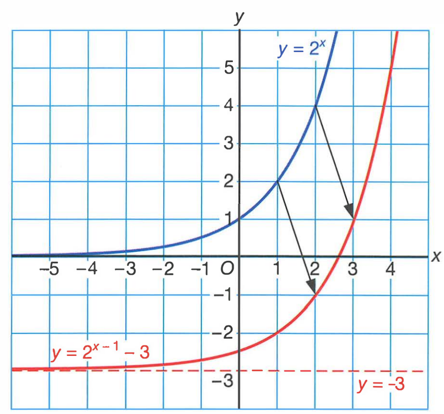
Voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$ en voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$.
Zo is $\lim\limits_{x \to \infty}\left(10 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x\right) = 10 - 3 \cdot 0 = 10$, dus de horizontale asymptoot van de grafiek van $f(x) = 10 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$ is de lijn $y = 10$.

Transformaties op de grafiek van $y = g^x$

De grafiek van $y = g^{x-p} + q$ ontstaat uit de standaardgrafiek $y = g^x$ bij de translatie (p, q).

De grafiek van $y = a \cdot g^x$ ontstaat uit de standaardgrafiek $y = g^x$ bij de vermenigvuldiging met a ten opzichte van de x-as.

De grafiek van $y = 2^{x-1} - 3$ ontstaat uit de grafiek van $y = 2^x$ bij de translatie $(1, -3)$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = -3$.
Teken deze lijn als stippellijn in de figuur.
Het bereik is $\langle -3, \rightarrow \rangle$.
Om de grafiek te tekenen maak je ook een tabel.
De grafiek van $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ ontstaat uit die van $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ bij de translatie $(-1, 0)$ gevolgd door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 4.



Exponentiële vergelijkingen

Bij het algebraïsch oplossen van exponentiële vergelijkingen werk je vaak toe naar de vorm $g^A = g^B$.
Daarna gebruik je $g^A = g^B$ geeft $A = B$.

$$2 \cdot 3^{2x+4} - 3 = 51$$
$$2 \cdot 3^{2x+4} = 54$$
$$3^{2x+4} = 27$$
$$3^{2x+4} = 3^3$$
$$2x + 4 = 3$$
$$2x = -1$$
$$x = -\tfrac{1}{2}$$

$$2^x = 4^{x-1}$$
$$2^x = (2^2)^{x-1}$$
$$2^x = 2^{2x-2}$$
$$x = 2x - 2$$
$$-x = -2$$
$$x = 2$$

$$2^x = 2^{x-2} + 12$$
$$2^x - 2^{x-2} = 12$$
$$2^x - 2^x \cdot 2^{-2} = 12$$
$$2^x - \tfrac{1}{4} \cdot 2^x = 12$$
$$\tfrac{3}{4} \cdot 2^x = 12$$
$$2^x = 16$$
$$2^x = 2^4$$
$$x = 4$$

5.4 Exponentiële groei

O 67 Een bedrag neemt elk jaar met 5% toe. Op 1 januari 2010 is het bedrag 1000 euro.

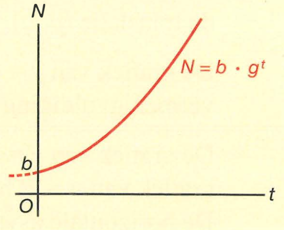
a Hoeveel is het bedrag op 1 januari 2011? En op 1 januari 2015?

b Bij het bedrag B in euro's hoort een formule van de vorm $B = 1000 \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2010. Welk getal is g?

Theorie A Groeifactor en groeipercentage

In opgave 67 neemt het bedrag jaarlijks met 5% toe. Er is sprake van **exponentiële groei** met een **groeipercentage** van 5%. Bij een groeipercentage van 5% hoort een **groeifactor** van 1,05 per jaar.

Bij exponentiële groei
- **wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd, dit getal heet de groeifactor per tijdseenheid**
- **hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, hierin is g de groeifactor per tijdseenheid en b de beginhoeveelheid.**



Bij de formule $N = b \cdot g^t$ onderscheiden we twee gevallen.
- $g > 1$
  De grafiek is stijgend.
- $0 < g < 1$
  De grafiek is dalend. Ook in dit geval spreken we van exponentiële groei, hoewel de namen **exponentieel verval** en **exponentiële afname** ook worden gebruikt.

> $g \leq 0$ laten we buiten beschouwing.
> b is de beginhoeveelheid, dus $b > 0$.

Neemt een bedrag per jaar met 8% toe, dan is de groeifactor 1,08 per jaar. Immers 100% + 8% = 108%, dus vermenigvuldigen met 1,08. We noteren dat kort als $g_{\text{jaar}} = 1{,}08$.
Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 1,238 is, dan heb je te maken met een procentuele toename van $(1{,}238 - 1) \cdot 100\% = 23{,}8\%$ per jaar.
Bij een jaarlijkse afname met 8,6% is de groeifactor 0,914 per jaar, want 100% − 8,6% = 91,4%, dus vermenigvuldigen met 0,914.
Omgekeerd hoort bij een groeifactor van 0,982 een procentuele verandering van −1,8%, dus een afname van 1,8%.

68 **a** Een hoeveelheid neemt per jaar met 12,7% toe.
Geef de groeifactor per jaar.
b Een hoeveelheid neemt per maand met 6,8% af.
Geef de groeifactor per maand.
c Bij een exponentiële groei is de groeifactor 1,735 per maand.
Geef het groeipercentage per maand.
d Bij een exponentiële groei is de groeifactor 0,845 per dag.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?
e Bij een exponentiële groei is de groeifactor 2,42 per jaar.
Geef het groeipercentage per jaar.
f Een hoeveelheid neemt per dag met 0,7% af.
Geef de groeifactor per dag.

A 69 De Rhônegletsjer ligt in een schitterend gebied in Zwitserland. Door de opwarming van de aarde neemt de lengte van de gletsjer af. In januari 2005 was de lengte nog 11,9 km. Deskundigen verwachten dat de lengte met 1,2% per jaar zal afnemen.
a Stel de formule op van de lengte L in km van de Rhônegletsjer.
Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in januari 2005.
b In welk jaar is de lengte voor het eerst minder dan 7500 meter?

O 70 Bij een exponentiële groei is de groeifactor per jaar gelijk aan 9.
De beginwaarde is 2.
a Vul de tabel in.

tijd in jaren	0	1	2	3	4	5
hoeveelheid N	2	18	162			

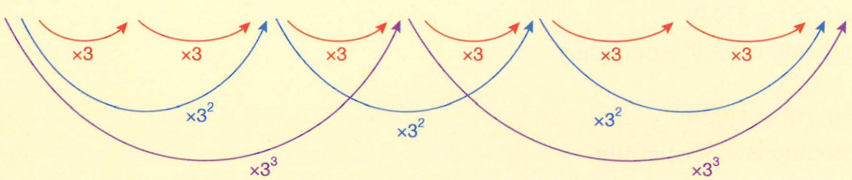
b Met welk getal wordt N per twee jaar vermenigvuldigd?
c Wordt N per halfjaar met meer of minder dan 4,5 vermenigvuldigd?

Theorie B Groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid

Een hoeveelheid groeit exponentieel met beginwaarde 100 en groeifactor 3 per uur.

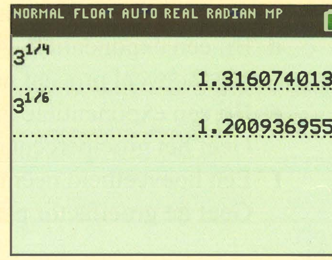
EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	100	$100 \cdot 3^1 = 300$	$100 \cdot 3^2 = 900$	$100 \cdot 3^3 = 2700$	$100 \cdot 3^4 = 8100$	$100 \cdot 3^5 = 24300$	$100 \cdot 3^6 = 72900$



Je ziet per 2 uur is de groeifactor 3^2
per 3 uur is de groeifactor 3^3
⋮
per n uur is de groeifactor 3^n

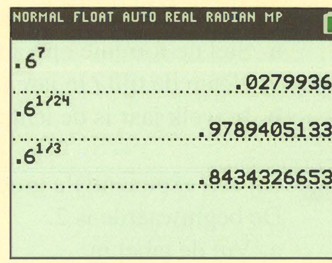
Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n.
Zo geldt dat per kwartier de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}316$ is, immers $g_{\text{kwartier}} = 3^{\frac{1}{4}}$ geeft $g_{\text{uur}} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 3$
en per tien minuten is de groeifactor $3^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}201$, immers $g_{10\text{ minuten}} = 3^{\frac{1}{6}}$ geeft $g_{\text{uur}} = \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 3$.



Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n.

Heb je te maken met een exponentiële groei met een groeifactor van 0,6 per dag, dan is

- de groeifactor per week $0{,}6^7 \approx 0{,}028$
- de groeifactor per uur $0{,}6^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}979$
- de groeifactor per acht uur $0{,}6^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}843$.



Om te berekenen wat het groeipercentage per dag is bij een toename van 70% per week ga je als volgt te werk.
$g_{\text{week}} = 1{,}70$
$g_{\text{dag}} = 1{,}70^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}079$
Het groeipercentage per dag is 7,9%.

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% toe.
a Hoeveel procent is de toename per dag?
b Hoeveel procent is de toename per uur?

Uitwerking
a $g_{6\text{ uur}} = 1{,}18$
$g_{\text{dag}} = 1{,}18^4 \approx 1{,}939$
De toename is 93,9% per dag.
b $g_{6\text{ uur}} = 1{,}18$
$g_{\text{uur}} = 1{,}18^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}028$
De toename is 2,8% per uur.

71 Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.
a Hoeveel procent is de toename per uur?
b Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?
c Hoeveel procent is de toename per vijf uur? Rond af op gehelen.

Geef percentages in één decimaal nauwkeurig en rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

72 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.
a Bereken de groeifactor per week.
b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?
c Bereken het groeipercentage per kwartier in twee decimalen nauwkeurig.

73 Bij een exponentiële groei hoort een groeifactor van 1,3 per dag.
a Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehelen.
b Bereken het groeipercentage per vier uur.

74 **a** Een hoeveelheid neemt per uur met 19,5% af. Hoeveel procent is de afname per kwartier?
b Een hoeveelheid neemt per jaar met 8,6% toe. Hoeveel procent is de toename per 25 jaar? Rond af op gehelen.
c Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe. Hoeveel procent is de toename per dag?

5

A 75 Ga bij de volgende vragen uit van exponentiële groei.
a Het beleid van de regering is er op gericht om de door particulieren met zonnecellen opgewekte hoeveelheid energie elke drie jaar met de factor 2,5 te vermenigvuldigen. Bereken het groeipercentage per jaar.
b Het maximale vermogen van windturbines in Nederland is in de periode 2005-2015 vervijfvoudigd. Bereken het groeipercentage per jaar.
c Naar verwachting zal de vleesconsumptie in Europa in de periode 2012-2020 met 15% dalen. Hoeveel procent is de afname per jaar?

O 76 Een bacteriecultuur groeit exponentieel. Op $t = 5$ zijn er 50 000 bacteriën.
Op $t = 9$ zijn er 300 000 bacteriën.
Hierbij is t in uren.
a Licht toe dat de groeifactor per vier uur gelijk is aan 6.
b Bereken de groeifactor per uur.

Theorie C De formule opstellen bij exponentiële groei

Is bij een exponentiële groei op twee tijdstippen de hoeveelheid bekend, dan kun je de bijbehorende formule opstellen. Je berekent hiertoe eerst de groeifactor per tijdseenheid en vervolgens de beginhoeveelheid.

Voorbeeld

Om 12:00 uur wordt een stukje vlees uit de koeling gehaald.
Het aantal salmonellabacteriën op het stukje vlees neemt daarna exponentieel toe.
Om 18:00 uur zijn er 10 miljoen bacteriën en om 22:00 uur zijn dat er 18 miljoen.
Stel de formule op van het aantal bacteriën N in miljoenen.
Neem de tijd t in uren met $t = 0$ om 12:00 uur.

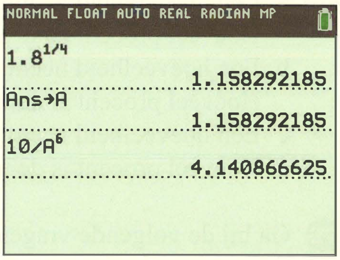
Uitwerking
Stel $N = b \cdot g^t$.

$g_{4\text{ uur}} = \frac{18}{10} = 1{,}8$, dus $g_{\text{uur}} = 1{,}8^{\frac{1}{4}} = 1{,}158...$

$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}158...^t \\ t = 6 \text{ en } N = 10 \end{array}\right\} b \cdot 1{,}158...^6 = 10$

$b = \frac{10}{1{,}158...^6} \approx 4{,}1$

Dus $N = 4{,}1 \cdot 1{,}158^t$.

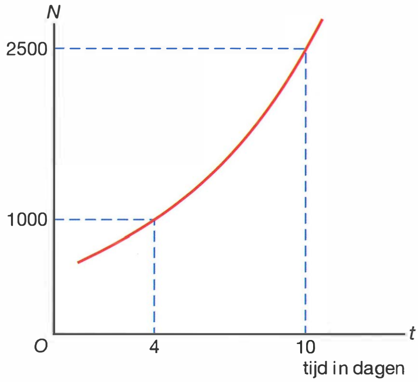


77 **a** Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 3$ is $N = 1600$ en op $t = 10$ is $N = 4100$. Hierbij is t in uren.
Stel de formule op van N.

b Een bacteriesoort groeit exponentieel. Op $t = 2$ zijn er 150 000 bacteriën en op $t = 8$ zijn dat er 1 250 000. Hierbij is t in uren.
Stel de formule op van het aantal bacteriën N. Rond de groeifactor af op twee decimalen.

c Een hoeveelheid radioactieve stof neemt exponentieel af.
Op $t = 5$ is er 0,60 gram en op $t = 8$ is er 0,47 gram. Hierbij is t in dagen.
Stel de formule op van de hoeveelheid H in gram.

78 Stel de formule op die bij de exponentiële groei in figuur 5.14 hoort.



figuur 5.14

79 Rob heeft op 1 januari 2008 geld op de bank gezet tegen een vast rentepercentage. Op 1 januari 2013 staat er € 574,03 op zijn rekening en op 1 januari 2015 is dat € 606,63.
Welk bedrag heeft Rob op de bank gezet?

A 80 Bij het helen van een wond blijkt de wondoppervlakte exponentieel af te nemen.
De oppervlakte van een wond is na drie dagen 31 mm^2 en na zeven dagen 11 mm^2.

- **a** Stel de formule op van de oppervlakte A in mm^2. Neem de tijd t in dagen.
- **b** Hoe groot was de oorspronkelijke wond?
- **c** Hoe groot is de wond na 60 uur?

O 81 De luchtdruk neemt af met de hoogte. Zie de tabel.

- **a** Toon aan dat er sprake is van een exponentieel verband tussen de luchtdruk en de hoogte.
- **b** Stel de formule op van de luchtdruk P in hPa als functie van de hoogte h in km.
- **c** Een vliegtuig daalt van een hoogte van 12 km naar een hoogte van 500 meter. Met hoeveel procent is de luchtdruk buiten het vliegtuig toegenomen? Rond af op gehelen.

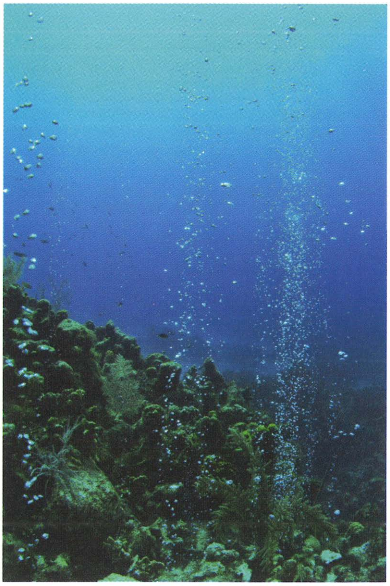
hoogte in meter	luchtdruk in hPa
0	1013
1000	897
2000	793
3000	702
4000	621
5000	550

Theorie D Exponentiële verbanden

In opgave 81 heb je te maken met een **exponentieel verband** waarbij de luchtdruk een functie is van de hoogte.
De groeifactor per 1000 meter is 0,885, dus de groeifactor per 2500 meter is $0{,}885^{2\frac{1}{2}} \approx 0{,}737$ en de groeifactor per 300 meter is $0{,}885^{\frac{3}{10}} \approx 0{,}964$.

82 Omdat water rood licht meer absorbeert dan blauw licht ziet op grote diepte alles er blauw uit. Zo is in de Caribische Zee op vijf meter diepte al 92% van het rode licht geabsorbeerd en van het blauwe nog maar 83%.
We noemen P_r het percentage van het rode licht dat op een diepte van d meter doordringt en P_b het percentage van het blauwe licht dat op een diepte van d meter doordringt.
Er bestaat een exponentieel verband zowel tussen P_r en d als tussen P_b en d.

- **a** Stel de formule op van P_r en van P_b.
- **b** Tot welke diepte dringt slechts 1% van het rode licht door? Hoeveel procent blauw licht dringt tot deze diepte door?



83 Bij de papierformaten van de A-reeks heeft het grondformaat A0 de afmetingen lengte × breedte = 1189 mm × 841 mm.
Het bekende formaat A4 heeft de afmetingen
$l \times b = 297$ mm × 210 mm.
Er geldt steeds $l : b = \sqrt{2} : 1$.

a Controleer deze verhouding voor de formaten A0 en A4.

Voor de breedte b in mm van de A-formaten geldt $b_n = 841 \cdot g^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b Bereken g in drie decimalen nauwkeurig.

c Stel de formule op van de lengte l_n in mm van de A-formaten.

Uit de formules van l en b volgt de formule van de oppervlakte A_n van de A-formaten.

d Stel met behulp van de formules van l en b de formule op van A_n in m^2 van de A-formaten.

e Vanaf welk A-formaat is de oppervlakte minder dan 100 cm^2?

5

A 84 Een bal bereikt bij een vrije val na het stuiteren weer een hoogte van 80% van de vorige hoogte.
De bal wordt op een hoogte van 4 m losgelaten.

a Hoeveel cm heeft de bal afgelegd als hij voor de vierde keer de grond raakt?

b Na hoeveel keer stuiteren komt de bal voor het eerst niet hoger dan 10 cm?

c De bal wordt dit keer van een grotere hoogte losgelaten. Na de derde stuiter bereikt de bal nog juist een hoogte van 4 m.
Op welke hoogte is de bal losgelaten?

Terugblik

Groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid

Is g de groeifactor per tijdseenheid, dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n.
Deze regel geldt ook voor niet-gehele getallen n.

Zo hoort bij een groeifactor van 1,8 per uur een groeifactor van $1{,}8^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}158$ per kwartier.

Is de afname per dag 20%, dan is

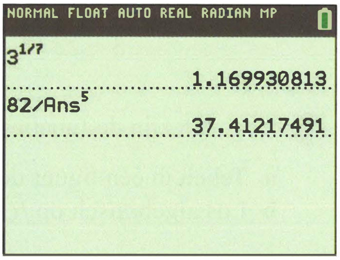
- de groeifactor per dag gelijk aan 0,8
- de groeifactor per week $0{,}8^7 \approx 0{,}210$, dus de afname per week is 79,0%
- de groeifactor per uur $0{,}8^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}991$, dus de afname per uur is 0,9%.

Het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid gaat via groeifactoren.

De formule opstellen bij exponentiële groei

Weet je bij een exponentiële groei op twee tijdstippen de hoeveelheid, dan kun je de formule opstellen.
Is $N = 82$ voor $t = 5$ uur en is $N = 246$ voor $t = 12$ uur, dan is

$$g_{7\text{ uur}} = \frac{246}{82} = 3, \text{ dus } g_{\text{uur}} = 3^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}169...$$



$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}169...^t \\ \text{bij } t = 5 \text{ hoort } N = 82 \end{array}\right\} \; b \cdot 1{,}169...^5 = 82$$

$$b = \frac{82}{1{,}169...^5} \approx 37$$

Dus $N = 37 \cdot 1{,}170^t$.

Exponentiële verbanden

Bij een geluiddempend materiaal levert elke cm dikte een demping op van 35%. De bijbehorende formule is $G = 100 \cdot 0{,}65^d$. Hierin is G het percentage van het geluid dat doordringt en d de dikte van het materiaal in cm.
Wil men een demping bereiken van 95%, dan geldt $100 \cdot 0{,}65^d = 5$.
Invoeren van $y_1 = 100 \cdot 0{,}65^x$ en $y_2 = 5$ en intersect geeft $x \approx 6{,}95$.
Er moet een 7 cm dikke laag van het materiaal worden gebruikt om een demping van 95% te krijgen.

Diagnostische toets

5.1 Wortelvormen en gebroken vormen

1 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$ en $g(x) = -2 - \sqrt{x+4}$.

a Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?

b Schets de grafieken van f en g.

c Geef D_f, B_f, D_g en B_g.

2 Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{3 - 4x}$.

a Teken de grafiek van f en geef B_f.

b Los algebraïsch op $f(x) > 1\frac{1}{2}$.

c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -\frac{1}{4}$?

3 **a** Gegeven is de formule $N = 2\sqrt{-5t + 1}$.
Schrijf t als functie van N.

b Maak y vrij bij de formule $2x\sqrt{y} - 6\sqrt{x} = 1$.

4 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7 - 2x}{3x - 5}$ **b** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x + 1}{|3 - 2x|}$ **c** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - |5 - x|}{|x| + 6}$

5 Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek.

a $f(x) = 1 + \dfrac{4x}{3 - 2x}$ **b** $g(x) = \dfrac{|6 - 5x|}{2x + 3}$ **c** $h(x) = \dfrac{|3x| - 4}{|2 - x|}$

6 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

a Teken in één figuur de grafieken van f en g.

b Los algebraïsch op $f(x) \geq g(x)$.

5.2 Machten met negatieve en gebroken exponenten

7 Schrijf als macht van a.

a $\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$ **b** $a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$ **c** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

8 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponent.

a $\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^3$ **b** $a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{5}}$ **c** $7a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{3}{5}}$

9 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

a $y = \dfrac{1}{5x^2}$ **b** $y = \dfrac{12}{5x^{-3}}$ **c** $y = 3 \cdot x^{0,3} \cdot (4x^{0,5})^4$

10 Los algebraïsch op. Rond af op drie decimalen.

a $\frac{1}{4}x^{-3,7} = 160$ **b** $7 \cdot \sqrt[5]{x^3} = 48$ **c** $(3x)^{1,6} + 2 = 7$

11 Herleid $K = 7 \cdot (5q)^{-1,3}$ tot de vorm $q = a \cdot K^b$. Rond a en b af op twee decimalen.

5.3 De standaardfunctie $f(x) = g^x$

12 **a** Hoe ontstaat de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}3 \cdot 4^x - 130$ uit een standaardgrafiek?

b Bereken van de grafiek van $g(x) = 45 + 12 \cdot 0{,}5^{x+3}$ de formule van de horizontale asymptoot.

13 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 6$.

a Los op $f(x) \geq g(x)$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

b Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 4$?

c Voor welke p heeft de vergelijking $g(x) = p$ één oplossing?

14 Los algebraïsch op.

a $5^{x-1} = 125 \cdot \sqrt{5}$ **b** $3^{2x-5} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$ **c** $2 \cdot 4^{2x-1} - 3 = 61$

15 Los algebraïsch op.

a $9^{x-1} = 27^{x+1}$ **b** $2^{x+2} + 2^{x-1} = 36$ **c** $2^{x^2} = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

5.4 Exponentiële groei

16 Een hoeveelheid neemt per dag met 10% toe.

a Bereken het groeipercentage per week.

b Bereken het groeipercentage per 8 uur.

17 Een hoeveelheid neemt per jaar met 36% af.

a Hoeveel procent is de afname per maand?

b Hoeveel procent is de afname per 5 jaar?

18 Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 4$ is $N = 1500$ en op $t = 7$ is $N = 1200$. Hierbij is t in dagen.
Stel de formule op van N.

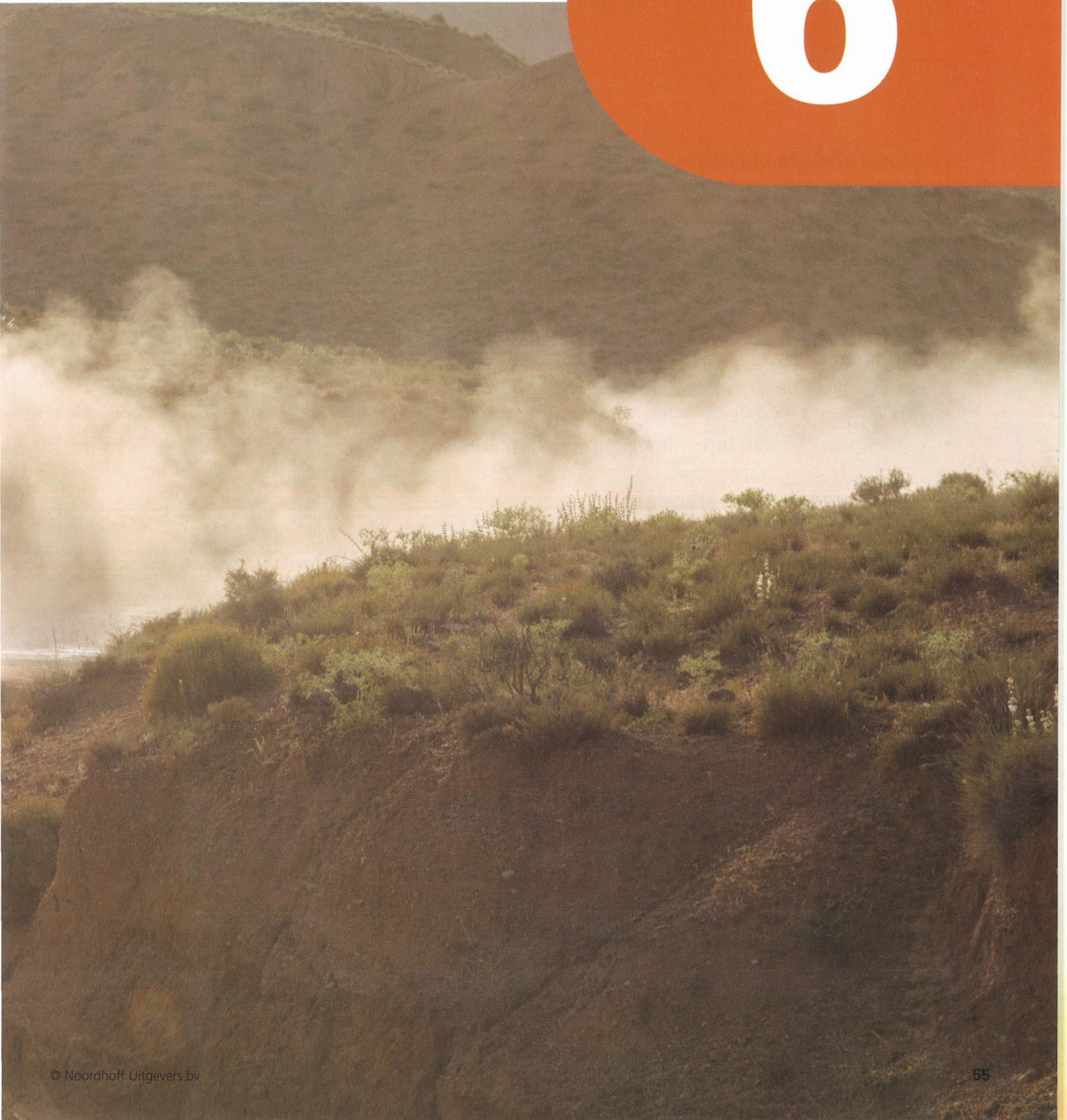
Een rally is een wedstrijd in de auto- en motorsport. Het parcours bestaat vaak uit onverharde wegen. Bekend is de Dakar-rally. Deze wordt gehouden in de Zuid-Amerikaanse woestijn in Argentinië en Chili. De deelnemers kiezen de in hun ogen snelste route over het parcours. Daarbij komt het behalve op intuïtie ook aan op slim rekenen.

Wat leer je?

- Hoe je algebraïsch extreme waarden berekent.
- De betekenis van de tweede afgeleide.
- Wat buigpunten zijn en hoe je deze vindt.
- Afgeleiden berekenen van machtsfuncties met negatieve en gebroken exponenten.
- Wat de kettingregel is.
- De kettingregel combineren met de productregel en de quotiëntregel.

Differentiaalrekening

6



Voorkennis Differentiëren

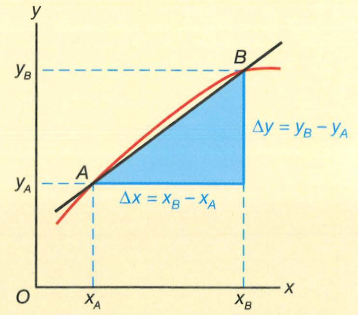
Theorie A Helling en afgeleide

Het differentiequotiënt

Het differentiequotiënt van y op het interval $[x_A, x_B]$ is

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (helling) van de lijn AB
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval $[a, b]$ is gelijk aan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

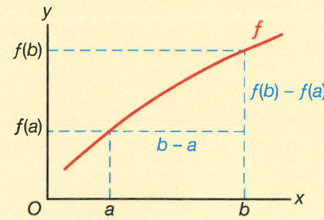


figuur 6.1

Hellinggrafiek en afgeleide functie

De hellingfunctie van f geeft bij elke x de helling van de grafiek van f in dat punt.
De grafiek van de hellingfunctie heet de hellinggrafiek.
Een ander woord voor hellingfunctie is afgeleide functie of afgeleide.
Hieronder staat het verband tussen de grafiek van f en de hellinggrafiek van f.

- grafiek van f is stijgend hoort bij hellinggrafiek boven de x-as
- grafiek van f is dalend hoort bij hellinggrafiek onder de x-as
- grafiek van f heeft top hoort bij hellinggrafiek snijdt de x-as



figuur 6.2

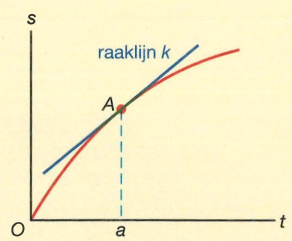
Snelheid en richtingscoëfficiënt

In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.

De definitie en de betekenis van de afgeleide

Per definitie is de afgeleide f' van een functie f gelijk aan

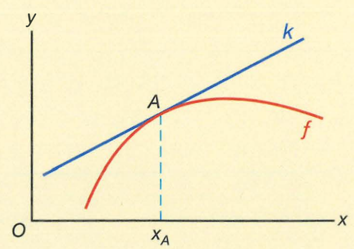
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



figuur 6.3

De afgeleide van een functie f geeft voor elke x

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k van de grafiek van f in het bijbehorende punt A, dus $\text{rc}_k = \left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x = x_A}$
- de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt
- de snelheid waarmee $f(x)$ verandert.



figuur 6.4 $\text{rc}_k = \left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_A}$

Regels voor de afgeleide

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet differentiëren.

$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$

$f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = nax^{n-1}$ voor $n = 2, 3, 4, \ldots$

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$

$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ (somregel)

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (productregel)

$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ (quotiëntregel)

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 8$

b $g(x) = (3x^2 - 1)^2$

c $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Uitwerking

a $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 8$ geeft $f'(x) = 12x^2 - 14x + 5$

b $g(x) = (3x^2 - 1)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1$ geeft $g'(x) = 36x^3 - 12x$

c $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ geeft

$$h'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 2x - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

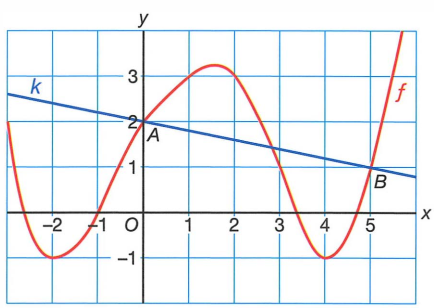
1 [▶ WERKBLAD] Zie de figuur hiernaast.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op $[-1, 3]$.

b Bereken het differentiequotiënt van f op $[1, 4]$.

c Bereken de helling van de lijn k.

d Schets de hellinggrafiek van f.



figuur 6.4

2 Differentieer.

a $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$

b $g(x) = (5x^2 - 2)^2$

c $h(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 4}$

d $k(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$

e $l(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$

f $m(x) = 2x^2 - \dfrac{6}{x + 1}$

Theorie B Raaklijn, snelheid en afgeleide

Bij het opstellen van de formule van de raaklijn k met behulp van de afgeleide gebruik je dat voor een punt A op de grafiek van f geldt dat $f'(x_A)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in A is.

Is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt B gelijk aan 3, dan bereken je de coördinaten van B met behulp van de vergelijking $f'(x) = 3$.

Is de afgelegde weg s in meter na t seconden gegeven door $s(t) = 0{,}05t^2 + t$, dan is de snelheid na 5 seconden gelijk aan $v(5) = s'(5)$.
Omdat $v(t) = s'(t) = 0{,}1t + 1$ is de snelheid $v(5) = s'(5) = 0{,}1 \cdot 5 + 1 = 1{,}5$ m/s.
Je gebruikt: $f'(a)$ is de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = a$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$.

a Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 2$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in A.

b In de punten B en C van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 3.
Bereken algebraïsch de coördinaten van B en C.

Uitwerking

a $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$
Stel $k: y = ax + b$.
$a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 6 = -2$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(2) = -3, \text{ dus } A(2, -3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = -3 \\ -4 + b = -3 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $k: y = -2x + 1$.

b $f'(x) = 3$ geeft $3x^2 - 10x + 6 = 3$
$3x^2 - 10x + 3 = 0$
$D = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$

$$x = \frac{10 - 8}{6} = \tfrac{1}{3} \vee x = \frac{10 + 8}{6} = 3$$

$x_B = \frac{1}{3}$ geeft $y_B = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{14}{27}$, dus $B(\frac{1}{3}, -1\frac{14}{27})$.

$x_C = 3$ geeft $y_C = f(3) = -3$, dus $C(3, -3)$.

3 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

a Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 3$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in A.

b In het punt B van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 8.
Bereken algebraïsch de coördinaten van B.

4 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$.

a De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A.

b In de punten B en C van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 1.
Bereken algebraïsch de coördinaten van B en C.

5 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$.

a Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 2$.
Stel met behulp van differentiëren de formule op van de raaklijn k in A.

b In de punten B en C van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $\frac{3}{4}$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van B en C.

6

6 Een auto trekt op. Gedurende de eerste tien seconden is de afgelegde weg s in meter te berekenen met de formule $s(t) = 1{,}5t^2$. Hierbij is t de tijd in seconden. Na tien seconden verandert de snelheid niet meer.

a Bereken algebraïsch de snelheid in km/uur na vijf seconden en na tien seconden.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 100 km/uur.

c Hoeveel meter legt de auto in de eerste 20 seconden af?

6.1 Toppen en buigpunten

O 1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 18x + 50$.
De punten A en B zijn toppen van de grafiek van f.
Wat weet je van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in elk van die punten? Bereken algebraïsch de x-coördinaten van A en B.

Theorie A Algebraïsch berekenen van extreme waarden

In een top van de grafiek van de functie f is de raaklijn horizontaal.
Je kunt de x-coördinaat van de top berekenen door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen.
Uit de grafiek van f volgt of de extreme waarde die bij de top hoort een minimum of een maximum is.

Werkschema: het algebraïsch berekenen van extreme waarden

1 Bereken $f'(x)$.
2 Los algebraïsch op $f'(x) = 0$.
3 Voer de formule van f in op de GR, plot de grafiek en schets de grafiek. Kijk in de grafiek of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
4 Bereken de y-coördinaten van de toppen en noteer het antwoord in de vorm max. is $f(\ldots) = \ldots$ of min. is $f(\ldots) = \ldots$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 120x + 150$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

Uitwerking

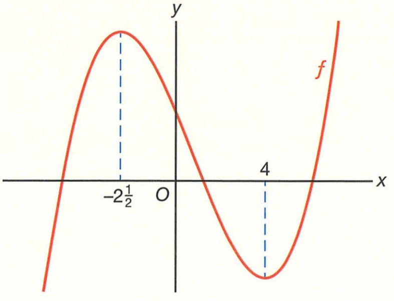
$f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 120x + 150$ geeft $f'(x) = 12x^2 - 18x - 120$

$f'(x) = 0$ geeft $12x^2 - 18x - 120 = 0$

$2x^2 - 3x - 20 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -20 = 169$

$x = \dfrac{3 - 13}{4} = -2\frac{1}{2} \vee x = \dfrac{3 + 13}{4} = 4$

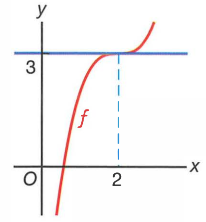


max. is $f(-2\frac{1}{2}) = 331\frac{1}{4}$ en min. is $f(4) = -218$.

6

Informatief Afgeleide = 0 en top van de grafiek

In het werkschema staat bij 3 dat je een schets moet maken van de grafiek. Dit is nodig omdat je na het oplossen van de vergelijking 'afgeleide = 0' nog niet weet of je met een minimum of een maximum te maken hebt.
Bovendien zijn de beweringen 'afgeleide = 0' en 'de grafiek heeft een top' niet gelijk.
Zo is bij de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ wel $f'(2) = 0$, maar de grafiek heeft geen top. De grafiek heeft een horizontale raaklijn in het punt (2, 3).



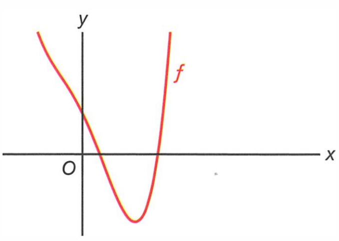
2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

3 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 2$.
a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.
b Geef het bereik van f.

A 4 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 3$.
a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.
b Neem $D_f = [0, 3]$ en geef B_f.
c Neem $D_f = [3, \rightarrow\rangle$ en geef B_f.

A 5 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 4}$.
a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f en geef het bereik.
b Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 6$.
c Los algebraïsch op $f(x) < 1$.

O 6 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.
a Bereken $f'(x)$.
b Toon met een berekening aan dat $f'(2) = 0$.
c Hoe volgt uit vraag b en de schets in figuur 6.6 dat de grafiek dat f een extreme waarde heeft voor $x = 2$?



figuur 6.6

6

Theorie B Aantonen van extreme waarden

Bij het met de afgeleide aantonen dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = a$ volg je het werkschema hieronder.

Werkschema: met de afgeleide aantonen dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = a$

1 Bereken $f'(x)$.
2 Laat met een berekening zien dat $f'(a) = 0$.
3 Schets de grafiek van f en laat zien dat de grafiek een top heeft voor $x = a$.

In het voorbeeld wordt aangetoond dat de functie $f(x) = 2x^5 - 6x^3$ een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{4}{5}}$.

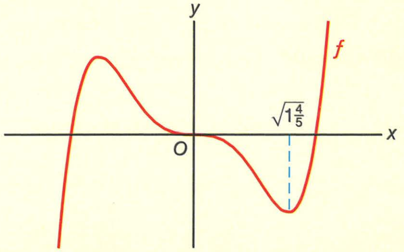
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^5 - 6x^3$.

Toon met de afgeleide aan dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{4}{5}}$.

Uitwerking
$f(x) = 2x^5 - 6x^3$ geeft $f'(x) = 10x^4 - 18x^2$

$$f'\left(\sqrt{1\tfrac{4}{5}}\right) = 10 \cdot \left(\sqrt{1\tfrac{4}{5}}\right)^4 - 18 \cdot \left(\sqrt{1\tfrac{4}{5}}\right)^2 = 10 \cdot \left(1\tfrac{4}{5}\right)^2 - 18 \cdot 1\tfrac{4}{5} = 10 \cdot \tfrac{81}{25} - \tfrac{162}{5} = \tfrac{162}{5} - \tfrac{162}{5} = 0$$



$f'\left(\sqrt{1\frac{4}{5}}\right) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{1\frac{4}{5}}$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{1\frac{4}{5}}$.

7 Gegeven is de functie $f(x) = 2x^5 - 6x^3$ van het voorbeeld.
a De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 2$.
Stel algebraïsch de formule op van l.
b Toon aan dat $f'(0) = 0$.
Heeft de functie een extreme waarde voor $x = 0$? Licht toe.

8 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$.
Toon met de afgeleide aan dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{3}$.

9 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$.

a Toon met de afgeleide aan dat f geen extreme waarde heeft voor $x = 1$.

b Toon met de afgeleide aan dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

A 10 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1}$.

a Toon met de afgeleide aan dat de functie een extreme waarde heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

De noemer is te ontbinden in $(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

b Toon dit aan.

c Bereken de coördinaten van de perforatie van de grafiek van f.

d Los de vergelijking $f'(x) = 0$ algebraïsch op door eerst de formule van f te vereenvoudigen.

O 11 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 3$.

a Schets de grafiek van f.

b In welke intervallen is de grafiek van f dalend? En in welke intervallen stijgend? Welke soorten van stijgen herken je? Geef de bijbehorende intervallen.

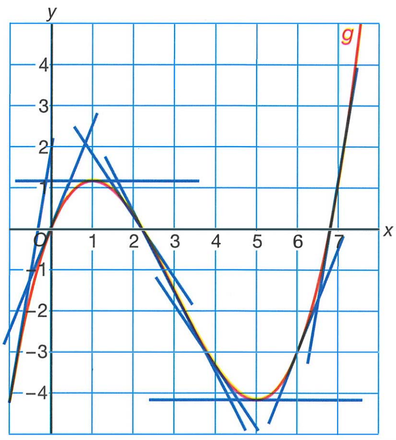
c Bereken $f'(x)$ en schets de grafiek van f'.

De grafiek van f' heeft een hoogste punt voor $x = x_P$.

d Bereken x_P.

e Wat heeft x_P te maken met de verschillende soorten van stijgen van de grafiek van f? Licht toe.

O 12 In figuur 6.7 is de grafiek van de functie g getekend met de raaklijnen van de grafiek in de punten met x-coördinaat $-1, 0, 1, 2, ..., 7$.



figuur 6.7

a Sommige van de getekende raaklijnen raken de grafiek van g aan de *bovenkant*, andere raken de grafiek aan de *onderkant*. Voor welke waarden van x raken de raaklijnen aan de bovenkant?

b Van links naar rechts over de grafiek gaand nemen de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen eerst af en daarna weer toe. Geef de coördinaten van het punt waar de overgang van afname naar toename plaatsvindt.

c Vul in. Voor toenemende $g'(x)$ raken de raaklijnen de grafiek van g aan de ... kant. Voor afnemende $g'(x)$ raken de raaklijnen de grafiek van g aan de ... kant.

Theorie C Buigpunt en buigraaklijn

In figuur 6.8a zie je een grafiek die de bolle kant naar beneden heeft. In plaats van 'de grafiek heeft de bolle kant naar beneden' kun je ook zeggen

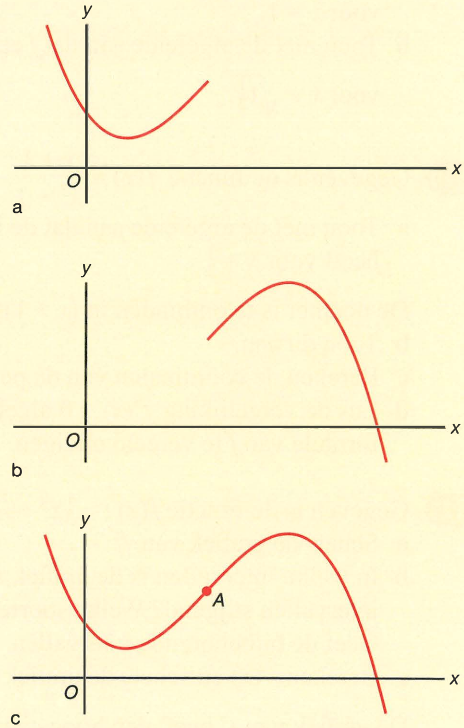
- elke raaklijn ligt onder de grafiek (uitgezonderd in het raakpunt)
- de afgeleide is stijgend.

In figuur 6.8b zie je een grafiek die de bolle kant naar boven heeft. In plaats van 'de grafiek heeft de bolle kant naar boven' kun je ook zeggen

- elke raaklijn ligt boven de grafiek (uitgezonderd in het raakpunt)
- de afgeleide is dalend.

In figuur 6.8c zie je een grafiek van de functie f die in het linkerdeel de bolle kant naar beneden heeft en in het rechterdeel de bolle kant naar boven. Deze delen sluiten in het punt A op elkaar aan. In het punt A geldt dus

- de raaklijn ligt links van het punt A onder de grafiek en rechts van het punt A boven de grafiek
- de afgeleide heeft een maximum voor $x = x_A$.

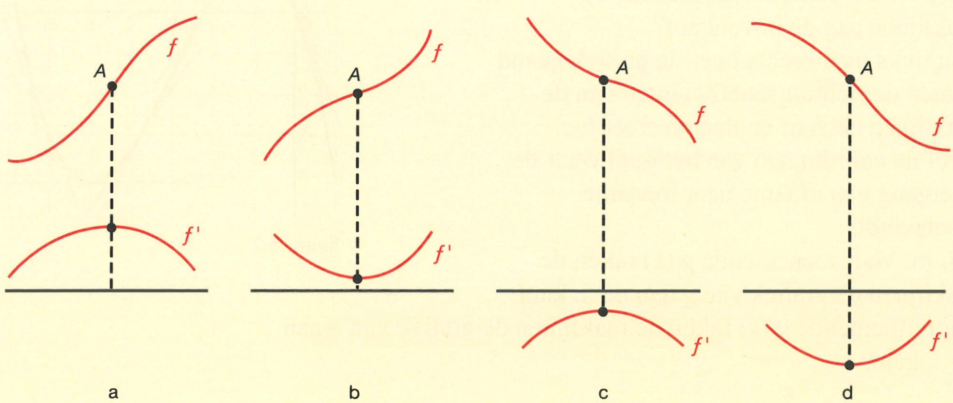


figuur 6.8

Het punt A heet een **buigpunt**. In figuur 6.8c gaat de grafiek in het buigpunt over van toenemend stijgend in afnemend stijgend.
Ook bij de overgangen

- van afnemend stijgend naar toenemend stijgend
- van afnemend dalend naar toenemend dalend
- van toenemend dalend naar afnemend dalend

heb je te maken met een buigpunt.
Zie figuur 6.9.



figuur 6.9 De vier mogelijkheden voor een buigpunt.

Merk op dat in elk van de vier gevallen de afgeleide een extreme waarde heeft.

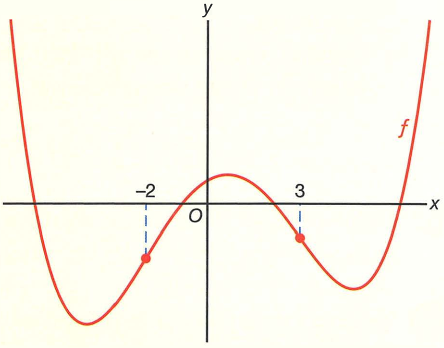
De grafiek van f heeft een buigpunt als de afgeleide f' een extreme waarde heeft.

Om buigpunten algebraïsch op te sporen bereken je dus de extremen van f'. Je hebt dan de afgeleide van f' nodig.
De afgeleide van f' heet de **tweede afgeleide** van f en wordt genoteerd als f''. Uitspraak: f dubbel accent.
De raaklijn in een buigpunt heet **buigraaklijn**.
Voor het berekenen van de coördinaten van buigpunten gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: berekenen coördinaten buigpunten
1 Bereken $f'(x)$ en $f''(x)$.
2 Los op $f''(x) = 0$.
3 Schets de grafiek van f.
4 Kijk of de oplossingen van $f''(x) = 0$ buigpunten opleveren.

Voorbeeld

Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van
$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + 5$.



Uitwerking

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$

$f''(x) = x^2 - x - 6$

$f''(x) = 0$ geeft $x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = -2 \vee x = 3$

$f(-2) = -12\frac{1}{3}$ en $f(3) = -7\frac{3}{4}$.

Uit de schets volgt dat $\left(-2, -12\frac{1}{3}\right)$ en $\left(3, -7\frac{3}{4}\right)$ de buigpunten zijn.

13 Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48x + 5$.

14 Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn k van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x + 4$.

15 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$.

a Bereken algebraïsch de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.

b De grafiek van f heeft een horizontale buigraaklijn. Toon dit aan.

16 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + px^2 - 5x - 5$.

a Neem $p = 5$ en toon algebraïsch aan dat de grafiek twee buigpunten heeft.

b Neem $p = 6$ en toon algebraïsch aan dat de grafiek geen buigpunten heeft.

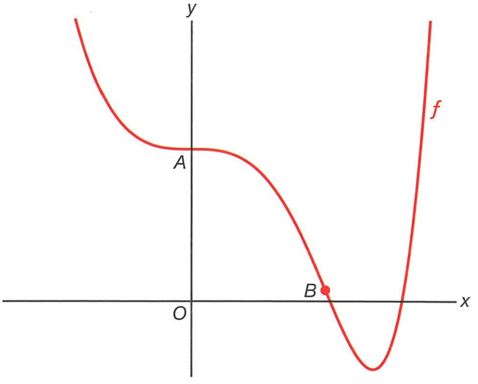
D 17 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + px^2 - 5x - 5$ van opgave 16.
Licht met behulp van schetsen van f_p'' en f_p' toe dat de grafiek van f_p óf twee óf geen buigpunten heeft.

A 18 Gegeven is de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - 4\right)^2 - 5$.

a De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A.
Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k in A.

b De grafiek van f heeft één top.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top.

c Bereken exact de coördinaten van het buigpunt B van de grafiek van f.



figuur 6.10

A 19 Bereken exact voor welke waarden van p de grafiek van $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$ twee buigpunten heeft.

D 20 Gegeven is dat de derdegraadsfunctie $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ twee extreme waarden heeft.

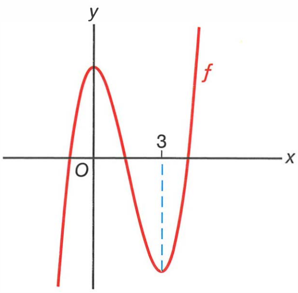
a Toon aan dat hieruit volgt dat $b^2 > 3ac$.

b Toon aan dat elke derdegraadsfunctie precies één buigpunt heeft en dat voor het geval de derdegraadsfunctie twee toppen A en B heeft voor het buigpunt C geldt dat $2x_C = x_A + x_B$.

Terugblik

Extreme waarden

Bij het algebraïsch berekenen van extreme waarden gebruik je dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een top van de grafiek nul is, dus $f'(x) = 0$. Nadat je de vergelijking $f'(x) = 0$ hebt opgelost maak je een schets van de grafiek waarin je kijkt of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
Bij de functie $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4$ krijg je $f'(x) = 2x^2 - 6x$.
$f'(x) = 0$ geeft $2x^2 - 6x = 0$ en dit geeft $x = 0 \vee x = 3$.
Zie de schets hiernaast.
Je krijgt max. is $f(0) = 4$ en min. is $f(3) = -5$.



Extreme waarden aantonen

Bij het algebraïsch aantonen dat de functie $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 5$ voor $x = 2$ een extreme waarde heeft, ga je als volgt te werk.

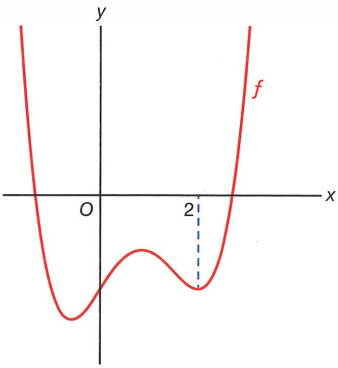
1 Bereken $f'(x)$.

Je krijgt $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4$.

2 Bereken $f'(2)$.

Je krijgt $f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 4 = 32 - 36 + 4 = 0$.

3 $f'(2) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek van f een top heeft voor $x = 2$, dus f heeft een extreme waarde voor $x = 2$.



Tweede afgeleide, buigpunt en buigraaklijn

Het punt waar de grafiek overgaat van de bolle kant naar boven naar de bolle kant naar beneden (of omgekeerd) heet buigpunt.
De x-coördinaat van een buigpunt van de grafiek van de functie f bereken je door de vergelijking $f''(x) = 0$ op te lossen. In een schets van de grafiek van f zie je of een gevonden oplossing een buigpunt oplevert of niet.
Bij de functie $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 5$ (zie hierboven) krijg je $f''(x) = 12x^2 - 18x$.

$f''(x) = 0$ geeft $12x^2 - 18x = 0$ en dit geeft $x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2}$.

Uit de schets van de grafiek van f volgt dat er bij zowel $x = 0$ als $x = 1\frac{1}{2}$ een buigpunt is.

De buigpunten zijn $(0, -5)$ en $\left(1\frac{1}{2}, -4\frac{1}{16}\right)$.
De lijn die een grafiek raakt in een buigpunt heet buigraaklijn. Bij de grafiek van $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 5$ stel je de formule van de buigraaklijn k in het punt $\left(1\frac{1}{2}, -4\frac{1}{16}\right)$ als volgt op.
$k: y = ax + b$ met $a = f'\left(1\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^3 - 9 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = -2\frac{3}{4}$, dus $k: y = -2\frac{3}{4}x + b$.

Invullen van de coördinaten van het buigpunt $\left(1\frac{1}{2}, -4\frac{1}{16}\right)$ geeft $b = \frac{1}{16}$,
dus $k: y = -2\frac{3}{4}x + \frac{1}{16}$.

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

O21 **a** Schrijf in de vorm ax^n.

$\frac{4}{x^2}$ $\quad$ $\frac{6}{x^3}$ $\quad$ $\frac{5}{x^4}$ $\quad$ $\frac{1}{3x^2}$

b Schrijf zonder negatieve exponent.

x^{-4} $\quad$ $3x^{-2}$ $\quad$ $-2x^{-3}$ $\quad$ $\frac{1}{7}x^{-6}$

$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

O22 **a** Schrijf in de vorm $ax^n + bx^m$.

$\frac{x^3 + 5x^2}{x}$ $\quad$ $\frac{4x^2 + 7x}{x^3}$ $\quad$ $\frac{2x^5 + 5x^2}{3x^4}$

b Schrijf als één breuk.

$\frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}x + \frac{3}{x^2}$ $\quad$ $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4x}$

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

O23 **a** Toon met behulp van de quotiëntregel aan dat $\left[\frac{1}{x^2}\right]' = \frac{-2}{x^3}$.

b Licht toe dat uit a volgt $[x^{-2}]' = -2x^{-3}$.

c Toon met behulp van de quotiëntregel aan dat $[x^{-5}]' = -5x^{-6}$.

6

Theorie A De afgeleide van $f(x) = x^n$ voor gehele n

In opgave 23 heb je gezien dat de regel $[x^n]' = nx^{n-1}$ ook geldt voor enkele negatieve waarden van n.
We gaan nu bewijzen dat deze regel geldt voor elke negatieve gehele waarde van n.
We gaan uit van $f(x) = x^{-p}$, waarin $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$f(x) = x^{-p} = \frac{1}{x^p} \text{ geeft } f'(x) = \frac{x^p \cdot [1]' - 1 \cdot [x^p]'}{(x^p)^2}$$
$$= \frac{x^p \cdot 0 - 1 \cdot p \cdot x^{p-1}}{x^{2p}}$$
$$= \frac{-p \cdot x^{p-1}}{x^{2p}}$$
$$= -p \cdot x^{-p-1}$$

Vervangen we $-p$ door n, dan krijgen we
$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ met $n = -1, -2, -3, -4, \ldots$
Uit $[x^1]' = [x]' = 1 = 1 \cdot x^0$ en $[x^0]' = [1]' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$ volgt dat deze regel ook geldt voor $n = 1$ en $n = 0$.

$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elk geheel getal n.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \dfrac{6}{x^3}$

b $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3x^2}$

Uitwerking

a $f(x) = \dfrac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ geeft $f'(x) = -18x^{-4} = -\dfrac{18}{x^4}$

b $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3x^2} = \dfrac{x^3}{3x^2} + \dfrac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^{-2}$ $\longleftarrow$ $\boxed{\dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}}$

geeft $g'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-3} = \frac{1}{3} - \dfrac{2}{3x^3} = \dfrac{x^3}{3x^3} - \dfrac{2}{3x^3} = \dfrac{x^3 - 2}{3x^3}$

Afspraak

Is de functie gegeven zonder negatieve exponenten, dan noteer je de afgeleide ook zonder negatieve exponenten.
Is de functie als één breuk geschreven, dan noteer je de afgeleide ook als één breuk.

6

R 24 In het voorbeeld lukte het om de afgeleiden te berekenen met behulp van uitdelen.
Welke van de volgende functies kun je differentiëren door uit te delen?

$f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2x^3}$ $\quad h(x) = \dfrac{x + 2}{4x}$ $\quad k(x) = \dfrac{4x}{x + 2}$

25 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$ **b** $g(x) = 5 - \dfrac{3}{x^2}$ **c** $h(x) = ax^4 - \dfrac{b}{x^4}$

26 Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x^2}$ **b** $g(x) = \dfrac{3x^2}{2x - 1}$ **c** $h(x) = \dfrac{3x^6 - 3}{x^3}$

A 27 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 5x^2 - \dfrac{5}{x^2}$ **b** $g(x) = \dfrac{5}{2x^2} - \dfrac{2x^2}{5}$ **c** $h(x) = 6 - \dfrac{x^2 - 1}{x}$

A 28 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ en $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

a Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 2$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in A.

b Op de grafiek van g ligt het punt B met $x_B = 2$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn l in B.

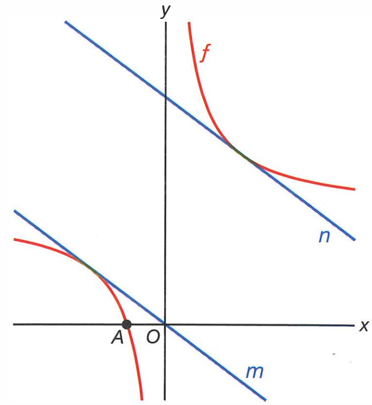
c Toon langs algebraïsche weg aan dat de grafiek van g geen buigpunt heeft.

A 29 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3x + 3}{x}$.

De grafiek van f snijdt de x-as in het punt A.

a Stel algebraïsch een vergelijking op van de raaklijn k van de grafiek in het punt A.

b De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de raakpunten.



figuur 6.11

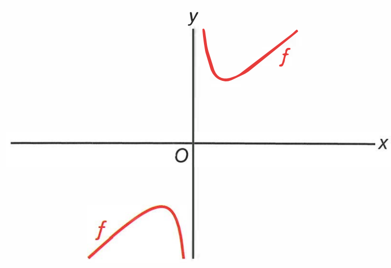
A 30 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x}$.

a Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k van de grafiek in het punt A met $x_A = 3$.

b De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -3.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de raakpunten.

c Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

d Toon algebraïsch aan dat de grafiek van f geen raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt 2.



figuur 6.12 De grafiek van $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ heeft twee toppen.

O 31 Schrijf als macht van x.

a $\sqrt{x}$

b $x^2 \cdot \sqrt{x}$

c $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

d $x^3 \cdot \sqrt{x}$

O 32 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponent.

a $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

b $2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}$

c $-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}}$

d $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$
$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$
$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

O 33 In deze opgave ga je bewijzen dat $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

a Toon aan dat uit $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$ volgt $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = 1$.

b Licht toe dat uit $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = 1$ volgt $\left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Theorie B De afgeleide van $f(x) = x^n$ voor elke n van $\mathbb{R}$

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt ook voor gebroken waarden van n. Hiervan heb je in opgave 33 een voorbeeld gezien. De regel geldt zelfs voor elk getal n van $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elke n van $\mathbb{R}$.

Het bewijs van deze regel lever je in deel 3.

Om $f(x) = x\sqrt{x}$ te differentiëren schrijf je eerst $f(x)$ in de vorm x^n.

Je krijgt $f(x) = x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1\frac{1}{2}}$ en dit geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$.
Vervolgens schrijf je $f'(x)$ zonder gebroken exponent, dus $f'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Afspraak
Bij het differentiëren mag je in het antwoord alleen gebroken exponenten laten staan als de functie zelf ook met gebroken exponenten is gegeven.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ **b** $g(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ **c** $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 4}{x^2}$

Uitwerking

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

b $g(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{2\frac{1}{3}}$ geeft $g'(x) = 2\frac{1}{3} \cdot x^{1\frac{1}{3}} = 2\frac{1}{3} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2\frac{1}{3}x \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 4}{x^2} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} + \dfrac{4}{x^2} = x^{-1\frac{2}{3}} + 4x^{-2}$ geeft

$$h'(x) = -1\tfrac{2}{3}x^{-2\frac{2}{3}} - 8x^{-3} = -\tfrac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{2}{3}}} - 8 \cdot \frac{1}{x^3} = -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{8}{x^3}$$

$$= -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{24}{3x^3} = \frac{-5 \cdot \sqrt[3]{x} - 24}{3x^3}$$

T 34 [▶▶37] Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3)$

35 Differentieer.

a $f(x) = x + \sqrt{x}$

b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

36 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x}$

b $g(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$

c $h(x) = (x^2 + 1)(1 + \sqrt{x})$

d $k(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt[3]{x}}$

A 37 Bereken de afgeleide.

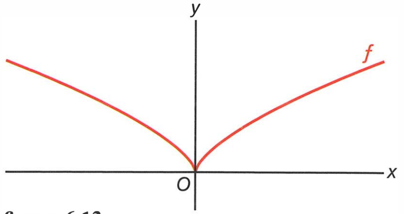
a $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2$

b $g(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

c $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2$

d $k(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\sqrt[4]{x}}$

38 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = \frac{1}{8}$.
De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 8$.
De lijnen k en l snijden elkaar in het punt C.
Bereken langs algebraïsche weg de coördinaten van C.



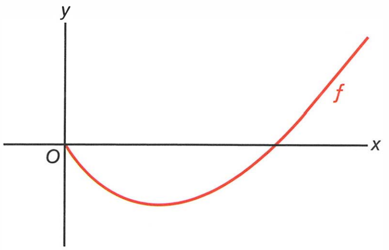
figuur 6.13

39 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.

a Bereken algebraïsch het minimum van f.

b Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn in de oorsprong.

c De lijn l met richtingscoëfficiënt 3 raakt de grafiek van f in het punt A.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A en stel de formule op van l.



figuur 6.14

A 40 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{\sqrt{x}}$.

a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$ en snijdt de x-as in het punt B.
Bereken algebraïsch de oppervlakte van $\triangle OAB$.

b De x-coördinaat van de top van de grafiek is te schrijven als $\sqrt[3]{p}$.
Bereken p.

A 41 Een magneetzweeftrein trekt op. Gedurende de eerste negen seconden is de afgelegde weg s in meter te benaderen door de formule $s(t) = 10t\sqrt{t}$ met t in seconden. Na negen seconden verandert de snelheid niet meer.

a Bereken exact de snelheid na acht seconden.

b Bereken algebraïsch na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 108 km/uur.

c Hoeveel meter legt de trein af in de eerste minuut?

Terugblik

De afgeleide van $f(x) = x^n$

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ geldt voor elk getal n van $\mathbb{R}$.

Dus bij $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ krijg je $f(x) = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$ geeft $f'(x) = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$

en bij $g(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$ krijg je $g(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} = x^{3\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x}$.

Bij het berekenen van de afgeleide van $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ deel je eerst uit.

Je krijgt $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x} = x + x^{-1}$ geeft $h'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

Bij het berekenen van de afgeleide van $k(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ gebruik je de quotiëntregel.

Je krijgt $k'(x) = \dfrac{(x^2 + 1) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.

Bij het berekenen van de afgeleide van $k(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$ krijg je

$$k(x) = \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}} = \frac{x^2 + 1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-1\frac{1}{2}} \text{ geeft}$$

$$k'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1\tfrac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^2 - 3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}.$$

Raaklijnen en toppen

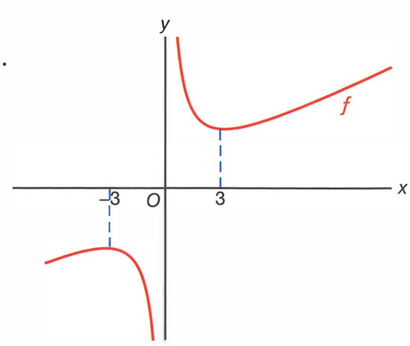
Bij de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{2x}$ bereken je als volgt algebraïsch de coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn richtingscoëfficiënt -4 heeft.

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{2x} = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{9}{2}x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{2}x^{-2} = \tfrac{1}{2} - \frac{9}{2x^2} = \frac{x^2 - 9}{2x^2}$$

$$f'(x) = -4 \text{ geeft } \frac{x^2 - 9}{2x^2} = -4$$

Hieruit volgt $x^2 - 9 = -8x^2$ en dit geeft $x = 1 \vee x = -1$.
$f(-1) = -5$ en $f(1) = 5$, dus de punten zijn $(-1, -5)$ en $(1, 5)$.

Voor het algebraïsch berekenen van de extreme waarden stel je $f'(x) = 0$.
Je krijgt $\dfrac{x^2 - 9}{2x^2} = 0$ en dit geeft $x = 3 \vee x = -3$.
Zie de grafiek.
De extremen zijn max. is $f(-3) = -3$ en min. is $f(3) = 3$.



6.3 De kettingregel

O 42 Gegeven zijn de functies $u(v) = v^4$ en $v(x) = x^2 - 5x$.
a Bereken $v(3)$ en $u(v(3))$.
b Bereken $u(v(4))$.

O 43 Gegeven is de functie $f(x) = (3x^3 + 7)^2$.
Het functievoorschrift van f is te noteren als $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = v^2$ en $v(x) = 3x^3 + 7$.
Noteer op dezelfde manier met functies u en v.

a $f(x) = (3 - x^5)^6$ **b** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **c** $f(x) = \dfrac{2}{(x + 8)^3}$

Theorie A De afgeleide van een samengestelde functie

De functie $f(x) = (x^2 - 5x)^4$ is een voorbeeld van een **samengestelde functie**. De functie is samengesteld uit de **schakels** $u(v) = v^4$ en $v(x) = x^2 - 5x$.
Een functie die geschreven is als een ketting van schakels heet een **kettingfunctie**.

Voor het differentiëren van de functie f gebruik je de **kettingregel**.

Kettingregel
$f(x) = u(v(x))$ **geeft** $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Bij $f(x) = (x^2 - 5x)^4$ krijg je $f'(x) = \underbrace{4(x^2 - 5x)^3}_{u'(v(x))} \cdot \underbrace{(2x - 5)}_{v'(x)}$

Bij het differentiëren van $f(x) = \sqrt{3x + 1}$ krijg je

$$f(x) = \sqrt{3x + 1} = (3x + 1)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \tfrac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

Omdat van $g(x) = \sqrt{x}$ de afgeleide is $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, mag je in één keer opschrijven

$$f(x) = \sqrt{3x + 1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x + 1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft
$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

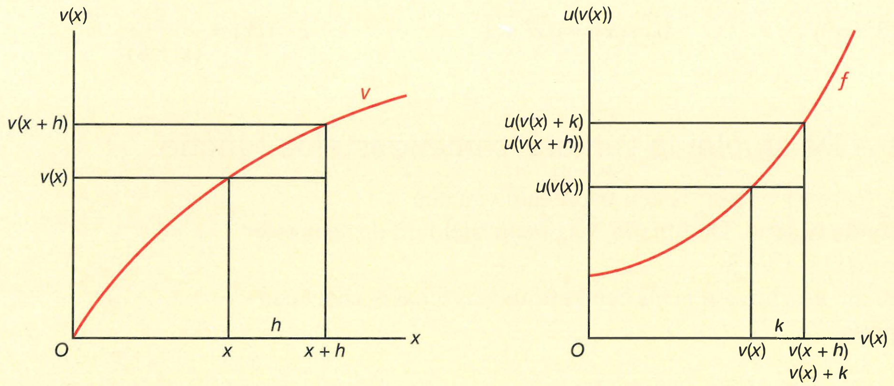
Het bewijs van de kettingregel gaat als volgt.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Stel $v(x+h) - v(x) = k$, dus $v(x+h) = v(x) + k$. Hieruit volgt dat k nadert naar 0, als h nadert naar 0 (zie figuur 6.15). Dus

$$f'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{u(v(x) + k) - u(v(x))}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$



figuur 6.15

6

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{5}{(2x^3 - 7x)^4}$

b $g(x) = 2x + \sqrt{3x^2 + 4}$

c $h(x) = (4x + 1)^3 \cdot \sqrt{4x + 1}$

Uitwerking

a $f(x) = \dfrac{5}{(2x^3 - 7x)^4} = 5(2x^3 - 7x)^{-4}$ geeft

$$f'(x) = -4 \cdot 5(2x^3 - 7x)^{-5} \cdot (6x^2 - 7) = -\frac{20(6x^2 - 7)}{(2x^3 - 7x)^5}$$

b $g(x) = 2x + \sqrt{3x^2 + 4}$ geeft $g'(x) = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{3x^2 + 4}} \cdot 6x = 2 + \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

c $h(x) = (4x + 1)^3 \cdot \sqrt{4x + 1} = (4x + 1)^{3\frac{1}{2}}$

geeft $h'(x) = 3\frac{1}{2} \cdot (4x + 1)^{2\frac{1}{2}} \cdot 4 = 14(4x + 1)^2 \cdot \sqrt{4x + 1}$

44 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = (4x + 3)^3$

b $g(x) = 6\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^5$

c $h(x) = 3x^2 - \left(\frac{1}{4}x - 2\right)^3$

d $j(x) = (4x^2 - 3)^4$

e $k(x) = 5x - \dfrac{4}{(3x + 2)^3}$

f $l(x) = \sqrt{4x + 1}$

45 Differentieer.

a $f(x) = -2(2x + 1)^4$

b $g(x) = \dfrac{1}{(3x - 2)^2}$

c $h(x) = \sqrt{2x^2 + 4x}$

d $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - 1}}$

e $k(x) = (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}$

f $l(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

A 46 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 4(x^3 + 7x - 2)^2$

b $g(x) = -\dfrac{6}{(x^2 + 3x)^3}$

c $h(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}$

d $j(x) = \dfrac{1}{(4 - x)\sqrt{4 - x}}$

e $k(x) = 5\sqrt{2x^4 + x^2} + 4x^2$

f $l(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}}$

47 Gegeven is de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)^3$.

a Schets de grafiek van f.

b Bereken algebraïsch de x-coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn horizontaal is.

c De lijn l raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 6$.
Stel algebraïsch de formule op van l.

48 Gegeven is de functie $f(x) = \left(\frac{1}{4}x - 1\right)^4 - x + 2$.

a Bereken algebraïsch het bereik van f.

b De lijn k raakt de grafiek van f en is evenwijdig met de lijn l: $y = -2x$.
Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van k.

c Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 4$.
De horizontale lijn door A snijdt de grafiek van f ook in het punt B.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de lengte van het lijnstuk AB.

6

A 49 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 5)^3 + 2$ en $g(x) = -\frac{1}{4}(3x - 10)^4 + 2\frac{1}{2}$. Het punt $A\left(3, 2\frac{1}{4}\right)$ ligt zowel op de grafiek van f als op de grafiek van g.

a Toon dit aan.

b Emma beweert dat de grafieken van f en g in het punt A dezelfde raaklijn hebben.
Onderzoek langs algebraïsche weg of Emma gelijk heeft.

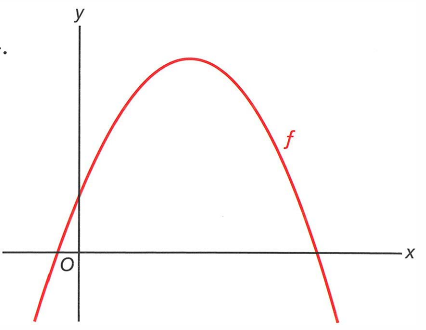
c Er zijn twee punten op de grafiek van f waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $13\frac{1}{2}$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van die punten.

A 50 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - x^2 + 5x$.

a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 4$.
Stel algebraïsch de formule op van k.

b Onderzoek met de afgeleide of de grafiek een horizontale raaklijn heeft voor $x = 3$.

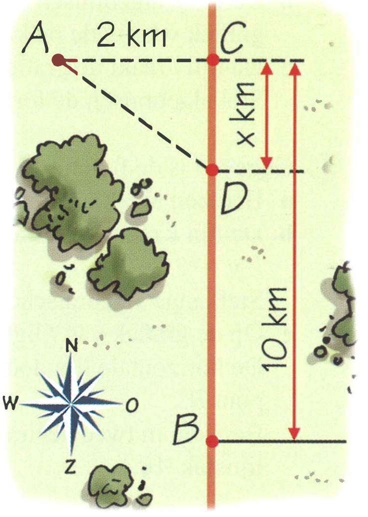
c De lijn l raakt de grafiek van f en is evenwijdig met de lijn m: $y = 5x - 2$.
Stel algebraïsch de formule op van l.



figuur 6.16

A 51 Bij een autorally leggen de deelnemers een parcours af dat gedeeltelijk over een terrein zonder wegen en gedeeltelijk over onverharde wegen gaat. In figuur 6.17 zie je een gedeelte van het parcours. De deelnemers rijden van A naar B. Punt B ligt 2 km oostelijk en 10 km zuidelijk van A. Tussen C en B ligt een onverharde weg, waar met een gemiddelde snelheid van 100 km/uur wordt gereden. Ten westen van deze onverharde weg is ruw terrein, waar de gemiddelde snelheid 80 km/uur is.
Een deelnemer kan rechtstreeks van A naar B, maar bijvoorbeeld ook via C naar B gaan. In het laatste geval is hij ongeveer 9 seconden eerder in B dan in het geval hij rechtstreeks van A naar B rijdt.

a Toon dit aan.



figuur 6.17

Het is ook mogelijk dat een deelnemer vanaf A schuin doorsteekt naar de onverharde weg tussen C en B en daarna zijn weg vervolgt over de onverharde weg richting B.
Stel hij komt daarbij x km ten zuiden van C uit.
Dan geldt $t = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0{,}1 - 0{,}01x$. Hierin is t de tijd in uren die de deelnemer over de afstand tussen A en B doet.

b Toon aan dat deze formule juist is.

c Bereken exact voor welke waarde van x de tijd t voor de deelnemer minimaal is. Hoeveel seconden scheelt het met de situatie dat hij via C naar B gaat?

D 52 Bereken algebraïsch voor welke waarde van a de functie $f(x) = (ax - 2)^4 + \frac{1}{2}ax$ een extreme waarde heeft voor $x = 3$.

O 53 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{2x + 1}$.
Voor het berekenen van de afgeleide heb je de productregel én de kettingregel nodig.
Licht dit toe.

Theorie B De kettingregel gecombineerd met de productregel of de quotiëntregel

De functie $f(x) = x\sqrt{2x + 1}$ is het product van de factoren x en $\sqrt{2x + 1}$. Daarom gebruik je bij het differentiëren de productregel $f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x + 1} + x \cdot [\sqrt{2x + 1}]'$.

Om de afgeleide van $\sqrt{2x + 1}$ te berekenen heb je de kettingregel nodig.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = x\sqrt{2x + 1}$

b $g(x) = \dfrac{x + 6}{\sqrt{8x + 9}}$

Uitwerking

a $f(x) = x\sqrt{2x + 1}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x + 1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x + 1}} \cdot 2 = \sqrt{2x + 1} + \frac{x}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{2x + 1}{\sqrt{2x + 1}} + \frac{x}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x + 1}}$$

b $g(x) = \dfrac{x + 6}{\sqrt{8x + 9}}$ geeft

$$g'(x) = \frac{\sqrt{8x + 9} \cdot 1 - (x + 6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{8x + 9}} \cdot 8}{(\sqrt{8x + 9})^2} = \frac{8x + 9 - 4(x + 6)}{(8x + 9)\sqrt{8x + 9}} = \frac{8x + 9 - 4x - 24}{(8x + 9)\sqrt{8x + 9}}$$

$$= \frac{4x - 15}{(8x + 9)\sqrt{8x + 9}}$$

54 Differentieer.

a $f(x) = x\sqrt{3x + 1}$

b $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 1}$

c $h(x) = x(3x + 1)^3$

d $k(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{4x + 1}}$

6

55 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{3x+1}$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 8$.

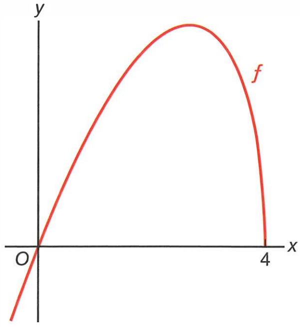
56 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{8-2x}$. In figuur 6.18 zie je een schets van de grafiek van f.

a Bereken het domein van f.

b Toon aan dat $f'(x) = \dfrac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}$.

c Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f en geef het bereik.

d Op de grafiek van f ligt het punt A waarin de raaklijn richtingscoëfficiënt 1 heeft.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A.

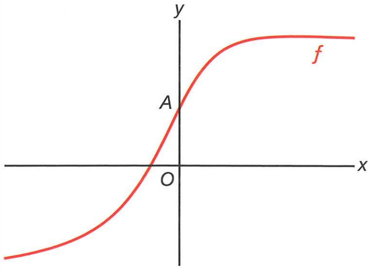


figuur 6.18 $f(x) = x\sqrt{8-2x}$

A 57 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$.

a Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f.

b De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A.
De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de x-as in het punt B.
Bereken algebraïsch de oppervlakte van $\triangle OAB$.



figuur 6.19 $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$

6

A 58 Gegeven is de functie $f(x) = 2x\sqrt{9-2x} - 3$.
De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A.

a Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k in A.

b Bereken exact het maximum van f.

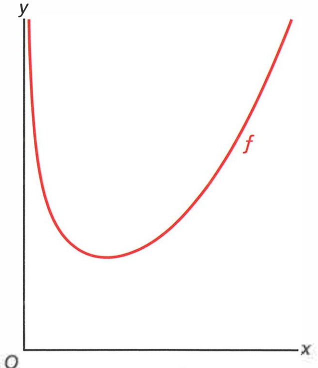
c Bereken het domein en geef het bereik van f.

d Het punt B ligt op de grafiek van f. De raaklijn in B is evenwijdig met de lijn $y = 1\frac{1}{2}x$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van B.

A 59 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3+2}{\sqrt{x}}$.

a De y-coördinaat van de top is te schrijven als $\dfrac{a}{\sqrt[b]{c}}$.
Bereken a, b en c.

b De lijn k met $\text{rc}_k = 1\frac{1}{2}$ raakt de grafiek van f.
Stel algebraïsch de formule van k op.



figuur 6.20 $f(x) = \dfrac{x^3+2}{\sqrt{x}}$

Terugblik

De kettingregel

Een functie die geschreven is als een ketting van functies heet een kettingfunctie of samengestelde functie.
Zo is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ te schrijven als $f(x) = u(v(x))$ met de schakels $u = \sqrt{v}$ en $v = x^2 + x$.
Bij het differentiëren van kettingfuncties gebruik je de kettingregel:
$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.
Deze regel zegt dat de afgeleide van een kettingfunctie het product is van de afgeleiden van de afzonderlijke schakels.
Bij $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ krijg je $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \cdot (2x + 1) = \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

De productregel en de kettingregel

Bij het differentiëren van $h(x) = x\sqrt{x^2 + x}$ gebruik je de productregel.

In de berekening komt $[\sqrt{x^2 + x}]'$ tevoorschijn en dit bereken je met de kettingregel.
Je krijgt

$$h'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2 + x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \cdot (2x + 1) = \sqrt{x^2 + x} + \frac{x(2x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

$$= \frac{2(x^2 + x) + 2x^2 + x}{2\sqrt{x^2 + x}} = \frac{4x^2 + 3x}{2\sqrt{x^2 + x}}.$$

De quotiëntregel en de kettingregel

Bij het differentiëren van de functie $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x + 1}$ gebruik je de quotiëntregel.

In de berekening komt $[\sqrt{x^2 + x}]'$ tevoorschijn en dit bereken je met de kettingregel.
Je krijgt

$$k'(x) = \frac{(x + 1) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \cdot (2x + 1) - \sqrt{x^2 + x} \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1) \cdot \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} - \sqrt{x^2 + x}}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{(x + 1)(2x + 1) - 2(x^2 + x)}{2(x + 1)^2 \cdot \sqrt{x^2 + x}} = \frac{2x^2 + x + 2x + 1 - 2x^2 - 2x}{2(x + 1)^2 \cdot \sqrt{x^2 + x}}$$

$$= \frac{x + 1}{2(x + 1)^2 \cdot \sqrt{x^2 + x}}.$$

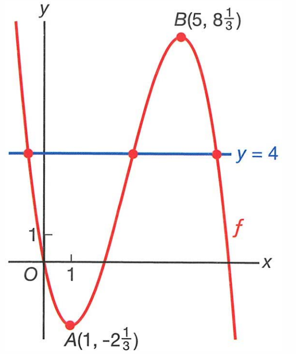
6

6.4 Toppen en snijpunten

O 60 In figuur 6.21 zie je de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$ en de lijn $y = 4$.
De toppen van de grafiek van f zijn $A\left(1, -2\frac{1}{3}\right)$ en $B\left(5, 8\frac{1}{3}\right)$.

De vergelijking $-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x = 4$ heeft drie oplossingen omdat de lijn $y = 4$ de grafiek van f drie keer snijdt.
Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x = 10$?

En de vergelijking $-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x = -2\frac{1}{3}$?

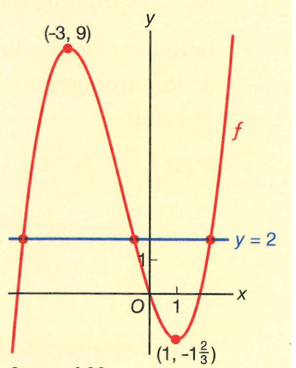


figuur 6.21

Theorie A Aantal oplossingen van de vergelijking $f(x) = p$

Hiernaast is de grafiek van $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$ geschetst.

De toppen van de grafiek zijn $(-3, 9)$ en $\left(1, -1\frac{2}{3}\right)$.
De lijn $y = 2$ snijdt de grafiek van f in drie punten. Daarom heeft de vergelijking $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x = 2$ drie oplossingen.



figuur 6.22

61 In figuur 6.23 is de grafiek van $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ getekend. De coördinaten van de toppen zijn $(-2, 54)$ en $(3, -71)$.

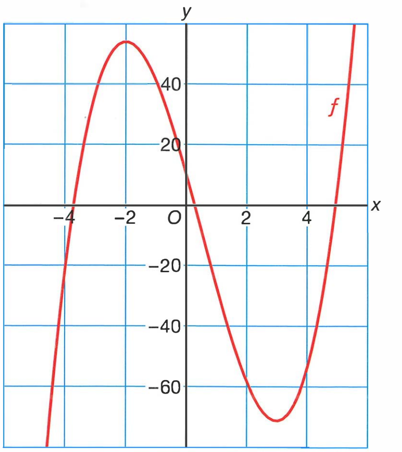
a Toon dit aan.

b De horizontale lijn $y = -25$ snijdt de grafiek van f in drie punten. Hieruit volgt dat de vergelijking $f(x) = -25$ drie oplossingen heeft.
Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 25$? En de vergelijking $f(x) = 75$?

c De vergelijking $f(x) = p$ heeft drie oplossingen voor $-71 < p < 54$.
Licht dit toe.

d Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing?

e Er zijn twee waarden van p waarvoor de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen heeft.
Welke waarden van p zijn dat?



figuur 6.23

62 Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x + 10$.

a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

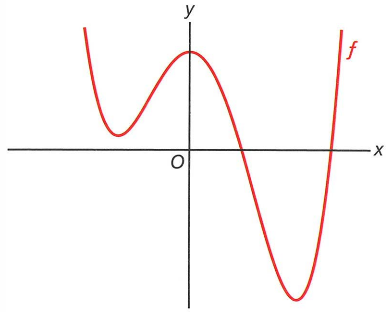
b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = -50$? En de vergelijking $f(x) = 50$?

c Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ drie oplossingen?

d Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing?

A 63 In figuur 6.24 is de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}75x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 300$ geschetst.
Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$

- precies vier oplossingen
- precies drie oplossingen
- precies twee oplossingen
- precies één oplossing
- geen oplossingen?



figuur 6.24

A 64 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x + 5} - 6$.

a Bereken algebraïsch de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

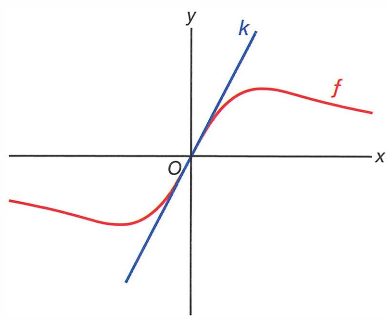
b Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$

- geen oplossingen
- precies één oplossing
- precies twee oplossingen
- precies drie oplossingen?

65 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 3}$.
De lijn k: $y = 2x$ raakt de grafiek van f in de oorsprong.

a Hoeveel snijpunten heeft de lijn l: $y = x$ met de grafiek van f? En de lijn m: $y = 3x$?

b Licht toe dat de vergelijking $\dfrac{6x}{x^2 + 3} = ax$ drie oplossingen heeft voor $0 < a < 2$.



figuur 6.25

66 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 5}$.

a Bereken exact de extreme waarden van f en geef B_f.

b Bereken algebraïsch voor welke a de vergelijking $f(x) = ax$ precies één oplossing heeft.

A 67 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{2x + 6}$.
Bereken exact voor welke

a p de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen heeft.

b a de vergelijking $f(x) = ax$ precies twee oplossingen heeft.

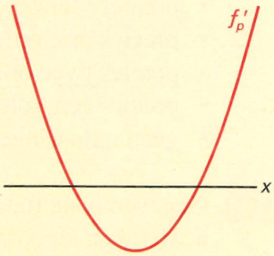
O 68 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 5x$.

a Schets de grafieken van f_{-3}, f_{-2}, f_2 en f_3 in aparte figuren.

b Hoeveel extreme waarden heeft elk van de vier functies waarvan je de grafiek hebt geschetst?

Theorie B Derdegraadsfuncties met een parameter

Bij de functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 5x$ vragen we ons af voor welke p de functie twee extreme waarden heeft.
De afgeleide is $f_p'(x) = x^2 + 2px + 5$.
Er zijn twee extreme waarden als de vergelijking $f_p'(x) = 0$ twee (verschillende) oplossingen heeft. Hierbij hoort de schets hiernaast van de grafiek van f_p'.



Er moet dus gelden $D > 0$.
De discriminant is $D = (2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4p^2 - 20$

$$\begin{aligned} D > 0 \text{ geeft } 4p^2 - 20 &> 0 \\ 4p^2 &> 20 \\ p^2 &> 5 \\ p < -\sqrt{5} &\vee p > \sqrt{5} \end{aligned}$$

Dus de functie heeft twee extreme waarden voor $p < -\sqrt{5} \vee p > \sqrt{5}$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - px + 6$.

Bereken voor welke p de functie twee extreme waarden heeft.

Uitwerking

$f_p(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - px + 6$ geeft $f_p'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - p$

f_p heeft twee extremen, dus $f_p'(x) = 0$ heeft twee oplossingen.

$$\left.\begin{aligned} &D > 0 \\ &D = 1^2 - 4 \cdot -\tfrac{1}{2} \cdot -p = 1 - 2p \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 1 - 2p &> 0 \\ -2p &> -1 \\ p &< \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus twee extreme waarden voor $p < \frac{1}{2}$.

R 69 Zie het voorbeeld. Hoeveel extreme waarden zijn er voor $p > \frac{1}{2}$? En voor $p = \frac{1}{2}$? Licht toe.

70 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + px + 5$.
Bereken voor welke p de functie twee extreme waarden heeft.

71 Bereken voor welke p de functie $f_p(x) = \frac{1}{4}x^3 + px^2 + 3x + 1$ geen extreme waarden heeft.

A 72 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{12}x^3 + x^2 + px + 7$.

a De functie heeft een extreme waarde voor $x = 1$.
Bereken p en de andere extreme waarde.

b Bereken voor welke p de functie f_p twee extreme waarden heeft.

O 73 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 5x - 3$. De lijn k met $\text{rc}_k = 2$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 3$.
Licht toe dat $f_p'(3) = 2$ en bereken p.

Theorie C Raaklijnproblemen bij functies met een parameter

Om te berekenen voor welke p de lijn k de grafiek van f_p raakt in een punt A waarvan de x-coördinaat is gegeven, los je de vergelijking $f_p'(x_A) = \text{rc}_k$ op.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} + p\sqrt{x}$.

De lijn k: $y = 18x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.
Bereken p en q.

Uitwerking

$f_p(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} + p\sqrt{x} = x^{2\frac{1}{2}} + px^{\frac{1}{2}}$ geeft $f_p'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}px^{-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \dfrac{p}{2\sqrt{x}}$

$f_p'(4) = \text{rc}_k$ geeft $2\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{4} + \dfrac{p}{2\sqrt{4}} = 18$

$$20 + \frac{p}{4} = 18$$

$$\frac{p}{4} = -2$$

$$p = -8$$

$f_{-8}(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} - 8\sqrt{x}$

$$\left.\begin{array}{l} f_{-8}(4) = 16,\text{ dus } A(4, 16) \\ k{:}\ y = 18x + q \end{array}\right\} \begin{array}{l} 18 \cdot 4 + q = 16 \\ 72 + q = 16 \\ q = -56 \end{array}$$

Dus $p = -8$ en $q = -56$.

6

74 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 6x\sqrt{x} + px^2$.

a Voor welke p heeft de functie f_p een maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$?

b De lijn $k: y = 5x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 1$.
Bereken p en q.

75 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{4x + p}{x^2 + 1}$.

a De lijn $k: y = ax + 4$ raakt de grafiek van f_p in het snijpunt van de grafiek met de y-as.
Bereken a en p.

b De lijn l met richtingscoëfficiënt -1 raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = -1$.
Stel algebraïsch de formule op van l.

c De functie f_p heeft een extreme waarde voor $x = 2$.
Bereken p en de andere extreme waarde.

A 76 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 - 3x - p$.

a Toon aan dat f_p voor elke p twee extreme waarden heeft.

b De functie f_p heeft een extreme waarde voor $x = 3$.
Bereken p en de andere extreme waarde.

c De lijn $l: y = -x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt B met $x_B = -2$.
Bereken p en q.

6

O 77 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + px + 3$.

Toon aan dat uit $f_p'(x) = 0$ volgt $p = \frac{1}{2}x$.

Theorie D Kromme door toppen

Om een formule op te stellen van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = x^3 + px^2$ liggen kun je x_{top} uitdrukken in p. Daartoe los je de vergelijking $f_p'(x) = 0$ op.
Je krijgt

$f_p(x) = x^3 + px^2$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px$

$$
\begin{aligned}
f_p'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 + 2px &= 0 \\
x(3x + 2p) &= 0 \\
x = 0 \vee 3x + 2p &= 0 \\
x = 0 \vee 3x &= -2p \\
x = 0 \vee x &= -\tfrac{2}{3}p
\end{aligned}
$$

$x_{top} = 0$ geeft top $(0, 0)$.

$$
\left.\begin{aligned}
&x_{top} = -\tfrac{2}{3}p \text{, dus } p = -1\tfrac{1}{2}x_{top} \\
&y_{top} = x_{top}^3 - px_{top}^2
\end{aligned}\right\} \; y_{top} = x_{top}^3 - 1\tfrac{1}{2}x_{top}^3 = -\tfrac{1}{2}x_{top}^3
$$

Ook het punt (0, 0) voldoet aan $y_{top} = -\frac{1}{2}x_{top}^3$.

Dus de formule van de kromme is $y = -\frac{1}{2}x^3$.

De methode hierboven is niet altijd handig. Zie het voorbeeld waarbij meteen p vrijgemaakt wordt uit de vergelijking $f_p'(x) = 0$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x + 3$.

Stel een formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafiek van f_p liggen.

Uitwerking

$f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x + 3$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px + 2$

$f_p'(x) = 0$ geeft $3x^2 + 2px + 2 = 0$

$$2px = -3x^2 - 2$$

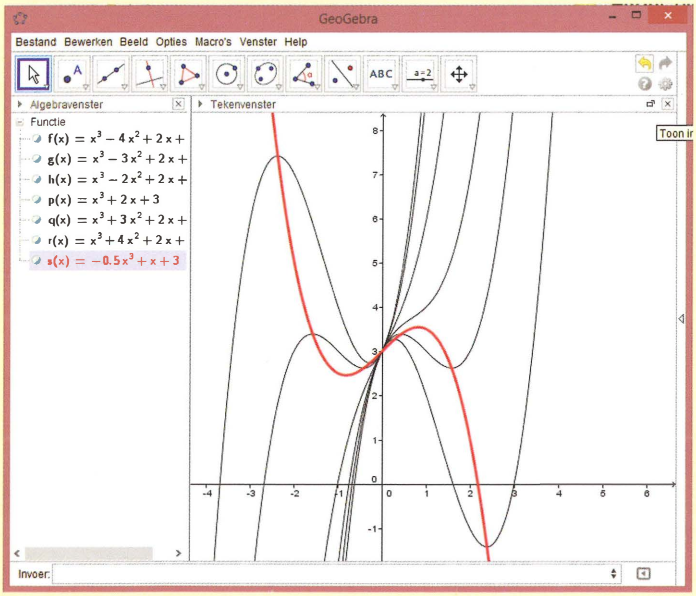
$$\left.\begin{array}{l} \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \dfrac{-3x^2 - 2}{2x} \\ y = x^3 + px^2 + 2x + 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = x^3 + \dfrac{-3x^2 - 2}{2x} \cdot x^2 + 2x + 3 \\ y = x^3 + \frac{1}{2}x(-3x^2 - 2) + 2x + 3 \end{array}$$

$$y = x^3 - 1\tfrac{1}{2}x^3 - x + 2x + 3$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x^3 + x + 3$$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3$.

In de figuur hieronder is met GeoGebra voor enkele waarden van p de grafiek van f_p van het voorbeeld getekend. Bovendien is de kromme $y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3$ getekend. Je ziet dat alle toppen van de getekende grafieken op de kromme $y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3$ liggen.



R 78 Zie het voorbeeld. De kromme waarop alle toppen liggen is $y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3$. Op deze kromme ligt het punt (0, 3). Het punt (0, 3) is niet een top van een van de grafieken van f_p.

a Toon dit aan.

b Licht toe dat dat dit niet in tegenspraak is met de laatste zin in het voorbeeld.

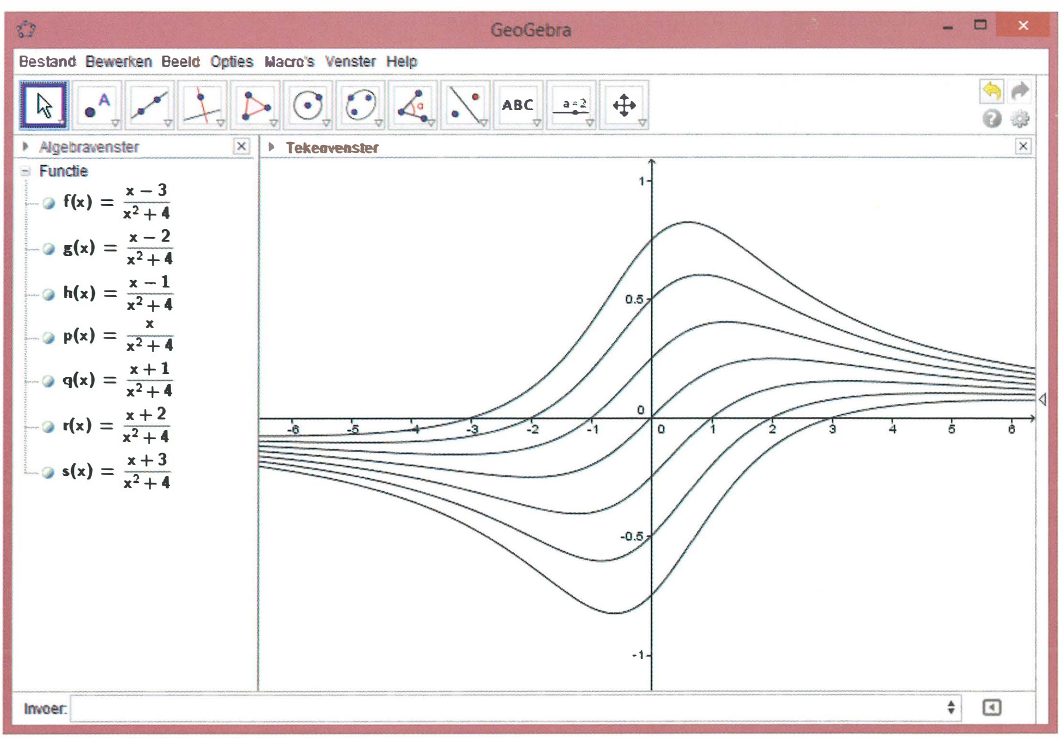
79 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5$.
Stel een formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafiek van f_p liggen.

80 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{px}{x^2 + 4}$.
De toppen van de grafieken van de functies f_p liggen op twee lijnen.
Toon dit aan en geef de formules van deze lijnen.

A 81 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{x + p}{x^2 + 4}$.

a De functie f_p heeft een extreme waarde voor $x = 1$.
Bereken p en de andere extreme waarde.

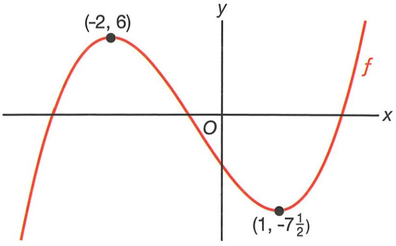
b Toon aan dat alle toppen van de grafieken van f_p op de kromme $y = \dfrac{1}{2x}$ liggen.



Terugblik

Aantal oplossingen van de vergelijking $f(x) = p$

Om te berekenen voor welke p de vergelijking $x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 - 6x - 4 = p$ drie oplossingen heeft, bereken je eerst de coördinaten van de toppen van de grafiek van $f(x) = x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 - 6x - 4$.
Je krijgt $(-2, 6)$ en $\left(1, -7\frac{1}{2}\right)$.
Aflezen uit de figuur hiernaast geeft dat de vergelijking $f(x) = p$ drie oplossingen heeft voor $-7\frac{1}{2} < p < 6$.



Derdegraadsfuncties met een parameter

Het aantal extreme waarden van een derdegraadsfunctie met een parameter hangt af van de discriminant van de afgeleide.
Van de functie $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$ is de afgeleide $f_p{}'(x) = -x^2 + 3x + p$.
$f_p{}'(x) = 0$ heeft twee oplossingen als $D > 0$.
Dit geeft $9 + 4p > 0$ ofwel $p > -2\frac{1}{4}$.
Dus de functie $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$ heeft twee extreme waarden voor $p > -2\frac{1}{4}$.

Raaklijnproblemen bij functies met een parameter

Raakt de lijn k met $\text{rc}_k = -2$ de grafiek van $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$ in het punt A met $x_A = 4$, dan gebruik je $f_p{}'(4) = -2$ om de formule van k op te stellen.
$f_p{}'(4) = -2$ geeft $-4^2 + 3 \cdot 4 + p = -2$, dus $p = 2$.
$x_A = 4$ invullen bij $f_2(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$ geeft het raakpunt $A\left(4, 5\frac{2}{3}\right)$.
Het punt A ligt ook op k: $y = -2x + b$. Hieruit volgt $b = 13\frac{2}{3}$, dus k: $y = -2x + 13\frac{2}{3}$.

Kromme door toppen

De toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$ liggen op een kromme.
De formule van deze kromme krijg je door p met behulp van $f_p{}'(x) = 0$ uit te drukken in x_{top} en dit in te vullen bij $y_{\text{top}} = f_p(x_{\text{top}})$.

$f_p{}'(x) = 0$ geeft $-x^2 + 3x + p = 0$, dus $p = x^2 - 3x$.

$p = x^2 - 3x$ invullen in $y = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$ geeft

$y = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + (x^2 - 3x) \cdot x - 5 = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + x^3 - 3x^2 - 5 = \frac{2}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 5.$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = \frac{2}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 5$.

6

Diagnostische toets

6.1 Toppen en buigpunten

1 Gegeven is de functie $f(x) = \left(2x^2 + 4\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - 5\right)$.
a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.
b Geef het bereik van f.

2 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{-x}{x^2 + 1}$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van f en geef het bereik.

3 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x$.
Toon met de afgeleide aan dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

4 Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 5x$.
Stel langs algebraïsche weg formules op van de buigraaklijnen k en l van de grafiek van f.

6

5 Bereken algebraïsch voor welke waarden van p de grafiek van $f_p(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + px^2 + 2x - 3$ twee buigpunten heeft.

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

6 Differentieer.
a $f(x) = \dfrac{2}{x^5}$
b $f(x) = \dfrac{x^5 + 2}{x^3}$
c $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3}$
d $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x^2}$
e $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$
f $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^3 + 1}$

7 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$. De lijn k snijdt de x-as in het punt B en de y-as in het punt C.
Bereken exact de oppervlakte van driehoek OBC.

6.3 De kettingregel

8 Bereken de afgeleide.
a $f(x) = 3(x^2 + 4x)^4$
b $g(x) = (x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}$
c $h(x) = \dfrac{3}{(2x^3 + 2)^5}$

9 Differentieer.

a $f(x) = 2x^2(x^2 - 4x)^5$

b $g(x) = (x^3 + x) \cdot \sqrt{x^3 + 2}$

c $h(x) = \dfrac{6x}{(2x^3 + 2)^5}$

10 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{50 - x^2}$.

a Er zijn twee punten op de grafiek van f met een horizontale raaklijn.
Bereken algebraïsch de coördinaten van deze punten.

b Stel algebraïsch de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 1$.

6.4 Toppen en snijpunten

11 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$.

a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

b Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies één oplossing?

c Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen?

d Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ drie oplossingen?

12 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2 + 1}$.
Bereken algebraïsch voor welke waarden van a de vergelijking $f(x) = ax$ drie oplossingen heeft.

13 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + px + 5$.

a De functie heeft een extreme waarde voor $x = 1$.
Bereken p en de andere extreme waarde.

b Bereken voor welke p de functie f_p twee extreme waarden heeft.

14 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{2\sqrt{x} + p}{x + 1}$.
De lijn k: $y = -0{,}1x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.
Bereken p en q.

15 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x - 4$.
Stel een formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafiek van f_p liggen.

6

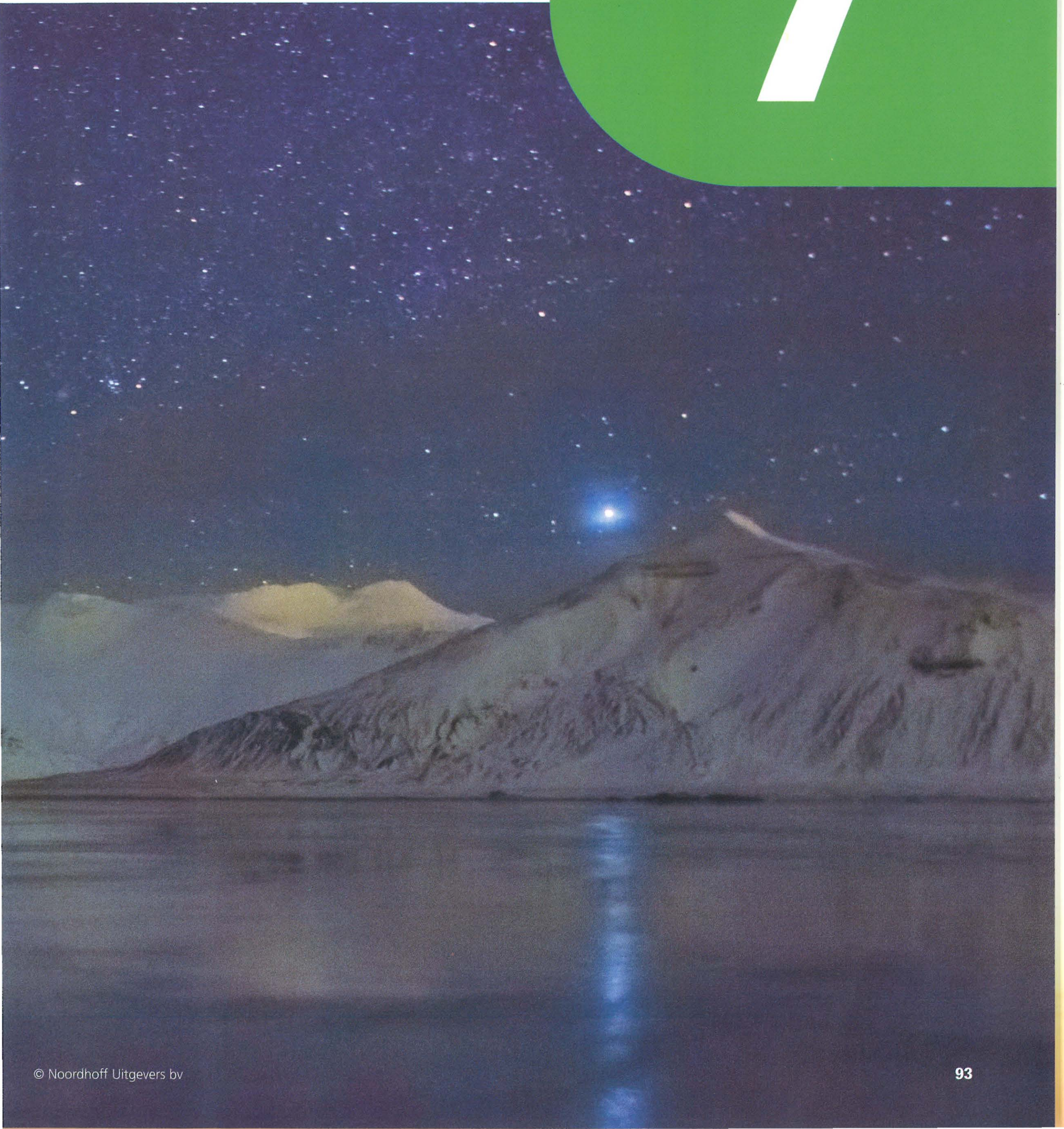
In de oudheid werd de goniometrie vooral gebruikt bij het bestuderen van de sterren. Ook het navigeren op zee heeft de ontwikkeling van de goniometrie gestimuleerd. Tegenwoordig kunnen allerlei periodieke verschijnselen met goniometrische formules worden beschreven en onderzocht. Daarbij worden goniometrische vergelijkingen opgelost en goniometrische functies gedifferentieerd.

Wat leer je?

- De definities van sinus, cosinus en tangens in de eenheidscirkel.
- Werken met de hoekeenheid radiaal.
- Algebraïsch oplossen van goniometrische vergelijkingen.
- Tekenen van grafieken van goniometrische functies en het opstellen van formules bij getekende sinusoïden.
- Het differentiëren van goniometrische functies.

Goniometrische functies

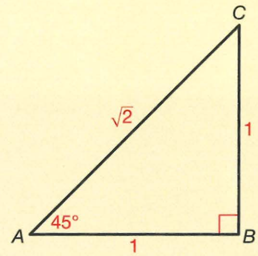
7



Voorkennis Exacte waarden van goniometrische verhoudingen

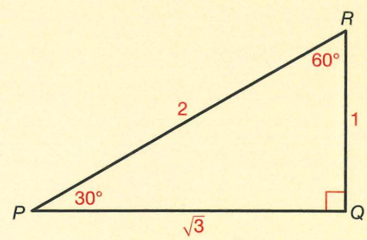
Theorie A Bijzondere rechthoekige driehoeken en goniometrische verhoudingen

- De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.



figuur 7.1

- De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.



figuur 7.2

Hieruit volgen de exacte waarden van de goniometrische verhoudingen bij hoeken van 30°, 45° en 60°.
Uit figuur 7.1 volgt

$\sin(45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos(45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\tan(45°) = \dfrac{1}{1} = 1$.

Uit figuur 7.2 volgt

$\sin(30°) = \frac{1}{2}$, $\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan(30°) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$,

$\sin(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ en $\tan(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

We zetten deze resultaten in een tabel.

hoek	**30°**	**45°**	**60°**
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tangens	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Leer deze tabel uit het hoofd.

Voorbeeld

Bereken de exacte waarde.

a $2\sin(45°) + \sqrt{6} \cdot \sin(60°)$

b $8\sin(45°)\cos(30°)$

c $\dfrac{\tan(30°)}{\sin(30°) - \tan(30°)}$

Uitwerking

a $2\sin(45°) + \sqrt{6} \cdot \sin(60°) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{18} =$

$\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \sqrt{2} + 1\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $8\sin(45°)\cos(30°) = 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

c $\dfrac{\tan(30°)}{\sin(30°) - \tan(30°)} = \dfrac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3 - 2\sqrt{3}}$

Werk de breuken uit teller en noemer weg.

1 Bereken de exacte waarde.

a $4\cos(30°) + 9\tan(30°)$

b $3\sin(30°) - \sqrt{2} \cdot \sin(45°)$

c $6\tan(30°) - 3\tan(60°)$

d $\sqrt{2} \cdot \sin(60°) + 3\sqrt{3} \cdot \sin(45°)$

2 Bereken de exacte waarde.

a $2\sin(45°)\cos(45°)$

b $2\sqrt{3} \cdot \sin(60°)\cos(30°)$

c $\sqrt{2} \cdot \sin(45°)\sin(60°) - 2\tan(60°)$

d $4\sin(30°)\tan(30°) + 2\cos(30°)\cos(60°)$

3 Bereken de exacte waarde.

a $\dfrac{\cos(30°)}{1 + \sin(60°)}$

b $\dfrac{\sin(30°) + \sin(60°)}{\sin(30°) - \sin(60°)}$

4 Gegeven zijn de formules
$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$
$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$
Met deze formules kun je de exacte waarde berekenen van bijvoorbeeld $\sin(15°)$ en $\sin(75°)$.
Voor de berekening van de exacte waarde van $\sin(15°)$ kun je als volgt te werk gaan.

$$\sin(15°) = \sin(45° - 30°) = \sin(45°)\cos(30°) - \cos(45°)\sin(30°)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

a Je kunt de exacte waarde van $\sin(15°)$ ook berekenen door te gebruiken $\sin(15°) = \sin(60° - 45°)$.
Werk dit uit.

b Bereken de exacte waarde van $\sin(75°)$.

7

7.1 Eenheidscirkel en radiaal

O 1 In de figuren 7.3 en 7.4 is de cirkel getekend met middelpunt (0, 0) en straal 1.
Het punt P draait tegen de wijzers van de klok in over de cirkel. P begint daarbij in (1, 0).
De hoek waarover gedraaid is geven we aan met α. In figuur 7.3 is $\alpha = 65°$.

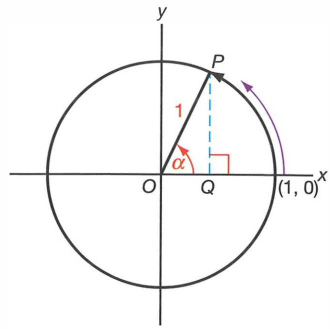
a Bereken PQ en OQ, beide in twee decimalen nauwkeurig.

b Geef de coördinaten van P in twee decimalen nauwkeurig.

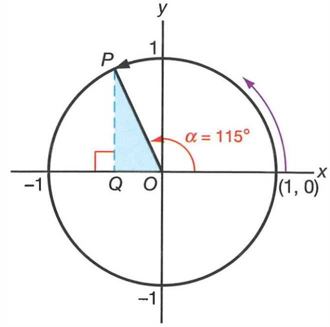
In figuur 7.4 is $\alpha = 115°$.

c Hoeveel graden is $\angle POQ$? Geef in twee decimalen nauwkeurig PQ, OQ en de coördinaten van P.

d Bereken $\cos(115°)$ en $\sin(115°)$ met je GR.
Vergelijk de resultaten met de coördinaten van het punt P van vraag c.
Wat merk je op?



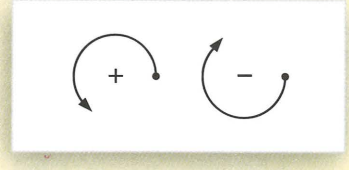
figuur 7.3 $\alpha = 65°$

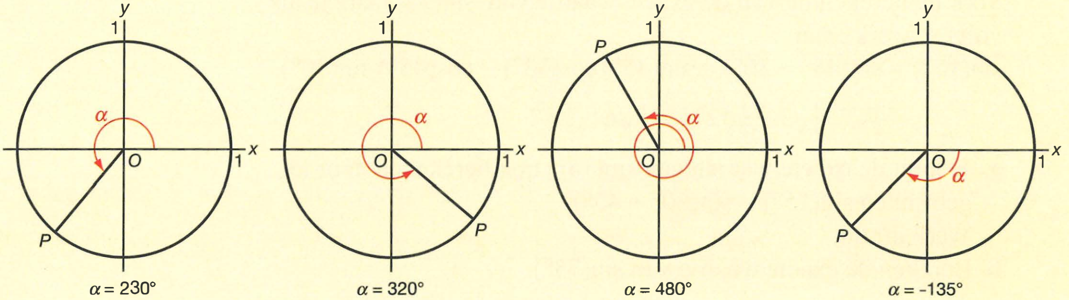


figuur 7.4 $\alpha = 115°$

Theorie A Definitie van sinus, cosinus en tangens

De cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 heet de **eenheidscirkel**.
Het punt P beweegt over de eenheidscirkel en begint in het punt $A(1, 0)$.
Hierdoor ontstaat hoek AOP die we de **draaiingshoek** van P noemen. We geven deze hoek aan met α. Het eerste been van een draaiingshoek is altijd de positieve x-as, het tweede been gaat door het punt P.
Draait P tegen de wijzers van de klok in, dan is α positief, draait P met de wijzers van de klok mee, dan is α negatief.
De draaiingshoek van P kan ook groter dan 360° zijn.





figuur 7.5 Draaiingshoeken kunnen zowel positief als negatief zijn.

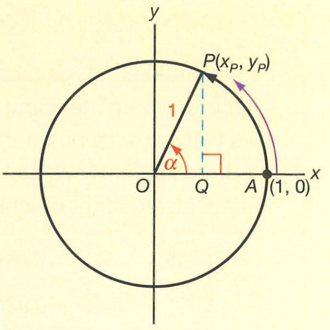
In figuur 7.6 is $0 < \alpha < 90°$. Voor deze scherpe hoek geldt

$$\sin(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_P}{1} = y_P,\ \cos(\alpha) = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_P}{1} = x_P \text{ en}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y_P}{x_P}.$$

Ook voor niet-scherpe hoeken nemen we per definitie

$\sin(\alpha) = y_P$, $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \dfrac{y_P}{x_P}$.



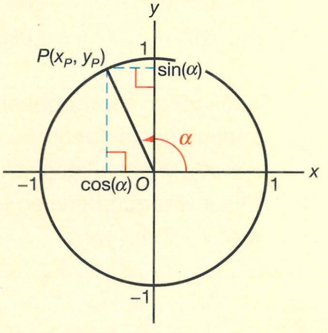
figuur 7.6

Voor de draaiingshoek α van het punt $P(x_P, y_P)$ op de eenheidscirkel geldt

$\sin(\alpha) = y_P$

$\cos(\alpha) = x_P$

$\tan(\alpha) = \dfrac{y_P}{x_P}$



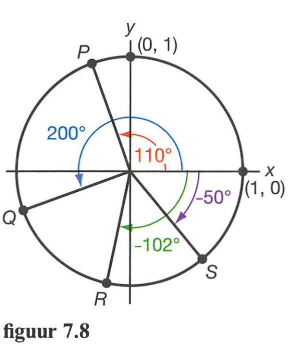
Van draaiingshoeken die een veelvoud zijn van 90°, kun je de sinus en de cosinus eenvoudig uit de eenheidscirkel aflezen. Zo hoort bij $\alpha = 180°$ het punt $P(-1, 0)$ dus $\sin(180°) = 0$ en $\cos(180°) = -1$.
Ook kun je de tangens te weten komen van hoeken die een veelvoud zijn van 90°. Zo is $\tan(180°) = \dfrac{0}{-1} = 0$ en $\tan(90°) = \dfrac{1}{0}$, dus $\tan(90°)$ bestaat niet.

2 Lees uit de eenheidscirkel af. Maak zo nodig een berekening.

a $\sin(0°)$
b $\cos(0°)$
c $\sin(90°)$
d $\cos(90°)$
e $\sin(270°)$
f $\cos(270°)$
g $\sin(360°)$
h $\tan(360°)$
i $\sin(450°)$
j $\cos(-90°)$
k $\tan(-540°)$
l $\cos(-180°)$

3 Je GR benadert $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$ voor iedere waarde van α. Zo is $\sin(260°) \approx -0{,}98$ en $\cos(260°) \approx -0{,}17$.

a Ga dit na.
b Op de eenheidscirkel in figuur 7.8 liggen de punten P, Q, R en S.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de punten P, Q, R en S.

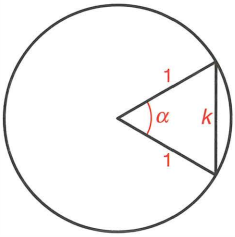


figuur 7.8

Geschiedenis Koorden en de sinus

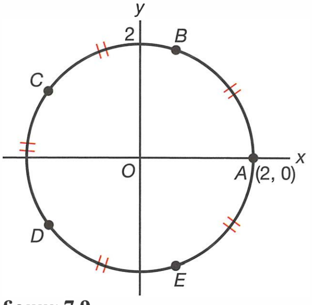
Vraagstukken uit de sterrenkunde en op het terrein van navigeren op zee hebben de ontwikkeling van de goniometrie vanaf de Oudheid gestimuleerd. De Griekse astronoom Ptolemeus (ca 85–165) rekende aan planeetbanen. Als hulpmiddel ontwikkelde hij koordentafels waarin hij lengten van koorden in de eenheidscirkel tot op vijf decimalen nauwkeurig berekende.

hoek	koorde
59°	0,98485
59° 30′	0,99243
60°	1
60° 30′	1,00755
61°	1,01508



In de vijfde eeuw hebben Indiase wiskundigen het begrip sinus ingevoerd. De sinustafel verving de koordentafel. De notaties die tegenwoordig in de goniometrie gangbaar zijn, hebben we aan Leonhard Euler (1707–1783) te danken.
Tegenwoordig bereken je de lengte van koorde k in de figuur hierboven simpel op je GR met $k = 2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

A 4 Op de cirkel met straal 2 van figuur 7.9 liggen de punten A, B, C, D en E zo, dat de cirkel wordt verdeeld in vijf cirkelbogen van gelijke lengte. Het punt A is het punt (2, 0). Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de punten B, C, D en E.



figuur 7.9

7

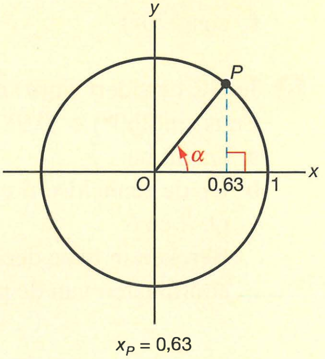
O 5 Op de eenheidscirkel liggen de punten P en Q met $y_P = y_Q = 0{,}5$, $x_P > 0$ en $x_Q < 0$.

a Teken de eenheidscirkel met de punten P en Q.

b Voor de draaiingshoek α van P geldt $\alpha = 30°$.
Gebruik dit en symmetrie om de draaiingshoek β van Q, met $0 \leq \beta \leq 360°$, af te lezen uit de figuur van vraag a.

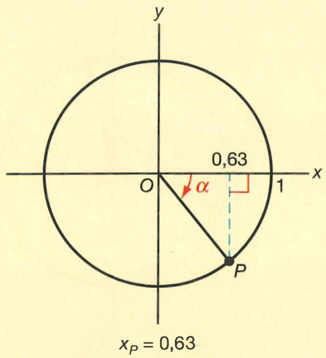
Theorie B Hoek berekenen bij gegeven x_P of y_P

In figuur 7.10 zie je het punt P met $x_P = 0{,}63$.
Dus $\cos(\alpha) = 0{,}63$.
Je berekent α op de GR met $\cos^{-1}(0{,}63)$. Je krijgt $\alpha \approx 51°$.

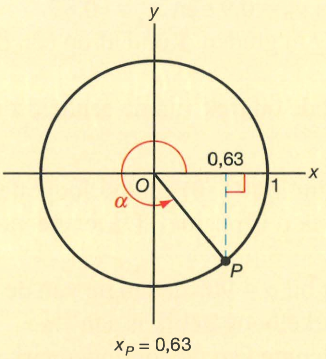


$x_P = 0{,}63$

figuur 7.10



figuur 7.11

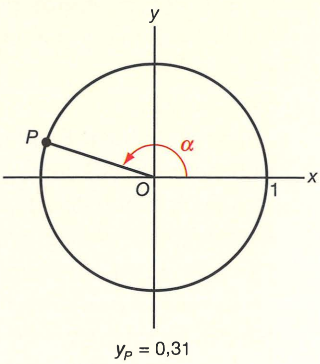


figuur 7.12

Ook in figuur 7.11 is $\cos(\alpha) = 0{,}63$. Maar de bijbehorende hoek $\alpha \approx -51°$ krijg je niet met de GR. Je moet dit zelf bedenken. Je gebruikt daarbij symmetrie.
Bij $x_P = 0{,}63$ in figuur 7.12 hoort $\alpha \approx 360° - 51° = 309°$.

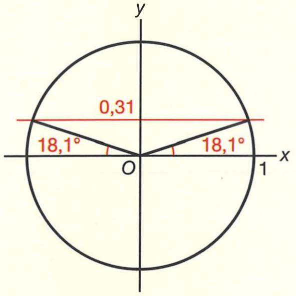
Voorbeeld

In figuur 7.13 is $y_P = 0{,}31$.
Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.



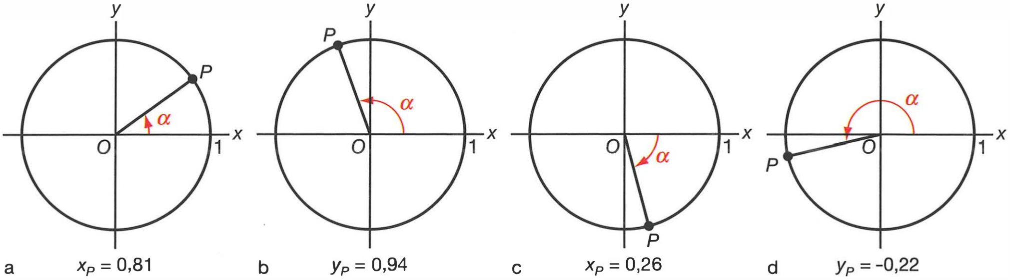
figuur 7.13

Uitwerking
$y_P = 0{,}31$ dus $\sin(\alpha) = 0{,}31$.
De GR geeft $\sin^{-1}(0{,}31) \approx 18{,}1°$.



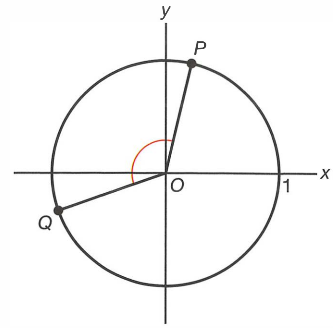
Dus $\alpha \approx 180° - 18{,}1° = 161{,}9°$.

6 Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.



figuur 7.14

A 7 In figuur 7.15 is $y_P = 0{,}92$ en $x_Q = -0{,}87$.
Bereken $\angle POQ$ in graden. Rond af op één decimaal.



figuur 7.15

O 8 **a** Licht toe dat de omtrek van de eenheidscirkel gelijk is aan 2π.

Het punt P begint in $A(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel. De draaiingshoek α is positief. De lengte van de cirkelboog hangt af van α.

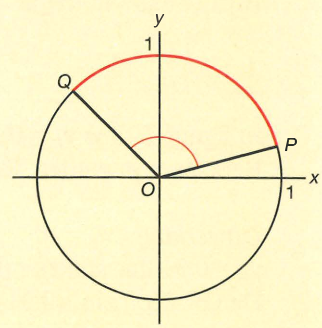
b Licht toe dat bij $\alpha = 90°$ de lengte van de door P doorlopen cirkelboog gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$.

c Bereken de lengte van de doorlopen cirkelboog bij $\alpha = 180°$.

d Bereken α in het geval dat de lengte van de doorlopen cirkelboog gelijk is aan $1\frac{1}{2}\pi$.

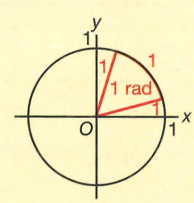
Theorie C De hoekeenheid radiaal

Voor de punten P en Q op een cirkel met middelpunt M heet hoek PMQ een **middelpuntshoek**.
We definiëren met behulp van de eenheidscirkel de hoekmaat **radiaal**.
Voor de punten P en Q op de eenheidscirkel is de middelpuntshoek POQ in radialen gelijk aan de lengte van de bijbehorende cirkelboog PQ.
Dus hoek = booglengte.
De hoekmaat radiaal wordt afgekort tot **rad**.
De radiaal is dus zo gedefinieerd, dat bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort.
Bij een booglengte van 2 hoort een middelpuntshoek van 2 rad.
En bij een booglengte van π hoort een middelpuntshoek van π rad.



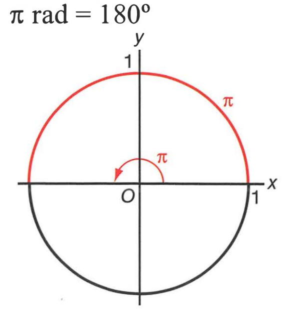
figuur 7.16

Een hoek van 1 radiaal is de middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1.



De hele eenheidscirkel heeft booglengte $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
Bij deze booglengte hoort dus een middelpuntshoek van 2π rad.
Hieruit volgt direct 2π rad = 360°, dus π rad = 180°.

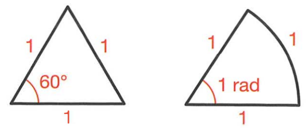
π rad = 180°



Voor het omzetten van graden in radialen en omgekeerd kun je gebruik maken van de volgende verhoudingstabel.

radialen	π	1	$\frac{\pi}{180}$
graden	180°	$\frac{180°}{\pi}$	1°

$$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$$



1 rad is bijna 60°.

Voorbeeld

a Druk $\frac{2}{3}\pi$ rad uit in graden.

b Druk $\frac{1}{4}$ rad uit in graden. Rond af op één decimaal.

c Druk 75° uit in radialen. Geef een exact antwoord.

d Druk 107° uit in radialen. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

a $\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$

b $\frac{1}{4} \text{ rad} = \frac{1}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 14{,}3°$

c $75° = 75 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5}{12}\pi \text{ rad}$

d $107° = 107 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 1{,}87 \text{ rad}$

Let goed op het verschil tussen $\frac{1}{3}$ rad en $\frac{1}{3}\pi$ rad.
$\frac{1}{3} \text{ rad} = \frac{1}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 19{,}1°$ en $\frac{1}{3}\pi \text{ rad} = \frac{1}{3} \cdot 180° = 60°$.

Informatief De hoekeenheid radiaal

Sinds het oude Babylonische rijk (ca. 2000 v.Chr) worden hoeken uitgedrukt in graden. Maar in plaats van een volle hoek in 360° te verdelen, had er ook voor een andere hoekeenheid gekozen kunnen worden. Pas in de 18e eeuw werd duidelijk dat er voor het differentiëren van goniometrische functies een andere hoekeenheid nodig is.
Deze hoekeenheid wordt met behulp van de straal van een cirkel en een cirkelboog op een natuurlijke manier gedefinieerd. Je stelt daarbij een middelpuntshoek gelijk aan de boog waarop hij staat. De boog is gelijk aan een aantal keren de straal, zo is dus ook de hoek gelijk aan een aantal keren de straal. Een andere benaming voor straal is radius, waaruit de naam radiaal is afgeleid.

9 Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

a $\frac{1}{6}\pi$ rad **c** 2π rad **e** $1\frac{1}{4}\pi$ rad **g** $-2\frac{1}{3}\pi$ rad

b $\frac{1}{4}\pi$ rad **d** 2 rad **f** $1\frac{1}{4}$ rad **h** $-2\frac{1}{3}$ rad

10 Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

a 360° **c** 45° **e** 90° **g** 300°

b 30° **d** 60° **f** 135° **h** 210°

11 Druk uit in radialen. Rond af op twee decimalen.

a 10° **b** 57,3° **c** 1030° **d** 90°

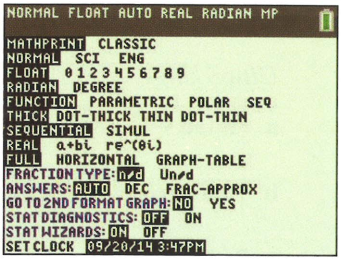
> **Afspraak**
> In het vervolg laten we bij een hoek in radialen de eenheid rad meestal weg.
> Dus $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ betekent $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ rad.

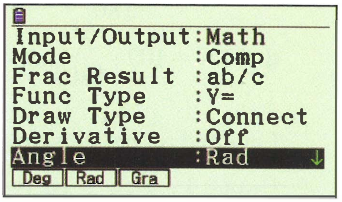
12 Bereken in twee decimalen nauwkeurig.

a $\cos(\frac{5}{8}\pi)$ **d** $\sin(\frac{4}{5})$

b $\cos(\frac{5}{8})$ **e** $\cos(7{,}6\pi)$

c $\sin(\frac{4}{5}\pi)$ **f** $\cos(7{,}6)$





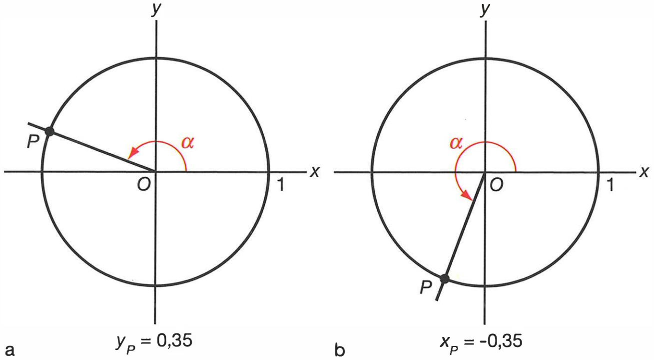
13 Bereken α met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ in radialen in twee decimalen nauwkeurig.

a $\sin(\alpha) = 0{,}92$ **d** $\cos(\alpha) = \frac{3}{17}$

b $\cos(\alpha) = 0{,}85$ **e** $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{5}$

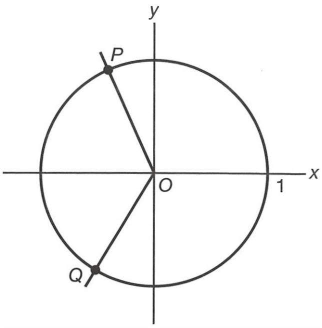
c $\sin(\alpha) = \frac{5}{12}$ **f** $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

14 Zie figuur 7.17.
Bereken α in radialen in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 7.17

A 15 In figuur 7.18 is $x_P = -0{,}32$ en $y_Q = -0{,}88$.
Bereken $\angle POQ$ in radialen in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 7.18

O 16 Bereken de exacte waarde.

a $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$

b $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)$

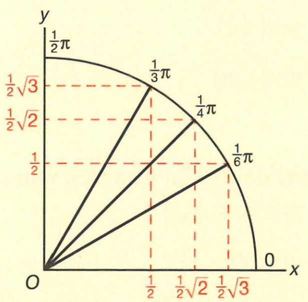
Theorie D De exacte-waarden-cirkel

Je kent de tabel hiernaast uit de voorkennis.
Deze tabel breiden we uit met hoeken van 0° en 90°.
Verder gebruiken we radialen in plaats van graden.
Zo krijg je de tabel hieronder. Leer deze tabel uit het hoofd.

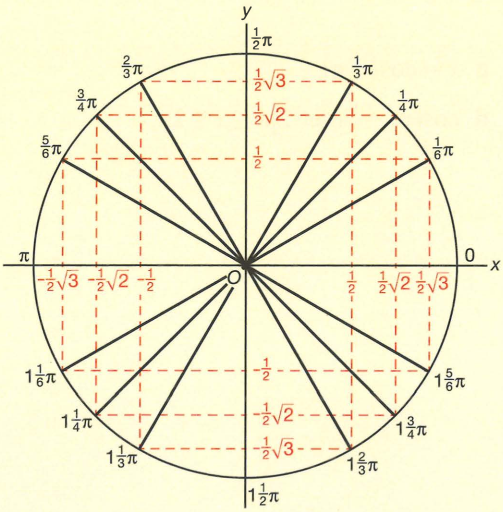
hoek	**30°**	**45°**	**60°**
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tangens	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

hoek	**0**	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

In de kwart eenheidscirkel hiernaast zijn de sinus en cosinus van de hoeken uit de tabel verwerkt.
Door te spiegelen in de y-as en de x-as krijg je de eenheidscirkel met exacte waarden, kortweg de **exacte-waarden-cirkel**.



figuur 7.19



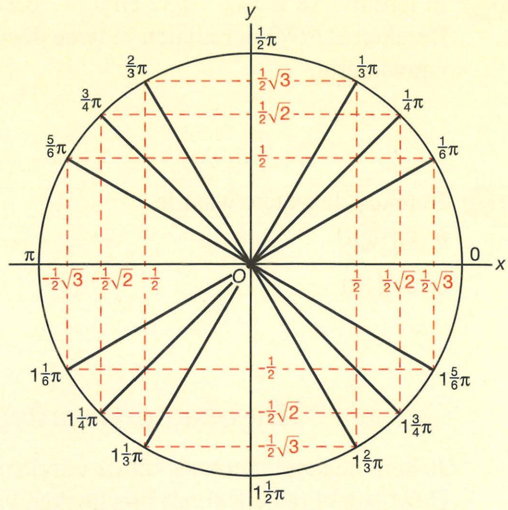
figuur 7.20

Uit de exacte-waarden-cirkel lees je af
$\cos(\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin(-\frac{3}{4}\pi) = \sin(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Uit de definities $\sin(\alpha) = y_P$, $\cos(\alpha) = x_P$ en
$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$ volgt $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
Zo is bijvoorbeeld

$$\tan(\tfrac{1}{6}\pi) = \frac{\sin(\frac{1}{6}\pi)}{\cos(\frac{1}{6}\pi)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{en } \tan(1\tfrac{1}{6}\pi) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$



figuur 7.21

17 Geef de exacte waarde. Maak zo nodig een berekening.

a $\sin(\frac{3}{4}\pi)$
b $\cos(1\frac{1}{6}\pi)$
c $\tan(\frac{2}{3}\pi)$
d $\sin(1\frac{1}{3}\pi)$
e $\cos(1\frac{2}{3}\pi)$
f $\tan(1\frac{5}{6}\pi)$
g $\cos(1\frac{1}{3}\pi)$
h $\sin(-\frac{1}{4}\pi)$

7

18 Geef de exacte waarden van α met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

a $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$
c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
d $\cos(\alpha) = 0$
e $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
f $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

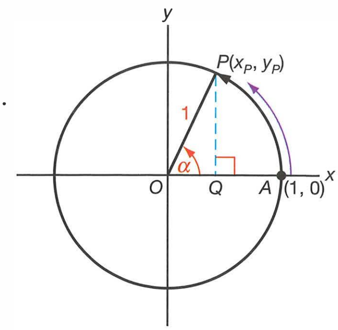
A 19 Geef de exacte waarde van x.

a $x = \sin(\frac{5}{6}\pi)$
b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ met $0 \leq x \leq 1\frac{1}{2}\pi$
c $x = \cos(1\frac{3}{4}\pi)$
d $\cos(x) = \frac{1}{2}$ met $1\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$

Terugblik

Eenheidscirkel en draaiingshoek

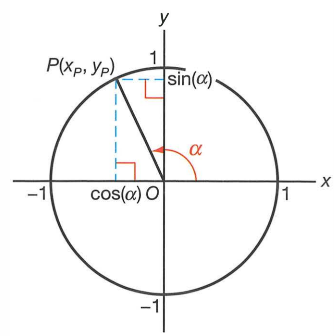
De eenheidscirkel is de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1. In de figuur hiernaast is het eerste been van α de positieve x-as, het tweede been snijdt de eenheidscirkel in het punt P. We noemen α de draaiingshoek van P. Hiernaast is α positief, want het punt P draait tegen de wijzers van de klok in.



Sinus, cosinus en tangens

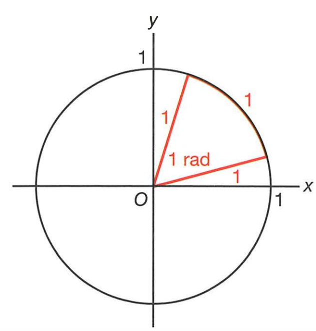
Met behulp van de eenheidscirkel definiëren we ook voor niet-scherpe hoeken α wat $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ is. Zie hiernaast.

$\sin(\alpha) = y_P$, $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \dfrac{y_P}{x_P}$



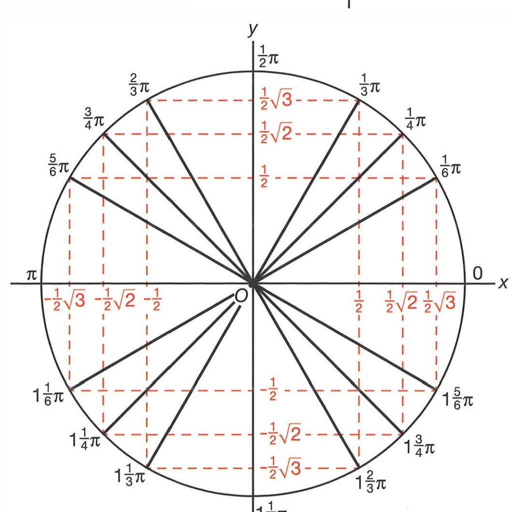
Radialen

De radiaal is een hoekmaat.
De middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1 is een hoek van 1 radiaal.
Maak bij het omzetten van graden in radialen en omgekeerd gebruik van π rad $= 180°$.
$1\frac{1}{3}\pi$ rad $= 1\frac{1}{3} \cdot 180° = 240°$ en $-150° = -150 \cdot \dfrac{\pi}{180} = -\frac{5}{6}\pi$ rad
De hoekeenheid radiaal mag weggelaten worden, maar de hoekeenheid graad niet.
Dus $\sin(2{,}5) \approx 0{,}60$ en $\sin(2{,}5°) \approx 0{,}04$.



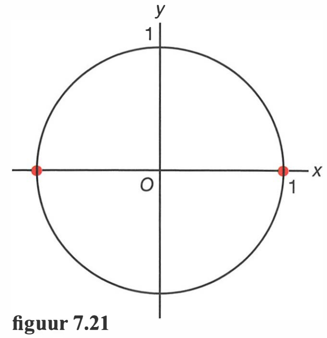
Exacte-waarden-cirkel

Bij hoeken die een veelvoud zijn van $\frac{1}{6}\pi$ of van $\frac{1}{4}\pi$ moet je de exacte waarde weten van de sinus, de cosinus en de tangens. Je gebruikt hierbij de exacte-waarden-cirkel.
Je leest bijvoorbeeld af
$\cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$,
$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en
$\tan\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = \dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$.



7.2 Goniometrische vergelijkingen

O 20 De eenheidscirkel snijdt de x-as in de punten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$.
Bij deze punten horen de draaiingshoeken $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ en ook $-\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots$
Welke draaiingshoeken horen bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de y-as?



figuur 7.21

Theorie A $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$

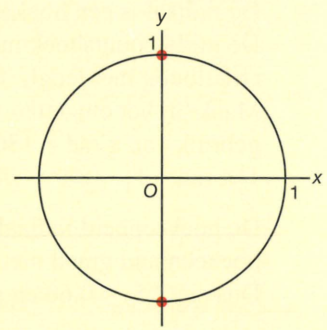
In opgave 20 heb je gezien dat bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de x-as de draaiingshoeken $\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ horen.
Dit noteren we kort als $k \cdot \pi$, waarin k een geheel getal is.
De getallen $k \cdot \pi$ zijn oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$.
Hiermee heb je alle oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$, want de sinus van een hoek is de y-coördinaat van het bijbehorende punt op de eenheidscirkel en de punten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ zijn alle punten op de eenheidscirkel met y-coördinaat 0.

k is in dit hoofdstuk een geheel getal.

En zo heeft de vergelijking $\cos(x) = 0$ als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Bij de vergelijking $\sin(x) = 1$ hoort het punt op de eenheidscirkel met y-coördinaat 1, dus het punt $(0, 1)$. Dus de vergelijking $\sin(x) = 1$ heeft als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Bij het punt $(0, 1)$ horen de draaiingshoeken $\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, 4\frac{1}{2}\pi, \ldots$ en ook $-1\frac{1}{2}\pi, -3\frac{1}{2}\pi, -5\frac{1}{2}\pi, \ldots$



figuur 7.22 Bij $\cos(x) = 0$ horen punten op de eenheidscirkel met x-coördinaat 0.

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met behulp van de eenheidscirkel.

$\sin(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$
$\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$\sin(A) = -1$ geeft $A = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = 0$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$\cos(A) = 1$ geeft $A = k \cdot 2\pi$
$\cos(A) = -1$ geeft $A = \pi + k \cdot 2\pi$

Voor A kun je elke uitdrukking invullen.
Bij de vergelijking $\sin\left(4x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$ is $A = 4x - \frac{1}{3}\pi$.
Je krijgt $4x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$, dus $4x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$ ofwel $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

b $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$

c $\sin^2(2x) = 1$

$\cos^2(x)$ betekent $(\cos(x))^2$

Uitwerking

a $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ — Deel alle termen door 2,

$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$ — dus $k \cdot 2\pi$ wordt $k \cdot \pi$.

b $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$ — Breng $\cos(x)$ buiten haakjes.

$\cos(x)(\cos(x) - 1) = 0$ — Gebruik $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

$\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = 1$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = k \cdot 2\pi$

c $\sin^2(2x) = 1$ — Gebruik $A^2 = 1$ geeft $A = 1 \vee A = -1$.

$\sin(2x) = 1 \vee \sin(2x) = -1$

$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$

In voorbeeld c krijg je als oplossing de twee rijtjes $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ en $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$.

Uitschrijven van het rijtje oplossingen $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ geeft

$\ldots, -1\frac{3}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi, 2\frac{1}{4}\pi, \ldots$

Uitschrijven van het rijtje oplossingen $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$ geeft

$\ldots, -1\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi, 2\frac{3}{4}\pi, \ldots$

Neem je deze rijtjes samen, dan krijg je
$\ldots, -1\frac{3}{4}\pi, -1\frac{1}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi, 2\frac{1}{4}\pi, 2\frac{3}{4}\pi, \ldots$

en dit is te schrijven als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$. Soms kun je in opgaven rijtjes oplossingen combineren, maar dat is niet verplicht.

7

21 Bereken exact de oplossingen.

a $\sin\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = 0$

b $\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right) = 0$

c $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$

d $\cos^2(2x) + \cos(2x) = 0$

22 Bereken exact de oplossingen.

a $\cos^2\left(x - \frac{1}{5}\pi\right) = 1$

b $\sin^2\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = 1$

c $\sin^3(x) - \sin(x) = 0$

d $\cos^3(2x) - \cos(2x) = 0$

23 Er geldt $\tan(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$.

a Licht dit toe.

b Bereken exact de oplossingen van $\tan\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = 0$.

A 24 Bereken exact de oplossingen.

a $\sin\left(4x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

b $\cos(4\pi x) = -1$

c $\sin^2\left(\frac{1}{4}\pi x\right) = 1$

d $\sin(2x)\cos(2x) + \sin(2x) = 0$

O 25 Gegeven is de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

a Licht toe dat $x = \frac{1}{6}\pi$ een oplossing is.

b Waarom is $x = 2\frac{1}{6}\pi$ een oplossing? En $x = 4\frac{1}{6}\pi$?

c Licht toe dat $x = \frac{5}{6}\pi$ een oplossing is.

d Waarom is $x = 2\frac{5}{6}\pi$ een oplossing? En $x = -1\frac{1}{6}\pi$?

Theorie B $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

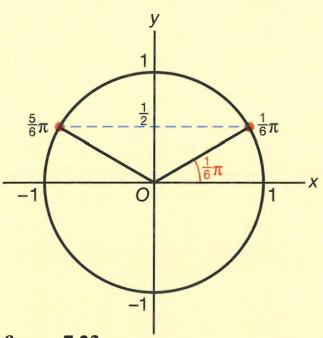
In opgave 25 heb je gezien dat bij de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ twee rijtjes oplossingen horen.

Omdat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ is het ene rijtje $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

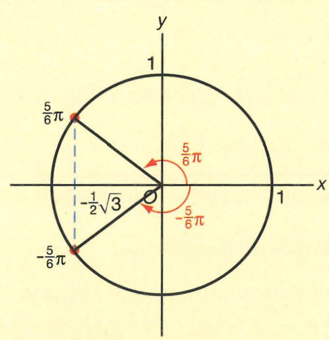
Omdat ook $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ is het andere rijtje $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

De oplossingen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$ zijn gevonden met de exacte-waarden-cirkel.

Merk op dat $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{1}{6}\pi$.



figuur 7.23



figuur 7.24

Bij het vinden van de rijtjes oplossingen van de vergelijking $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gebruik je figuur 7.24. Je krijgt

$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op door uit de exacte-waarden-cirkel één oplossing B af te lezen. Daarna gebruik je
$\sin(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
$\cos(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$

Neem je bij het rijtje $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ voor k de waarde -1, dan krijg je de oplossing $x = \frac{5}{6}\pi - 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi - 2\pi = -1\frac{1}{6}\pi$.

Voor $k = 3$ krijg je de oplossing $x = \frac{5}{6}\pi + 3 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 6\pi = 6\frac{5}{6}\pi$.

7

Zoek je de oplossingen van de vergelijking $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ met x op $[0, 2\pi]$ dan schrijf je eerst de twee rijtjes oplossingen op.

$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$

Het eerste rijtje oplossingen levert

...

$x = \frac{1}{6}\pi + -1 \cdot \pi = -\frac{5}{6}\pi$ niet op $[0, 2\pi]$

$x = \frac{1}{6}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{1}{6}\pi$ wel op $[0, 2\pi]$

$x = \frac{1}{6}\pi + 1 \cdot \pi = 1\frac{1}{6}\pi$ wel op $[0, 2\pi]$

$x = \frac{1}{6}\pi + 2 \cdot \pi = 2\frac{1}{6}\pi$ niet op $[0, 2\pi]$

...

Het tweede rijtje oplossingen levert

...

$x = -\frac{1}{6}\pi + 0 \cdot \pi = -\frac{1}{6}\pi$ niet op $[0, 2\pi]$

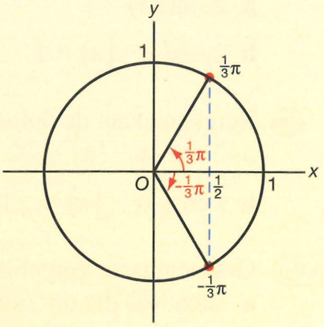
$x = -\frac{1}{6}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{5}{6}\pi$ wel op $[0, 2\pi]$

$x = -\frac{1}{6}\pi + 2 \cdot \pi = 1\frac{5}{6}\pi$ wel op $[0, 2\pi]$

$x = -\frac{1}{6}\pi + 3 \cdot \pi = 2\frac{5}{6}\pi$ niet op $[0, 2\pi]$

...

De oplossingen van de vergelijking $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ met x op $[0, 2\pi]$ zijn dus $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = 1\frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.



figuur 7.25

Voorbeeld

a Bereken exact de oplossingen van $2\sin(3x) = \sqrt{3}$.

b Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$ van $2\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{2}$.

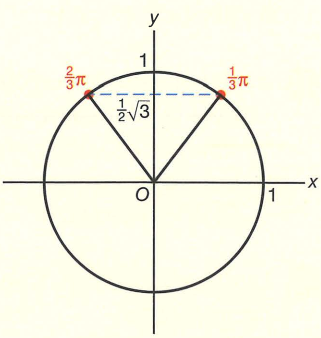
Uitwerking

a $2\sin(3x) = \sqrt{3}$

$\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$



b $2\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{2}$

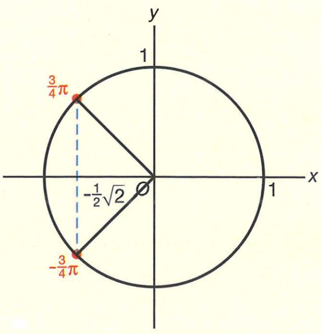
$\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{13}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{13}{24}\pi \vee x = 1\frac{13}{24}\pi \vee x = \frac{19}{24}\pi \vee x = 1\frac{19}{24}\pi$



26 Bereken exact de oplossingen.

a $2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

b $2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

c $2\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\sqrt{3}$

d $2\cos(3x - \pi) = -1$

2 Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$.

a $2\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{2}$

b $2\cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sqrt{3}$

c $\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

R 28 Gegeven is de vergelijking $2\sin^2(x) = 1$.

a Licht toe dat uit $2\sin^2(x) = 1$ volgt $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b Licht toe dat uit $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

c Licht toe dat de vier rijtjes van b te noteren zijn als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

d Licht toe dat de oplossing $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ ook direct uit de exacte-waarden-cirkel is af te lezen.

A 29 Bereken exact de oplossingen.

a $2\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

b $4\sin^2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = 1$

c $4\cos^2\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = 3$

d $4\sin^3(x) - \sin(x) = 0$

e $2\cos^2(x) = \cos(x) + 1$

f $\cos^2(x) - \cos(x) + \frac{1}{4} = 0$

A 30 Bereken algebraïsch de oplossingen op $[0, 10]$.

a $\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

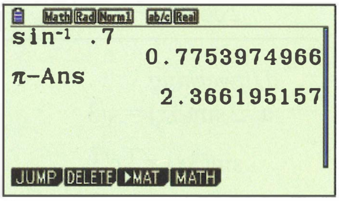
b $\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $4\sin^2\left(\frac{1}{5}\pi x\right) = 1$

d $2\cos^2(0{,}1\pi x) + \cos(0{,}1\pi x) = 1$

31 a Gegeven is de vergelijking $\sin(x) = 0{,}7$.
Zie het GR-scherm hiernaast en licht toe dat uit $\sin(x) = 0{,}7$ volgt $x \approx 0{,}775 + k \cdot 2\pi \vee x \approx 2{,}366 + k \cdot 2\pi$.

b Los algebraïsch op $\cos(x) = 0{,}8$. Rond in het antwoord af op drie decimalen.



32 Los algebraïsch op. Rond in het antwoord af op drie decimalen.

a $\sin(x) = -0{,}85$

b $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0{,}25$

c $\sin(x + 2) = 0{,}9$

d $\cos(2x + 1) = -0{,}4$

A 33 Bereken algebraïsch de oplossingen op $[0, 2\pi]$. Rond de oplossingen af op drie decimalen.

a $2\sin(1{,}75x) = 1{,}4$

b $\cos^2(0{,}95x) = 0{,}86$

O 34 Bereken exact de oplossingen.

a $\sin(3x) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$

b $\cos(3x) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$

Theorie C $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$

Zoals uit $\sin(3x) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ volgt

$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$,
volgt uit $\sin(3x) = \sin(x)$ dat
$3x = x + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi - x + k \cdot 2\pi$.

Zoals uit $\cos(3x) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ volgt

$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$,
volgt uit $\cos(3x) = \cos(x)$ dat
$3x = x + k \cdot 2\pi \vee 3x = -x + k \cdot 2\pi$.

$\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
$\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$

Voorbeeld

a Los algebraïsch op $\sin(x + 1) = \sin(2x - 3)$.
b Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$ van $\cos(3x) = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

Uitwerking

a $\sin(x + 1) = \sin(2x - 3)$

$x + 1 = 2x - 3 + k \cdot 2\pi \vee x + 1 = \pi - (2x - 3) + k \cdot 2\pi$

$-x = -4 + k \cdot 2\pi \vee x + 1 = \pi - 2x + 3 + k \cdot 2\pi$

$x = 4 - k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi + 2 + k \cdot 2\pi$

$x = 4 + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Omdat k een geheel getal is, mag je $x = 4 - k \cdot 2\pi$ ook schrijven als $x = 4 + k \cdot 2\pi$.

b $\cos(3x) = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

$3x = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee 4x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{7}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = \frac{1}{16}\pi \vee x = \frac{9}{16}\pi \vee x = 1\frac{1}{16}\pi \vee x = 1\frac{9}{16}\pi$

35 Los algebraïsch op.

a $\sin(x + 1) = \sin(2x + 3)$
b $\cos(2x - 1) = \cos(x + 1)$
c $\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$
d $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos(2x)$
e $\sin(2\pi x) = \sin(\pi(x - 1))$
f $\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \cos(\pi(x - 2))$

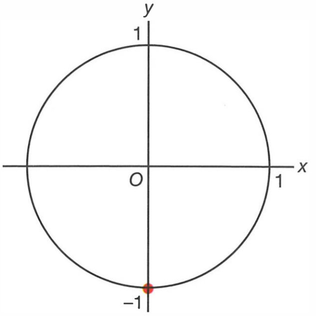
A 36 Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$.

a $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$
b $\cos\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right)$

Terugblik

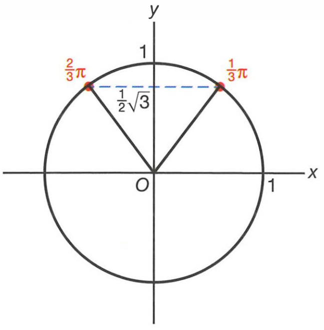
De vergelijkingen sin(A) = C en cos(A) = C met C = –1, 0, 1

Vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met de eenheidscirkel.
Bij $\sin(x) = -1$ hoort het punt met y-coördinaat -1 op de eenheidscirkel, dus het punt $(0, -1)$ en hierbij hoort een draaiingshoek van $1\frac{1}{2}\pi$.
Zo krijg je $\sin(x) = -1$ geeft $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$. Hierin is k een geheel getal.
Uit $\cos(A) = 0$ volgt $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
Dit gebruik je bij het oplossen van $\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$.
Je krijgt $2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, dus $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

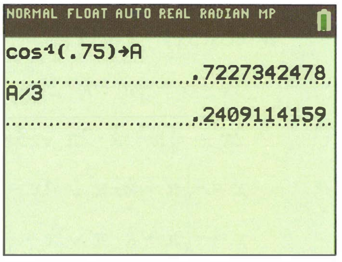


De vergelijkingen sin(A) = C en cos(A) = C met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op met de exacte-waarden-cirkel.
Bij $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ horen de draaiingshoeken $\frac{1}{3}\pi$ en $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$.
Er zijn twee rijtjes oplossingen:
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.



Een vergelijking als $\cos(3x) = \frac{3}{4}$ is niet exact op te lossen. Zie het GR-scherm hiernaast.
Je krijgt $3x \approx 0{,}722... + k \cdot 2\pi \vee 3x \approx -0{,}722... + k \cdot 2\pi$
$x \approx 0{,}241 + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x \approx -0{,}241 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$.



De vergelijkingen sin(A) = sin(B) en cos(A) = cos(B)

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijkingen $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$ gebruik je de regels
$\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$ en
$\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.
Zo krijg je bij de vergelijking $\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$

$$3x = x + \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi - \left(x + \tfrac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$
$$2x = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi - x - \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee 4x = \tfrac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = \tfrac{3}{16}\pi + k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

Zoek je oplossingen van de vergelijking $\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ op $[0, 2\pi]$ dan neem je k-waarden zo, dat $0 \le x \le 2\pi$.
Je krijgt $x = \frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi \vee x = \frac{3}{16}\pi \vee x = \frac{11}{16}\pi \vee x = 1\frac{3}{16}\pi \vee x = 1\frac{11}{16}\pi$.

7.3 Transformaties en functies

O 37 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

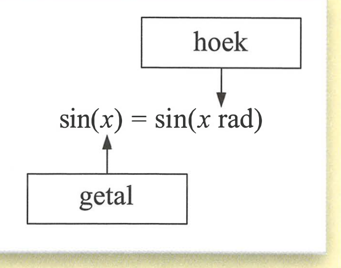
a Plot de grafiek van f. Neem Ymin = −2, Ymax = 2 en zorg voor de instelling op radialen.

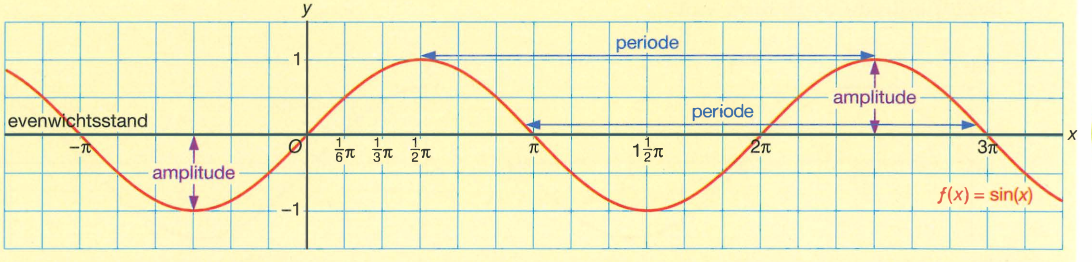
b Geef de exacte coördinaten van de toppen van de grafiek.

c Geef de exacte coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x-as.

Theorie A De functie $f(x) = \sin(x)$

Het sinusbegrip wordt niet alleen bij hoeken, maar ook bij getallen gebruikt. De sinus van het getal 2 is de sinus van een hoek van 2 radialen.
We definiëren de functie $f(x) = \sin(x)$ als de functie die aan elk getal x de sinus van x radialen toevoegt.
Hieronder is de grafiek van de **goniometrische functie** $f(x) = \sin(x)$ getekend. Op de horizontale as is 3 cm rechts van de oorsprong het getal π gezet.





figuur 7.26 Op de x-as is 1 cm rechts van de oorsprong $\frac{1}{3}\pi$ gezet. Merk op dat $\frac{1}{3}\pi \approx 1{,}047 \approx 1$.

De grafiek is periodiek met **periode** 2π. De **evenwichtsstand** is 0 en de **amplitude** is 1.
De **nulpunten** zijn …, -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, …

Een nulpunt van een functie f is een x-waarde waarvoor geldt $f(x) = 0$.

Een nulpunt is geen punt maar een getal.

38 Gegeven is de functie $g(x) = \cos(x)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

a Plot de grafiek. Neem Ymin = −2 en Ymax = 2.

b Geef de exacte coördinaten van de vijf toppen van de grafiek.

c Geef exact de nulpunten van g.

d Teken de grafiek. Gebruik de schaalverdeling van figuur 7.26.

$\cos(x) = \cos(x \text{ rad})$

O39 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.

a Hoe ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 + \sin(x)$ uit de grafiek van f? Geef de evenwichtsstand van de grafiek van g.

b Hoe ontstaat de grafiek van $h(x) = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ uit de grafiek van f? Bereken exact de nulpunten van h.

c Hoe ontstaat de grafiek van $k(x) = 4\sin(x)$ uit de grafiek van f? Geef de amplitude van de grafiek van k.

O40 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(2x)$.

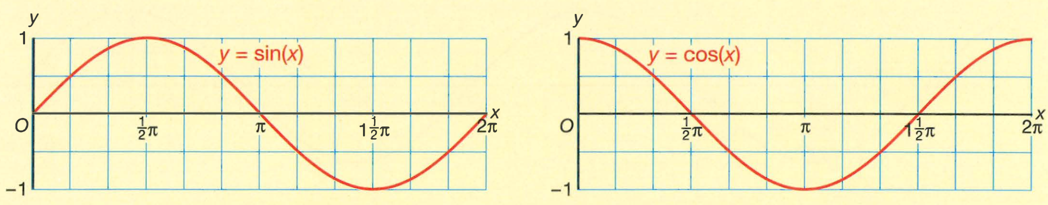
a Plot de grafiek. Neem Xmin = -2π, Xmax = 2π, Ymin = -2 en Ymax = 2.

b Geef de periode van de grafiek van $g(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Theorie B Sinusoïden

De functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn standaardfuncties. De bijbehorende grafieken mag je dus zonder toelichting tekenen. Beide grafieken hebben evenwichtsstand 0, amplitude 1 en periode 2π.

Een punt waar de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat, noemen we een **beginpunt** van de grafiek. Een hoogste punt van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ noemen we een beginpunt van de grafiek van g.

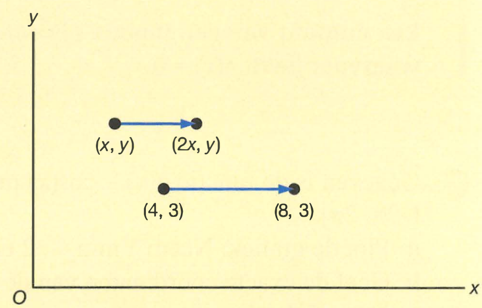


figuur 7.27 Van de standaardgrafieken $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ is één periode getekend.

Uitgaande van deze standaardgrafieken krijg je door translaties of vermenigvuldigingen andere periodieke grafieken. Zulke grafieken heten **sinusoïden**.

Naast de bekende transformaties
- translatie in horizontale richting
- translatie in verticale richting
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as

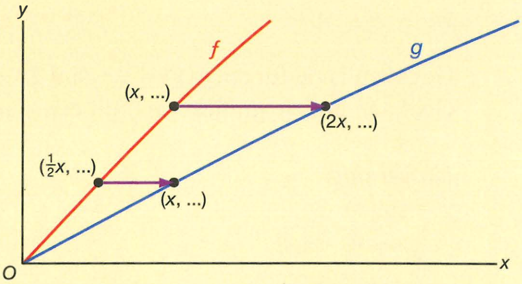
krijg je ook te maken met de
- **vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as**.



figuur 7.28 Vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 2.

Bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 2 heeft het punt (4, 3) als beeld het punt (8, 3).
Het punt (x, y) heeft als beeld het punt $(2x, y)$.

Vermenigvuldig je de grafiek van $y = f(x)$ ten opzichte van de y-as met 2, dan geldt voor de beeldgrafiek $y = g(x)$ dat $g(2x) = f(x)$ ofwel $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

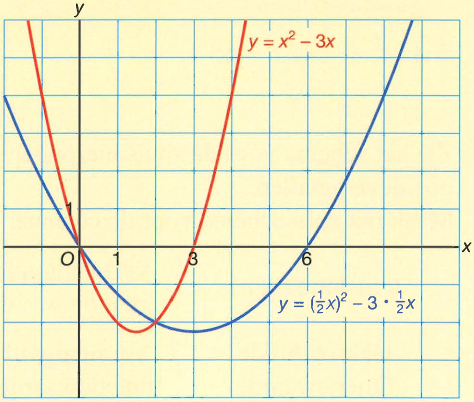


figuur 7.29 Vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 2.

grafiek van $y = f(x)$ $\xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } a}$ **beeldgrafiek** $y = f\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)$

Bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met a vervang je in de formule x door $\frac{1}{a} \cdot x$.

Vermenigvuldig je de grafiek van $y = x^2 - 3x$ ten opzichte van de y-as met 2, dan is de formule van de beeldgrafiek $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2}x$.



figuur 7.30

Vermenigvuldig je de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met 2 ten opzichte van de y-as, dan krijg je de grafiek van $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

De periode van $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ is 2 keer de periode van $y = \sin(x)$, dus de periode is $2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

De grafiek van de functie $g(x) = \cos(3x)$ ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \cos(x)$ bij de vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y-as.
De periode van g is $\frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi$.

Pas je meer transformaties na elkaar toe, let dan goed op de volgorde.
Vergelijk

$y = \sin(x)$	$y = \sin(x)$
$\downarrow$ verm. x-as, 3	$\downarrow$ translatie $(0, 2)$
$y = 3\sin(x)$	$y = 2 + \sin(x)$
$\downarrow$ translatie $(0, 2)$	$\downarrow$ verm. x-as, 3
$y = 2 + 3\sin(x)$	$y = 3(2 + \sin(x))$ ofwel $y = 6 + 3\sin(x)$

En vergelijk ook

$y = \sin(x)$	$y = \sin(x)$
$\downarrow$ translatie $\left(\frac{1}{3}\pi, 0\right)$	$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
$y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$	$y = \sin(2x)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$	$\downarrow$ translatie $\left(\frac{1}{3}\pi, 0\right)$
$y = \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$	$y = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$ ofwel $y = \sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$

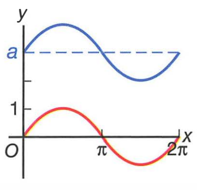
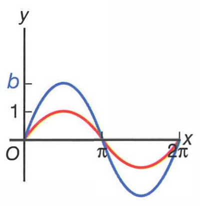
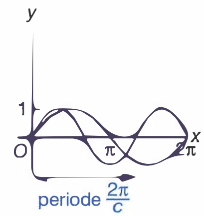
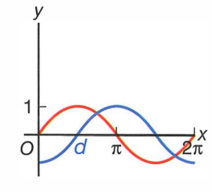
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2} + \sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$.
Geef aan hoe de grafiek van f uit een standaardgrafiek ontstaat.

Uitwerking

$$y = \sin(x)$$
$$\downarrow \text{translatie } \left(\tfrac{2}{3}\pi, 0\right)$$
$$y = \sin\left(x - \tfrac{2}{3}\pi\right)$$
$$\downarrow \text{verm. } y\text{-as, } \tfrac{1}{2}$$
$$y = \sin\left(2x - \tfrac{2}{3}\pi\right)$$
$$\downarrow \text{translatie } \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$$
$$f(x) = \tfrac{1}{2} + \sin\left(2x - \tfrac{2}{3}\pi\right)$$

R 41 Zie het schema voor de sinus hieronder. Hierin zijn a, b, c en d positieve getallen.
Maak net zo'n schema voor de cosinus.

translatie $(0, a)$	vermenigvuldiging met b t.o.v. de x-as	vermenigvuldiging met $\frac{1}{c}$ t.o.v. de y-as	translatie $(d, 0)$
tel a op bij de functiewaarde	vermenigvuldig de functiewaarde met b	vervang x door cx	vervang x door $x - d$
 $y = a + \sin(x)$	 $y = b\sin(x)$	 $y = \sin(cx)$	 $y = \sin(x - d)$
evenwichtsstand is a	amplitude is b	periode is $\dfrac{2\pi}{c}$	beginpunt is $(d, 0)$

42 Geef aan hoe de grafieken van de volgende functies uit een standaardgrafiek ontstaan.

a $f(x) = 2\sin(x + 3)$

b $g(x) = \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{5}$

c $h(x) = \cos(3x - 12)$

d $j(x) = 1\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{4}x\right)$

43 Geef aan hoe de grafieken van de volgende functies uit een standaardgrafiek ontstaan.

a $f(x) = 5 + 1{,}2\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$

b $g(x) = 0{,}4 + \sin\left(\frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

c $h(x) = 0{,}29\cos(3x + 4{,}2)$

d $j(x) = -0{,}8 + 2\sin\left(3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$

44 De grafiek van f ontstaat uit die van $y = \sin(x)$ door eerst de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 3 en daarna de translatie (4; -1,5) toe te passen.
Stel het functievoorschrift van f op.

A 45 **a** De grafiek van f ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door eerst de translatie $\left(\frac{1}{4}\pi, 4\right)$ en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 3 toe te passen.
Stel het functievoorschrift van f op.

b De grafiek van g ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 3 en vervolgens de translatie $\left(\frac{1}{4}\pi, 4\right)$ toe te passen.
Stel het functievoorschrift van g op.

A 46 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2} + \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ met domein $[0, 3\pi]$.

a Schets de grafiek van f.

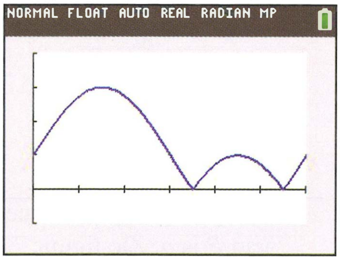
b Geef de exacte coördinaten van de punten waar de grafiek van f de lijn van de evenwichtsstand snijdt.

c Geef de exacte coördinaten van de drie toppen van de grafiek.

d De grafiek van f snijdt de x-as achtereenvolgens in de punten A, B en C.
Bereken exact de afstand tussen de punten A en B.

e Los exact op $f(x) \geq -1$.

A 47 Gegeven is de functie $f(x) = |1 + 2\sin(x)|$ met $D_f = [0, 2\pi]$. In de figuur hiernaast is de grafiek van f geplot.
Bereken exact de oplossingen van $f(x) \geq 2$.



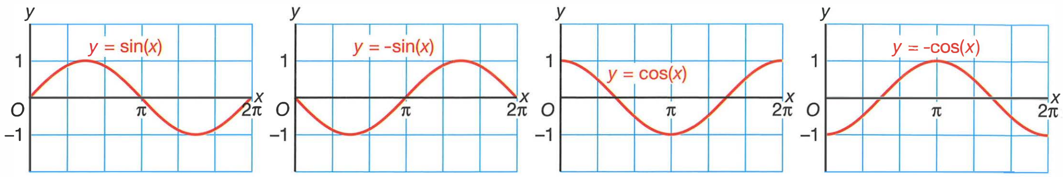
A 48 Gegeven is de functie $f(x) = |1 + 3\sin(2x)|$ met $D_f = [0, 2\pi]$.

a Schets de grafiek van f.

b De grafiek heeft vier punten met een horizontale raaklijn.
Bereken de exacte coördinaten van deze punten.

c Bereken exact $f\left(\frac{1}{6}\pi\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\pi\right)$, $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ en $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$.

O 49 Zie figuur 7.31 met de grafieken van $y = \sin(x)$, $y = -\sin(x)$, $y = \cos(x)$ en $y = -\cos(x)$.



figuur 7.31

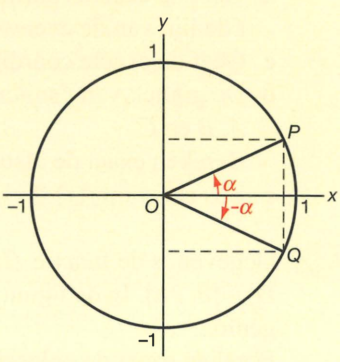
Van elk van de onderstaande functies is de grafiek gelijk aan een van de bovenstaande grafieken.
Zoek bij iedere functie welke grafiek erbij hoort.

$f(x) = \sin(-x)$ $\quad h(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ $\quad k(x) = \sin(x + \pi)$

$g(x) = \cos(-x)$ $\quad j(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ $\quad l(x) = \cos(x + \pi)$

Theorie C Goniometrische formules aantonen

Het punt P ligt op de eenheidscirkel en de draaiingshoek van P is α. Zie figuur 7.32. Je weet $x_P = \cos(\alpha)$ en $y_P = \sin(\alpha)$.
Punt Q is het spiegelbeeld van P in de x-as, dus de draaiingshoek van Q is $-\alpha$ en ook geldt $x_Q = x_P$ en $y_Q = -y_P$. Dus
$\sin(-\alpha) = y_Q = -y_P = -\sin(\alpha)$ en
$\cos(-\alpha) = x_Q = x_P = \cos(\alpha)$.

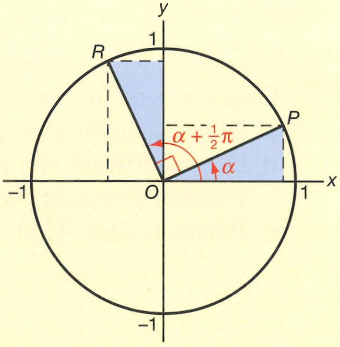


figuur 7.32

Het punt P ligt op de eenheidscirkel en de draaiingshoek van P is α. Zie figuur 7.33.
Punt R is het beeld van P bij draaiing om O over $\frac{1}{2}\pi$ rad, dus de draaiingshoek van R is $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ en ook geldt $x_R = -y_P$ en $y_R = x_P$. Dus

$\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right) = y_R = x_P = \cos(\alpha)$ en

$\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right) = x_R = -y_P = -\sin(\alpha)$.



figuur 7.33

Door de formule $\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(\alpha)$ te schrijven als $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ is deze te gebruiken om een cosinus om te zetten in een sinus.
Voor het omzetten van een sinus in een cosinus gebruik je de formule $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$. Deze formule toon je aan in opgave 50.
Verder toon je in deze opgave aan dat $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ en $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Uit de definities van $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ volgt direct
$\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
Hieronder staan deze formules genoteerd met A in plaats van α.
Hiermee geven we aan dat je voor A elke uitdrukking kunt invullen.
Neem je in de formule $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$ voor A de uitdrukking $2x - \frac{1}{4}\pi$, dan krijg je

$$\cos\left(2x - \tfrac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(2x - \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(2x + \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

$\sin(-A) = -\sin(A)$
$-\sin(A) = \sin(A + \pi)$
$\sin(A) = \cos\left(A - \frac{1}{2}\pi\right)$
$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$

$\cos(-A) = \cos(A)$
$-\cos(A) = \cos(A + \pi)$
$\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$
$\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$

Leer deze formules uit je hoofd!

Voorbeeld

Herleid $-\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.

Uitwerking

$$-\cos\left(2x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(2x - \tfrac{1}{3}\pi + \pi\right) = \cos\left(2x + \tfrac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(2x + \tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(2x + 1\tfrac{1}{6}\pi\right)$$

$\boxed{-\cos(A) = \cos(A + \pi)}$ $\qquad$ $\boxed{\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)}$

7

50 Toon aan met behulp van de eenheidscirkel.
a $\cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(\alpha)$
b $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$
c $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$
d $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

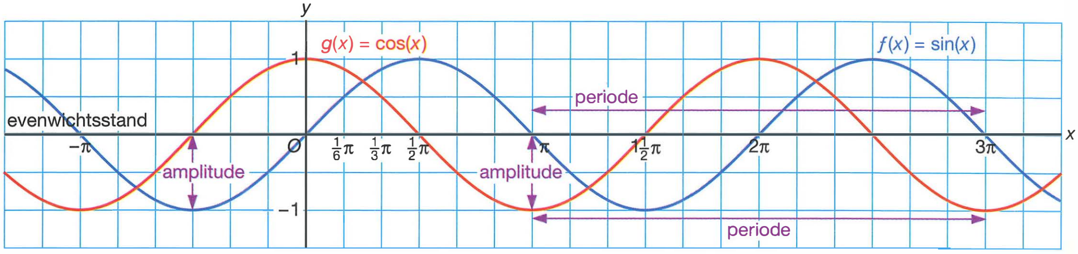
51 **a** Herleid $\sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ tot de vorm $\cos(ax + b)$.
b Herleid $\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.
c Herleid $-\sin\left(3x - \frac{2}{3}\pi\right)$ tot de vorm $\cos(ax + b)$.
d Herleid $-\cos\left(4x + 1\frac{1}{6}\pi\right)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.

52 Herleid.
a $(\sin(x) - \cos(x))^2$
b $\dfrac{2\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}$

A 53 **a** Druk $\sin^2(x) + 4\cos(x)$ uit in $\cos(x)$.
b Druk $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2$ uit in $\sin(x)$.
c Druk $2\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x)$ uit in $\cos(x)$.

Terugblik

De grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$
De grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn periodiek met periode 2π.
Van beide is de evenwichtsstand 0 en de amplitude 1.
Een beginpunt van de grafiek van f is $(0, 0)$ en van de grafiek van g is dat $(0, 1)$.



Een nulpunt van een functie f is een x-waarde waarvoor geldt $f(x) = 0$.
Zo heeft $g(x) = \cos(x)$ met domein $[0, 2\pi]$ de nulpunten $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as
Bij de vermenigvuldiging van de grafiek van de functie f met a ten opzichte van de y-as worden alle x-coördinaten met a vermenigvuldigd, terwijl de y-coördinaten gelijk blijven. In de formule van f vervang je x door $\frac{1}{a} \cdot x$.
Vermenigvuldig je de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met 5 ten opzichte van de y-as, dan krijg je de grafiek van $y = \sin\left(\frac{1}{5}x\right)$. De periode van de beeldgrafiek is $5 \cdot 2\pi = 10\pi$.

Transformaties

transformatie	beeldgrafiek van $y = \sin(x)$
translatie $(0, a)$	$y = a + \sin(x)$
verm. x-as met b	$y = b\sin(x)$
verm. y-as met $\frac{1}{c}$	$y = \sin(cx)$
translatie $(d, 0)$	$y = \sin(x - d)$

$$y = \sin(x)$$
$$\downarrow \text{translatie } (-\tfrac{5}{6}\pi, 0)$$
$$y = \sin(x + \tfrac{5}{6}\pi)$$
$$\downarrow \text{verm. } y\text{-as, } \tfrac{1}{4}$$
$$y = \sin(4x + \tfrac{5}{6}\pi)$$
$$\downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 3$$
$$y = 3\sin(4x + \tfrac{5}{6}\pi)$$
$$\downarrow \text{translatie } (0, -2)$$
$$y = -2 + 3\sin(4x + \tfrac{5}{6}\pi)$$

Hiernaast zie je hoe de grafiek van $f(x) = -2 + 3\sin\left(4x + \frac{5}{6}\pi\right)$ ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \sin(x)$.

Goniometrische formules
Met de formules hiernaast is $-\sin\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right)$ te herleiden tot de vorm $\cos(ax + b)$.
Je krijgt $-\sin\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(2x + 1\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(2x + \frac{3}{4}\pi\right)$.
Ook kun je $2\sin^2(x) + 3\cos(x)$ uitdrukken in $\cos(x)$.
Je krijgt $2\sin^2(x) + 3\cos(x) = 2(1 - \cos^2(x)) + 3\cos(x) = 2 - 2\cos^2(x) + 3\cos(x)$.

$$\sin(-A) = -\sin(A)$$
$$-\sin(A) = \sin(A + \pi)$$
$$\sin(A) = \cos(A - \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$$
$$\cos(-A) = \cos(A)$$
$$-\cos(A) = \cos(A + \pi)$$
$$\cos(A) = \sin(A + \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$$

7.4 Grafieken van goniometrische functies

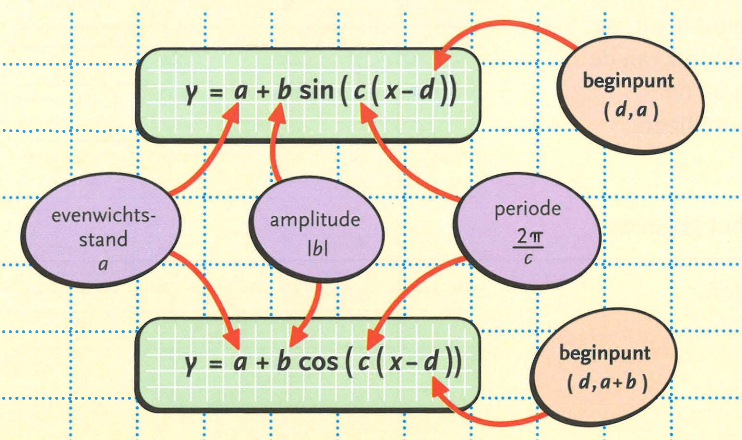
O 54 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3\sin(x)$ en $g(x) = 2 - 3\sin(x)$.

a Plot de grafieken. Neem Xmin = 0 en Xmax = 2π.

b De amplitude is een positief getal.
Geef van beide grafieken de amplitude.

Theorie A Sinusoïden tekenen

De amplitude is een positief getal, dus de grafiek van $y = -3\sin(x)$ heeft amplitude 3.
De amplitude van de grafiek van $f(x) = b\sin(x)$ is voor $b > 0$ gelijk aan b en voor $b < 0$ gelijk aan $-b$.
Dus de amplitude van de grafiek is gelijk aan $|b|$.
De sinusoïden $y = a + b\sin(c(x-d))$ en $y = a + b\cos(c(x-d))$ kun je tekenen door gebruik te maken van de vier kenmerken evenwichtsstand, amplitude, periode en beginpunt.
In dit hoofdstuk kiezen we steeds $c > 0$.



Let op het verschil tussen $b > 0$ en $b < 0$.

De sinusoïden $y = a + b\sin(c(x-d))$ en $y = a + b\cos(c(x-d))$		
	$b > 0$	$b < 0$
sin	stijgend door (d, a)	dalend door (d, a)
cos	$(d, a+b)$ is een hoogste punt	$(d, a+b)$ is een laagste punt

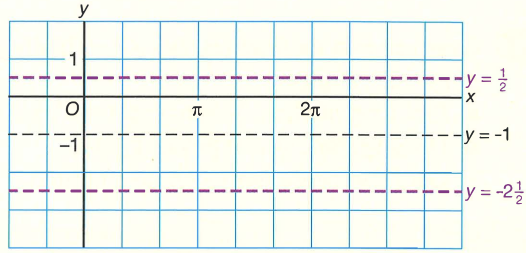
Voor het tekenen van een sinusoïde herleid je de formule eerst tot de vorm $y = a + b\sin(c(x-d))$ of $y = a + b\cos(c(x-d))$. Vervolgens vermeld je de vier kenmerken. Daarna kun je de grafiek tekenen.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f.

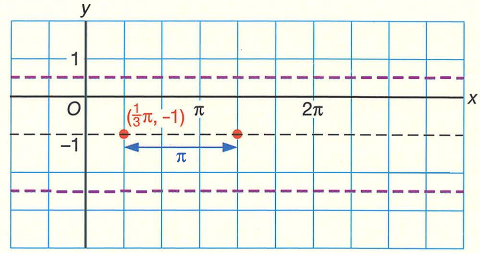
Aanpak

1 Schrijf de formule in de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ en vermeld de vier kenmerken.

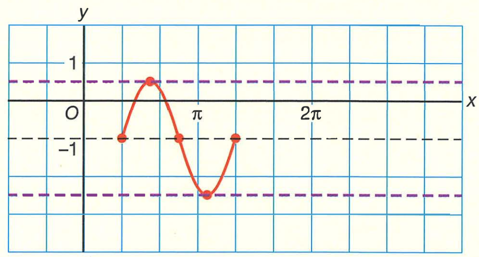


2 Stippel in een assenstelsel de lijn van de evenwichtsstand en de lijnen waarop de toppen liggen.

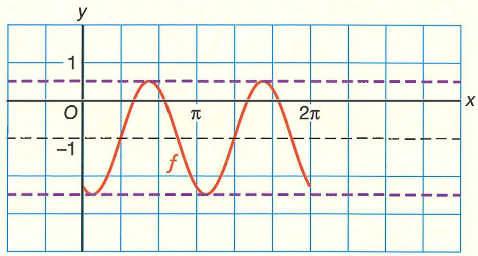
3 Teken een beginpunt en het punt dat één periode verder ligt.



4 Teken één periode van de grafiek. Gebruik dat na $\frac{1}{4}$ periode de grafiek een hoogste punt heeft, na $\frac{1}{2}$ periode weer door de lijn van de evenwichtsstand gaat en na $\frac{3}{4}$ periode een laagste punt heeft.



5 Teken de grafiek op het gegeven domein. Gebruik de periodiciteit.



Uitwerking

$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$

$= -1 + 1\frac{1}{2}\sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

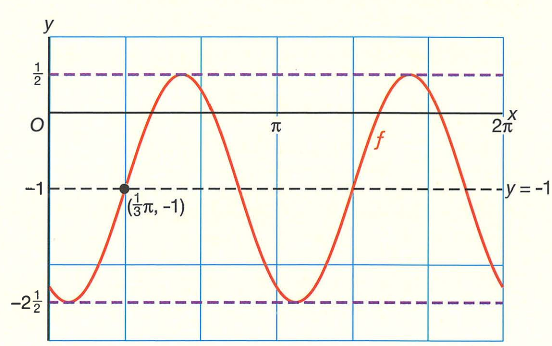
evenwichtsstand -1

amplitude $1\frac{1}{2}$

periode $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$1\frac{1}{2} > 0$ dus grafiek stijgend door het punt $\left(\frac{1}{3}\pi, -1\right)$

Zie de grafiek hiernaast.



55 **a** Teken de grafiek van $f(x) = -2 + 3\sin(3x + \pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 1 - 2\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.

Controleer de grafiek met de GR.

56 **a** Teken de grafiek van $f(x) = 1 + 3\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[-\pi, \pi]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = -2 - \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ met domein $[0, 3\pi]$.

57 **a** Teken de grafiek van $f(x) = 5 - 3\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$ met domein $[0, 10]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 3 - 4\cos(\pi x)$ met domein $[0, 6]$.

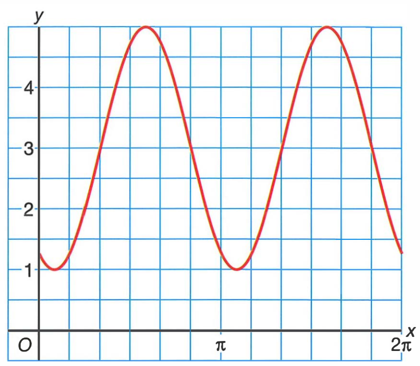
58 Gegeven is de formule $A = 40 + 25\sin\left(\pi\left(t - 1\frac{1}{2}\right)\right)$ met domein $[0, 6]$.
a Teken de grafiek van A.
b Los op $A < 30$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.
c Bereken in één decimaal nauwkeurig de maximale helling van de grafiek.

De grafiek van een sinusoïde is het steilst in de snijpunten van de grafiek met de lijn van de evenwichtsstand.

De helling bereken je op de GR met d*y*/d*x* (TI) of d/d*x* (Casio).

A 59 Gegeven is de formule $N = 1\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) + 3\frac{1}{2}$ met domein $[0, 10]$.
a Teken de grafiek van N.
b Los op $N > 4$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.
c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de helling van de grafiek in het snijpunt met de verticale as.
d Bereken in twee decimalen nauwkeurig de maximale helling van de grafiek.

O 60 Gegeven is de sinusoïde in figuur 7.34.
a Lees de evenwichtsstand, de amplitude en de periode af.
b De formule is van de vorm
$y = a + b\sin(c(x - d))$.
Geef mogelijke waarden van a, b, c en d.



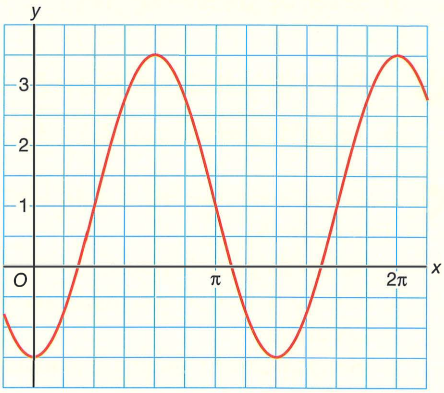
figuur 7.34

Theorie B Een formule van een sinusoïde opstellen

Bij een sinusoïde moet je een formule kunnen opstellen.
Hoe dat gaat zie je in het voorbeeld.

Voorbeeld

In figuur 7.35 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$.



figuur 7.35

Uitwerking

a = evenwichtsstand

$$= \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2} = \frac{3\frac{1}{2} + -1\frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

b = amplitude = maximum − evenwichtsstand
$= 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$

Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

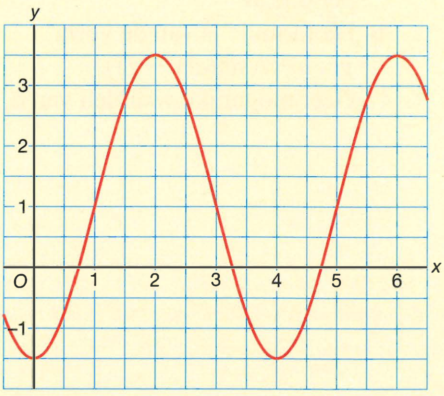
Periode $= 1\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$, dus $c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$.

Dus $y = 1 + 2\frac{1}{2}\sin\left(1\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$.

Bij de sinusoïde van het voorbeeld is ook een formule van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$ op te stellen. Je neemt dan een hoogste punt als beginpunt.
Een hoogste punt is $\left(\frac{2}{3}\pi, 3\frac{1}{2}\right)$, dus $d = \frac{2}{3}\pi$ en de formule is $y = 1 + 2\frac{1}{2}\cos\left(1\frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)\right)$.

In figuur 7.36 zie je een sinusoïde zoals in het voorbeeld, maar nu staan bij de horizontale as de getallen 1, 2, 3, ...



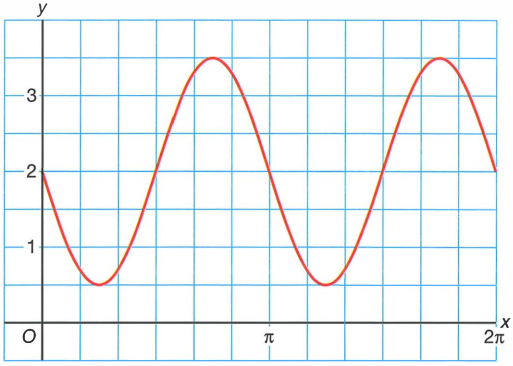
figuur 7.36

De periode is $5 - 1 = 4$, dus $c = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
Je krijgt $y = 1 + 2\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$ en ook
$y = 1 + 2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\pi(x - 2)\right)$.

61 Zie het voorbeeld.
Stel bij figuur 7.35 een formule op van de vorm
a $y = a + b\sin(c(x-d))$ met $b < 0$
b $y = a + b\cos(c(x-d))$ met $b < 0$.

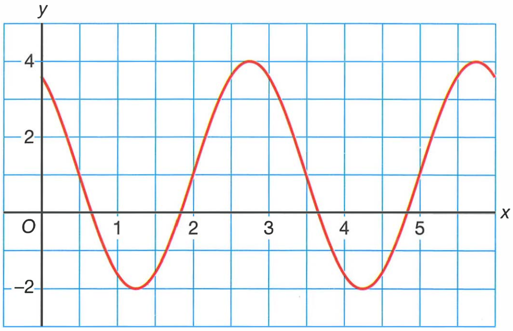
62 Zie de theorie hiervoor met figuur 7.36.
Stel bij deze figuur een formule op van de vorm
a $y = a + b\sin(c(x-d))$ met $b < 0$
b $y = a + b\cos(c(x-d))$ met $b < 0$.

63 In figuur 7.37 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b\sin(c(x-d))$ met $b > 0$
b $y = a + b\cos(c(x-d))$ met $b > 0$.



figuur 7.37

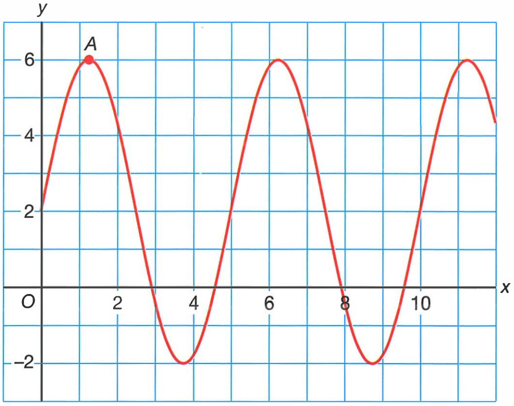
64 In figuur 7.38 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b\sin(c(x-d))$ met $b > 0$
b $y = a + b\sin(c(x-d))$ met $b < 0$.



figuur 7.38

65 In figuur 7.39 is een sinusoïde getekend.
Het punt A is een hoogste punt.
a Beredeneer dat $x_A = 1\frac{1}{4}$.

Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
b $y = a + b\cos(c(x-d))$ met $b > 0$
c $y = a + b\cos(c(x-d))$ met $b < 0$.

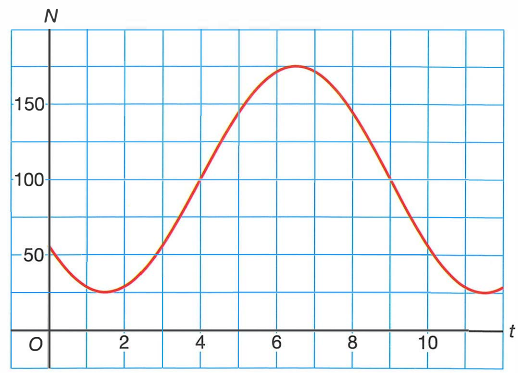


figuur 7.39

A 66 In figuur 7.40 is een sinusoïde getekend. Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

a $N = a + b\sin(c(t - d))$ met $b > 0$

b $N = a + b\cos(c(t - d))$ met $b > 0$.



figuur 7.40

O 67 Gegeven is de functie $f(x) = \tan(x)$.

a Plot de grafiek. Neem Xmin = 0, Xmax = 2π, Ymin = -5 en Ymax = 5.

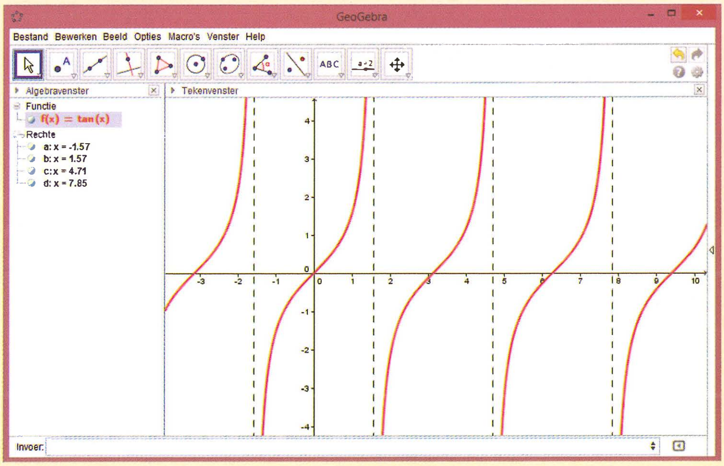
b De grafiek van f heeft op $[0, 2\pi]$ twee verticale asymptoten. Welke lijnen zijn dat, denk je?

Theorie C De tangensfunctie

Je weet dat voor de draaiingshoek α van het punt $P(x_P, y_P)$ op de eenheidscirkel geldt $\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$.

Bij de draaiingshoek $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ is $P(0, 1)$, dus $\tan\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{0}$ en dit bestaat niet. De lijn $x = \frac{1}{2}\pi$ is verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = \tan(x)$.

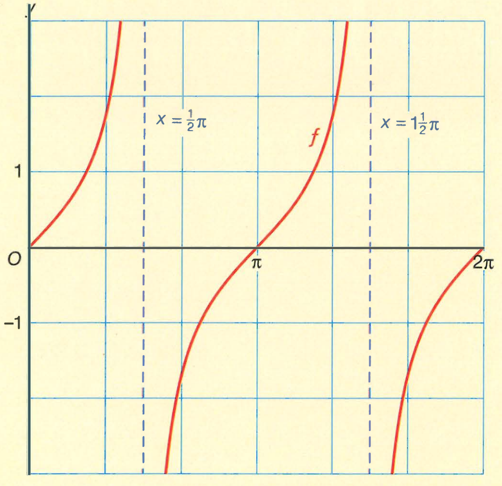
Bij de draaiingshoek $\alpha = 1\frac{1}{2}\pi$ is $P(0, -1)$, dus ook $\tan\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{-1}{0}$ bestaat niet. Ook de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$ is een verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = \tan(x)$.



In figuur 7.41 zie je de grafiek van $f(x) = \tan(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Daarbij is de volgende tabel gebruikt.

x	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	2π
$f(x) = \tan(x)$	0	1	-	-1	0	1	-	-1	0

Het punt $(0, 0)$ is een beginpunt van de grafiek.



figuur 7.41 De grafiek van $f(x) = \tan(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

In opgave 23 heb je gezien dat geldt $\tan(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$.
Ook de vergelijkingen $\tan(A) = C$ met
$C = -\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, 1$ en $\sqrt{3}$ zijn exact op te lossen.
Je gebruikt de volgende tabel en dat de grafiek van $f(x) = \tan(x)$ periodiek is met periode π.

α	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Bij het exact oplossen van de vergelijking $\tan(A) = \tan(B)$ gebruik je

$\tan(A) = \tan(B)$ geeft $A = B + k \cdot \pi$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $\tan\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{3}$

b $5 + 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = 3$

c $\tan(3x) = \tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

Uitwerking

a $\tan\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{3}$

$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

$2x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{7}{24}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

b $5 + 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = 3$

$2\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = -2$

$\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$

$\frac{1}{2}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

c $\tan(3x) = \tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

$3x = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

68 Bereken exact de oplossingen.

a $\tan\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

b $1 - \tan\left(\frac{3}{4}x\right) = 2$

c $\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = \tan\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right)$

d $3\tan\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \sqrt{3}$

e $2 + \sqrt{3} \cdot \tan\left(\frac{1}{8}\pi x\right) = 5$

f $\tan\left(\frac{1}{6}\pi x\right) = \tan\left(\frac{1}{4}\pi(x - 1)\right)$

69 Op het interval $[0, 3\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 2 + \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$.

a Geef van de grafiek van f een beginpunt, de periode en de asymptoten.

b Schets de grafiek van f.

c De functie heeft één nulpunt.
Bereken dit nulpunt in twee decimalen nauwkeurig.

d De lijn $y = 3$ snijdt de grafiek van f twee keer.
Bereken de exacte coördinaten van deze snijpunten.

70 Op het interval $[0, 4\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 1 - \tan\left(\frac{2}{3}x\right)$.

a Geef van de grafiek van f een beginpunt, de periode en de asymptoten.

b Schets de grafiek van f.

c Bereken exact de nulpunten van f.

d Los exact op $f(x) < 2$.

A 71 Op het interval $[0, 12]$ is gegeven de functie $f(x) = 3 + \tan\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$.

a Geef van de grafiek van f een beginpunt, de periode en de asymptoten.

b Schets de grafiek van f.

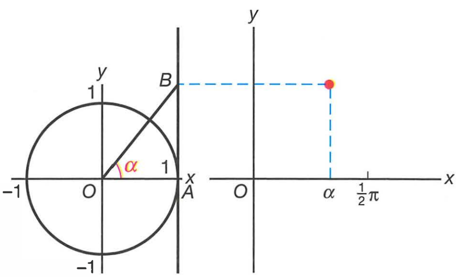
c Los algebraïsch op $f(x) > 4$.

d Los op $f(x) > x$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

Informatief De tangensfunctie

De naam tangens komt van het Latijnse woord tangere dat raken betekent.
Teken je aan de eenheidscirkel een raaklijn in het punt $A(1, 0)$ en snijdt het tweede been van de draaiingshoek α deze raaklijn in het punt B, dan geldt $\tan(\alpha) = AB$, immers

$\tan(\alpha) = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{AB}{1} = AB$. Zie de figuur hiernaast.



Door bij elke hoek α op de x-as het lijnstuk AB verticaal uit te zetten ontstaat de grafiek van de tangens.

7

Terugblik

Sinusoïden tekenen

De grafieken van $y = a + b\sin(c(x - d))$ en $y = a + b\cos(c(x - d))$ heten sinusoïden.

De vier kenmerken van sinusoïden zijn

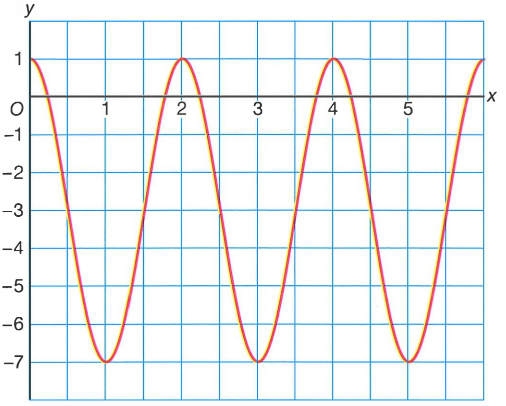
- evenwichtsstand is a
- amplitude is $|b|$
- periode is $\frac{2\pi}{c}$, dus $c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ $(c > 0)$
- beginpunt bij een sinusgrafiek is (d, a)
- beginpunt bij een cosinusgrafiek is $(d, a + b)$.

	$b > 0$	$b < 0$
sin	stijgend door (d, a)	dalend door (d, a)
cos	$(d, a + b)$ is een hoogste punt	$(d, a + b)$ is een laagste punt

Deze vier kenmerken gebruik je bij het tekenen van sinusoïden.

Formule opstellen bij sinusoïde

Bij een gegeven sinusoïde zijn oneindig veel formules op te stellen.
Je kunt een formule met een sinus of met een cosinus kiezen en je hebt de keuze uit $b > 0$ of $b < 0$.
Bij de figuur hiernaast lees je af



- de evenwichtsstand is $\frac{1 + -7}{2} = -3$
- de amplitude is $1 - -3 = 4$
- de periode is 2.

Mogelijke formules zijn

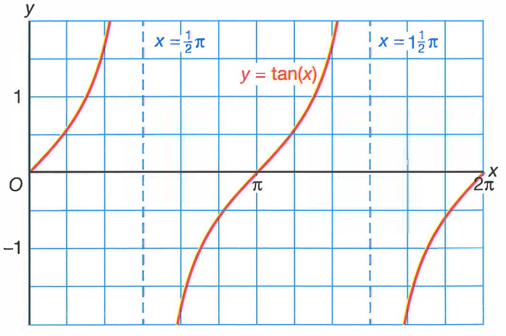
$y = -3 + 4\sin\left(\pi\left(x - 1\frac{1}{2}\right)\right)$

$y = -3 - 4\sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$

$y = -3 + 4\cos(\pi x)$

$y = -3 - 4\cos(\pi(x - 1))$

De grafiek van $f(x) = \tan(x)$



De grafiek van $y = \tan(x)$ is periodiek met periode π.
De grafiek heeft op het interval $[0, 2\pi]$ twee verticale asymptoten. Dat zijn de lijnen $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
Bij het tekenen van de grafiek van $y = \tan(x)$ op $[0, 2\pi]$ gebruik je verder de punten $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{4}\pi, 1\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, -1\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(1\frac{1}{4}\pi, 1\right)$, $\left(1\frac{3}{4}\pi, -1\right)$ en $(2\pi, 0)$.

Vergelijkingen van het type $\tan(A) = C$ met $C = -\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, 1$ en $\sqrt{3}$ kun je exact oplossen.
De vergelijking $\tan(A) = \tan(B)$ geeft $A = B + k \cdot \pi$.

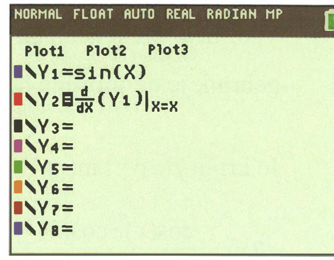
7.5 Goniometrische functies differentiëren

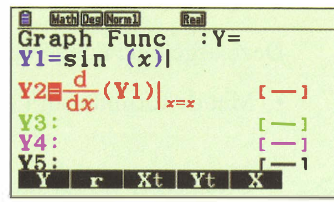
O 72 Je kunt op de GR de grafiek van de afgeleide van een functie plotten.
Op de TI gebruik je hiervoor de optie nDerive uit MATH-MATH-menu, op de Casio gebruik je de optie d/dx uit het OPTN-CALC-menu.

a Plot in één figuur de grafieken van $y = \sin(x)$ en zijn afgeleide. Zie de GR-schermen hiernaast. Neem als domein $[0, 2\pi]$.

b Welke standaardfunctie is vermoedelijk de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$?
Controleer je antwoord op de GR met tabellen.

c Plot in één figuur de grafieken van $y = \cos(x)$ en zijn numerieke afgeleide.
Wat is de formule van de afgeleide van $y = \cos(x)$, denk je? Controleer je antwoord met de GR.





Theorie A De afgeleide van sinus, cosinus en tangens

In opgave 72 heb je het volgende ontdekt.

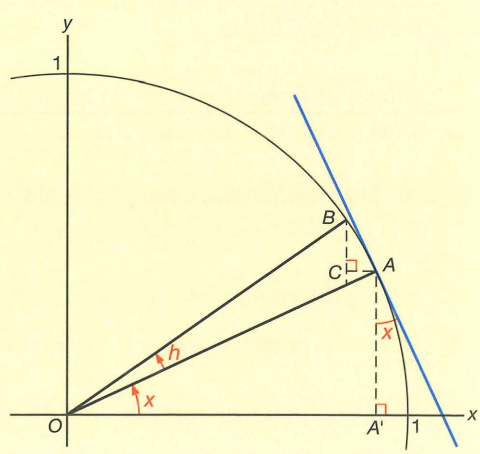
$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$
$g(x) = \cos(x)$ geeft $g'(x) = -\sin(x)$

We maken als volgt aannemelijk dat de regel $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$ geldt.
In de eenheidscirkel van figuur 7.42 is de draaiingshoek van punt A gelijk aan x en van punt B gelijk aan $x + h$.
Uit de definitie van de radiaal volgt dat booglengte $AB = h$.
Voor kleine waarden van h is booglengte $AB \approx$ lijnstuk AB en $\angle ABC \approx x$.
Met de definitie van de afgeleide krijg je
$f(x) = \sin(x)$ geeft

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{y_B - y_A}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{y_B - y_C}{\text{booglengte } AB} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{BC}{\text{lijnstuk } AB} = \lim_{h \to 0} \cos(\angle ABC) = \cos(x).$$



figuur 7.42

Merk op dat op de vorige bladzijde gebruikt is dat de lengte van boog AB gelijk is aan de bijbehorende middelpuntshoek. Dit is alleen het geval als de hoek in radialen is uitgedrukt. Daarom geldt de regel $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$ alleen als x in radialen is uitgedrukt.
In opgave 73 toon je aan $[\cos(x)]' = -\sin(x)$.

Voor het berekenen van de afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ gebruik je de formule $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$ en de quotiëntregel.

$[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$
(productregel)

$\left[\dfrac{t}{n}\right]' = \dfrac{nt' - tn'}{n^2}$
(quotiëntregel)

Je krijgt $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Dit geeft

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Deze afgeleide kun je op twee manieren herleiden.

- Met de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ krijg je $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
- Uitdelen en de formule $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x).$$

$\dfrac{A + B}{C} = \dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C}$ (uitdelen)

7

$f(x) = \tan(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Bij het differentiëren van goniometrische functies heb je vaak de kettingregel nodig.

Bij het differentiëren van $f(x) = \sin(3x)$ krijg je
$f'(x) = \cos(3x) \cdot 3 = 3\cos(3x)$.

Bij het differentiëren van $g(x) = \sin(x^3)$ krijg je
$g'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2\cos(x^3)$.

Bij het differentiëren van $h(x) = \sin^3(x)$ krijg je
$h'(x) = 3 \cdot (\sin(x))^2 \cdot \cos(x) = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x)$.

Met behulp van de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ is $h'(x)$ uit te drukken in $\cos(x)$. Immers $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, dus
$h'(x) = 3(1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) = 3\cos(x) - 3\cos^3(x)$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 1 + 2\cos\left(3\left(x - \frac{1}{12}\pi\right)\right)$

b $g(x) = x \sin(x)$

c $h(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{\sin(x)}$

d $j(x) = x^2 \tan(x)$

Uitwerking

a $f(x) = 1 + 2\cos\left(3\left(x - \frac{1}{12}\pi\right)\right) = 1 + 2\cos\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)$ geeft

$f'(x) = -2\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) \cdot 3 = -6\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)$ de kettingregel

b $g(x) = x \sin(x)$ geeft $g'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x\cos(x)$ de productregel

c $h(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{\sin(x)}$ geeft

$h'(x) = \dfrac{\sin(x) \cdot (1 - \sin(x)) - (x + \cos(x)) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$ de quotiëntregel

$= \dfrac{\sin(x) - \sin^2(x) - x\cos(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x) - 1}{\sin^2(x)}$

d $j(x) = x^2 \tan(x)$ geeft

$j'(x) = 2x \cdot \tan(x) + x^2 \cdot (1 + \tan^2(x)) = 2x\tan(x) + x^2 + x^2\tan^2(x)$

7

73 Gebruik $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$ om aan te tonen dat $[\cos(x)]' = -\sin(x)$.

74 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 3 + 4\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$

b $g(x) = 10 + 16\cos\left(\frac{1}{2}(x - 1)\right)$

c $h(x) = x\cos(x)$

d $j(x) = x\cos(2x)$

e $k(x) = x^2 \cdot \sin(3x)$

f $l(x) = 2x\sin(3x - 1)$

75 Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin(x)}{\cos(x)}$

b $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2 + \cos(x)}$

c $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

d $j(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x + \sin(x)}$

76 Differentieer.

a $f(x) = \cos^2(x)$

b $g(x) = 2\sin^2(x)$

c $h(x) = 1 + 2\cos^2(x)$

d $j(x) = x + 3\sin^2(x)$

77 **a** Differentieer $f(x) = 3\tan(2x)$.

b Toon aan $g(x) = \tan^2(x)$ geeft $g'(x) = \dfrac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$.

A 78 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \cos^3(x)$

b $g(x) = \cos(x^3)$

c $h(x) = \cos^2(2x)$

d $j(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

A 79 **a** Toon aan $f(x) = \sin^3(x) + \sin(x)$ geeft $f'(x) = 4\cos(x) - 3\cos^3(x)$.

b Druk de afgeleide van $g(x) = \sin^2(x)\cos(x)$ uit in $\sin(x)$.

c Toon aan $h(x) = \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)}$ geeft $h'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

A 80 Gegeven is de functie $f(x) = x\sin^2(x)$.
Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = \frac{3}{4}\pi$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in A. Rond niet af.

A 81 Gegeven is de functie $f(x) = \cos^3(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Bereken exact de coördinaten van de punten van de grafiek met een horizontale raaklijn.

7

A 82 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3\cos(x)}{2 - \sin(x)}$ met domein $[0, 2\pi]$.

a Stel langs algebraïsche weg formules op van de raaklijnen k en l van de grafiek van f in de snijpunten met de x-as.

b Bereken exact het bereik van f.

Terugblik

Afgeleide van sinus, cosinus en tangens

$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$,

$g(x) = \cos(x)$ geeft $g'(x) = -\sin(x)$ en

$h(x) = \tan(x)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Bij het berekenen van de afgeleide heb je vaak de kettingregel nodig.

$f(x) = \cos(4x)$ geeft $f'(x) = -\sin(4x) \cdot 4 = -4\sin(4x)$

$g(x) = \cos(x^4)$ geeft $g'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3 = -4x^3 \sin(x^4)$

$h(x) = \cos^4(x)$ geeft $h'(x) = 4\cos^3(x) \cdot -\sin(x) = -4\cos^3(x)\sin(x)$

De productregel en de quotiëntregel

Bij het differentiëren van $f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$ heb je de productregel nodig.

Je krijgt $f'(x) = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$.

Bij het differentiëren van $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^3 + \sin(x)}$ heb je de quotiëntregel nodig.

$$\text{Je krijgt } g'(x) = \frac{(x^3 + \sin(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (3x^2 + \cos(x))}{(x^3 + \sin(x))^2}$$

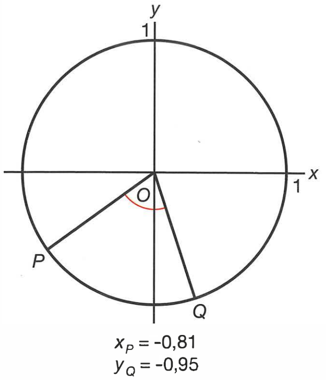
$$= \frac{x^3 \cdot \cos(x) + \sin(x)\cos(x) - 3x^2 \cdot \sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{(x^3 + \sin(x))^2}$$

$$= \frac{x^3 \cdot \cos(x) - 3x^2 \cdot \sin(x)}{(x^3 + \sin(x))^2}$$

Diagnostische toets

7.1 Eenheidscirkel en radiaal

1 In figuur 7.43 is $x_P = \text{-}0{,}81$ en $y_Q = \text{-}0{,}95$.
Bereken $\angle POQ$ in graden. Rond af op één decimaal.



figuur 7.43

2 Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

a 10π rad **b** $\frac{2}{3}\pi$ rad **c** $\frac{2}{3}$ rad

3 Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

a $60°$ **b** $\text{-}150°$ **c** $390°$

4 Geef de exacte waarde.

a $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ **b** $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ **c** $\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right)$

5 Geef de exacte waarden van α met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

a $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ **b** $\sin(\alpha) = \text{-}\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **c** $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

7.2 Goniometrische vergelijkingen

6 Bereken exact de oplossingen.

a $\sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) = 0$ **b** $\cos\left(2x + \frac{1}{6}\pi\right) = 1$ **c** $\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$

7 Bereken exact de oplossingen.

a $\sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **b** $\cos\left(\text{-}\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\pi\right) = \text{-}\frac{1}{2}$ **c** $4\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = 3$

8 Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$.

a $2\sin(2x) = \text{-}\sqrt{3}$ **b** $2\cos\left(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right) = \text{-}\sqrt{2}$ **c** $\sin^2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$

9 Bereken exact de oplossingen.

a $\sin(2x - 1) = \sin(x + 2)$ **b** $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$ **c** $\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \sin\left(\pi(x + 1)\right)$

7.3 Transformaties en functies

10 Geef aan hoe de grafieken van de volgende functies uit een standaardgrafiek ontstaan.

a $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right)$ **b** $g(x) = 5 + \cos\left(\frac{1}{3}(x + 2)\right)$ **c** $h(x) = 1 + 2\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)$

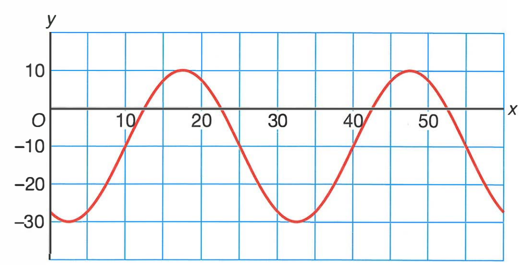
11 Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.
- **a** Schets de grafiek van f.
- **b** Bereken exact de coördinaten van de punten waar de grafiek van f de lijn van de evenwichtsstand snijdt.
- **c** Bereken exact de coördinaten van de twee toppen van de grafiek.
- **d** Bereken exact de nulpunten van f.

12
- **a** Herleid $-\cos\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.
- **b** Herleid $(\sin(x) + \cos(x))^2$.
- **c** Druk $2 + \cos(x) - 2\sin^2(x)$ uit in $\cos(x)$.

7.4 Grafieken van goniometrische functies

13
- **a** Teken de grafiek van $f(x) = 2 - 3\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.
- **b** Teken de grafiek van $g(x) = 4 + \cos\left(2x - 1\frac{2}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.

14 In figuur 7.44 is een sinusoïde getekend. Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
- **a** $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b > 0$
- **b** $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b > 0$
- **c** $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$
- **d** $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b < 0$.



figuur 7.44

15 Gegeven de functie $f(x) = 1 - \tan\left(\frac{1}{4}x\right)$ met domein $[0, 8\pi]$.
- **a** Geef van de grafiek van f een beginpunt, de periode en de asymptoten.
- **b** Schets de grafiek van f.
- **c** Los exact op $f(x) < 0$.

16 Bereken exact de oplossingen.
- **a** $2 + \sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{4}\pi x\right) = -1$
- **b** $\tan\left(\frac{1}{3}x\right) = \tan\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right)$

7.5 Goniometrische functies differentiëren

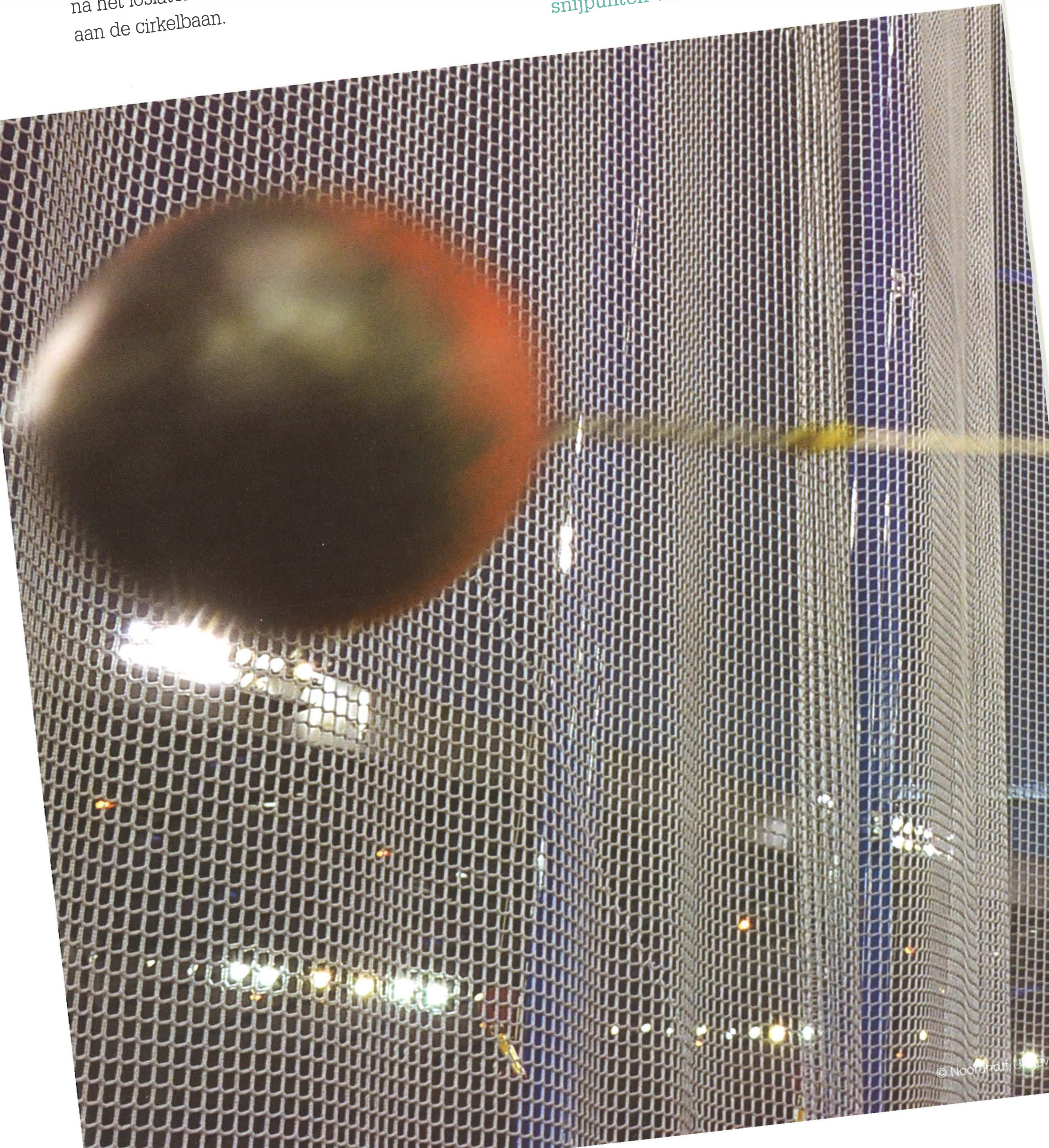
1 Bereken de afgeleide.
- **a** $f(x) = \cos\left(2\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)\right) + \sin(2x)$
- **b** $f(x) = \tan(x^3)$
- **c** $f(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\sin(3x)}$
- **d** $f(x) = x^2\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$
- **e** $f(x) = \sin^3(2x)$
- **f** $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 - \sin(x)}$

18 Gegeven is de functie $f(x) = 3x\cos^2(x)$.
Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = \pi$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in A.

Kogelslingeren is een onderdeel van de atletiek waarbij een kogel zo ver mogelijk moet worden weggeslingerd. De kogel is bevestigd aan een staalkabel met een handvat. Bij de mannen weegt de kogel 7,26 kg en deze wordt met snelheden van ongeveer 100 km/uur weggeslingerd. De kogel beschrijft tijdens het draaien vrijwel een cirkelbaan en vliegt na het loslaten weg volgens een raaklijn aan de cirkelbaan.

Wat leer je?

- Berekenen van hoeken tussen lijnen waarvan vergelijkingen zijn gegeven.
- Werken met vergelijkingen en parametervoorstellingen van cirkels.
- Berekenen van afstanden tussen punten, lijnen en cirkels in een assenstelsel.
- Opstellen van een vergelijking van een raaklijn aan een cirkel.
- Berekenen van de coördinaten van de snijpunten van een lijn met een cirkel.



Meetkunde met coördinaten

8

Voorkennis Stelsels en kwadraatafsplitsen

Theorie A Stelsels lineaire vergelijkingen

Het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ kun je oplossen met behulp van elimineren door optellen of aftrekken.

Om y te elimineren vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 2 en de tweede met 3. Daarna tel je de vergelijkingen bij elkaar op.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 6y = 20 \\ 3x + 6y = 18 \end{cases} +$$

$$7x = 38$$

$$\left.\begin{matrix} x = \frac{38}{7} = 5\frac{3}{7} \\ x + 2y = 6 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 5\frac{3}{7} + 2y = 6 \\ 2y = \frac{4}{7} \\ y = \frac{2}{7} \end{matrix}$$

De oplossing is $(x,y) = \left(5\frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

Je kunt bij dit stelsel ook x elimineren. Dat gaat als volgt.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases} -$$

$$-7y = -2$$

$$\left.\begin{matrix} y = \frac{2}{7} \\ x + 2y = 6 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x + 2 \cdot \frac{2}{7} = 6 \\ x + \frac{4}{7} = 6 \\ x = 5\frac{3}{7} \end{matrix}$$

8

1 Los op.

a $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

Theorie B Kwadraatafsplitsen

Om bij de vorm $x^2 - 4x$ een kwadraat af te splitsen vul je eerst $x^2 - 4x$ aan tot een kwadraat.
Je krijgt $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$.
Bij $y^2 + 6y$ krijg je $y^2 + 6y = y^2 + 6y + 9 - 9 = (y+3)^2 - 9$.
Dus bij $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ krijg je

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$
$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 3 = 0$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

Om in het voorbeeld hieronder het kwadraat af te splitsen bij $x^2 + 18x$ vul je $x^2 + 18x$ eerst aan tot $(x+a)^2$.
Omdat $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ is $2ax = 18x$, dus is a de helft van 18. Je krijgt $x^2 + 18x = x^2 + 18x + 81 - 81 = (x+9)^2 - 81$.

En omdat de helft van -3 gelijk is aan $-1\frac{1}{2}$, krijg je
$y^2 - 3y = y^2 - 3y + \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4}$.

Voorbeeld

Schrijf $x^2 + y^2 + 18x - 3y + 6 = 0$ in de vorm $(x+a)^2 + (y+b)^2 = c$.

Uitwerking
$x^2 + y^2 + 18x - 3y + 6 = 0$
$x^2 + 18x + y^2 - 3y + 6 = 0$
$(x+9)^2 - 81 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$
$(x+9)^2 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 = 77\frac{1}{4}$

8

2 Schrijf in de vorm $(x+a)^2 + (y+b)^2 = c$.
- **a** $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$
- **b** $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 13 = 0$
- **c** $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
- **d** $x^2 + y^2 - 5x + 5y + 10 = 0$

8.1 Lijnen en hoeken

In paragraaf 8.5 Meetkunde met GeoGebra wordt georiënteerd op een aantal aspecten van dit hoofdstuk. Je kunt deze paragraaf op dit moment in een keer doornemen of in delen, passend bij de aangeboden onderwerpen.

O 1 Gegeven zijn de lijnen k: $2x + 3y = 12$ en l: $4x + 6y = 15$.

a Teken de lijnen k en l in één figuur.

b Hoe volgt uit vraag a dat het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 15 \end{cases}$ geen oplossing heeft?

c Hoe kun je aan de formules van k en l zien dat de lijnen evenwijdig zijn?

Theorie A Strijdige en afhankelijke stelsels

De lijnen k: $2x - 3y = 5$ en l: $4x - 6y = 7$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt en vallen niet samen.
Ook zonder y vrij te maken kun je zien dat k en l evenwijdig zijn, omdat $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$.
Omdat je met evenwijdige en niet-samenvallende lijnen te maken hebt, heeft het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 7 \end{cases}$ geen oplossing.

We noemen de vergelijkingen van het stelsel **strijdig**.

k: $2x - 3y = 5$
$-3y = -2x + 5$
$y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$
l: $4x - 6y = 7$
$-6y = -4x + 7$
$y = \frac{2}{3}x - 1\frac{1}{6}$
Dus $rc_k = rc_l$.

De lijnen k: $2x - 3y = 5$ en m: $4x - 6y = 10$ zijn niet alleen evenwijdig, maar ze vallen ook samen.

Het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ heeft oneindig veel oplossingen.

We noemen de vergelijkingen van het stelsel **afhankelijk**.

De lijnen k: $ax + by = c$ en l: $px + qy = r$

- **zijn evenwijdig en vallen niet samen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$**
  de vergelijkingen $ax + by = c$ en $px + qy = r$ zijn dan strijdig
- **vallen samen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$**
  de vergelijkingen $ax + by = c$ en $px + qy = r$ zijn dan afhankelijk.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen k_p: $px + (p + 1)y = 5$ en $l_{p,q}$: $(p - 1)x + (p - 3)y = q$.

Bereken algebraïsch voor welke p en q

a de lijnen k_p en $l_{p,q}$ evenwijdig zijn

b de lijnen k_p en $l_{p,q}$ samenvallen.

Uitwerking

a $k_p \,//\, l_{p,q}$, dus $\frac{p}{p-1} = \frac{p+1}{p-3}$

$p(p - 3) = (p - 1)(p + 1)$

$p^2 - 3p = p^2 - 1$

$-3p = -1$

$p = \frac{1}{3}$

Dus voor $p = \frac{1}{3}$ en q kan elk getal van $\mathbb{R}$ zijn.

b $p = \frac{1}{3}$ geeft $k_{\frac{1}{3}}$: $\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}y = 5$ en $l_{\frac{1}{3},q}$: $-\frac{2}{3}x - 2\frac{2}{3}y = q$.

Voor samenvallen geldt $\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{1\frac{1}{3}}{-2\frac{2}{3}} = \frac{5}{q}$ ofwel $\frac{1}{-2} = \frac{5}{q}$, dus $q = -10$.

Dus voor $p = \frac{1}{3}$ en $q = -10$.

2 Gegeven zijn de lijnen k_p: $3x + py = 5$ en $l_{p,q}$: $(p - 1)x + (p + 4)y = q$.
Bereken algebraïsch voor welke p en q

a de lijnen k_p en $l_{p,q}$ evenwijdig zijn

b de lijnen k_p en $l_{p,q}$ samenvallen.

8

A 3 De lijnen $k_{p,q}$: $px + qy = 4$ en $l_{p,q}$: $(q + 3)x + (p - 1)y = 1$ vallen samen.
Bereken p en q.

O 4 Gegeven is $x = 3t + 4$ en $y = -2t + 1$.

a Vul de volgende tabel in, teken de punten (x, y) die uit de tabel volgen en ga na dat deze punten op één lijn liggen.

t	-2	-1	0	1
x				
y				

b Elimineer t uit het stelsel $\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = -2t + 1 \end{cases}$

c Hoe volgt uit vraag b dat je bij $x = 3t + 4$ en $y = -2t + 1$ met een lijn te maken hebt?

Bij het onderwerp parametervoorstellingen horen de paragrafen 8.5A en 8.5B waar je werkt met GeoGebra.

Theorie B De parametervoorstelling van een lijn

Door bij het stelsel $\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 3t - 4 \end{cases}$ de variabele t te elimineren kun je zien dat je met een lijn te maken hebt.

Je krijgt $\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 3t - 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x = 6t - 15 \\ 2y = 6t - 8 \end{cases}$ $-$

$3x - 2y = -7$

Dus de lijn heeft de vergelijking $3x - 2y = -7$.
We noemen $x = 2t - 5 \wedge y = 3t - 4$ een **parametervoorstelling van de lijn**. De **parameter** is t.
De lijn $3x - 2y = -7$ heeft oneindig veel parametervoorstellingen.
Neem je bijvoorbeeld $x = 4t - 1$ dan krijg je $3(4t - 1) - 2y = -7$

$$12t - 3 - 2y = -7$$
$$-2y = -12t - 4$$
$$y = 6t + 2$$

Dus ook $x = 4t - 1 \wedge y = 6t + 2$ is een parametervoorstelling (pv) van de lijn $3x - 2y = -7$.

$x(t) = at + c \wedge y(t) = bt + d$ met a en b niet beide nul is een parametervoorstelling van een lijn.
Door t te elimineren krijg je een vergelijking van de lijn.

8

R 5 Toon aan dat de richtingscoëfficiënt van de lijn die gegeven is door de parametervoorstelling $x(t) = at + c \wedge y(t) = bt + d$ gelijk is aan $\frac{b}{a}$.

6 **a** Bereken voor welke waarde van p de lijn $\begin{cases} x(t) = 5t + p \\ y(t) = 4t + 3 \end{cases}$ de vergelijking $4x - 5y = -10$ heeft.

b Bereken voor welke waarde van p de lijn $\begin{cases} x(t) = 2t + p \\ y(t) = -t - 2p \end{cases}$ door het punt (5, 2) gaat.

c Bereken voor welke waarde van p de lijn $\begin{cases} x(t) = 3t + p \\ y(t) = 2t + 3 \end{cases}$ de vergelijking $2x - 3y = p$ heeft.

A 7 Gegeven zijn de lijnen k: $\begin{cases} x(t) = at - 3 \\ y(t) = bt + 1 \end{cases}$ en l: $2x + 5y = c$.
Bereken mogelijke waarden voor a, b en c zo, dat
a k en l elkaar snijden in het punt (3, 4)
b k en l samenvallen.

O8 Gegeven is de lijn l: $2x + 3y = 18$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x-as en de y-as.

b Licht toe dat de vergelijking $2x + 3y = 18$ ook kan worden geschreven als $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$.

c Hoe kun je in de vorm $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$ de coördinaten van de snijpunten van l met de assen herkennen?

O9 Gegeven is de lijn $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

a Toon aan dat de lijn de x-as snijdt in het punt $(a, 0)$.

b Toon aan dat de lijn de y-as snijdt in het punt $(0, b)$.

Theorie C De assenvergelijking van een lijn

De lijn k: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijdt de x-as in het punt $(a, 0)$ en de y-as in het punt $(0, b)$. Dit gebruik je om een vergelijking van een lijn op te stellen als de coördinaten van de snijpunten van de lijn met de assen gegeven zijn. De vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ heet de **assenvergelijking** van de lijn.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijden met de x-as, dus $y = 0$, geeft
$\frac{x}{a} = 1$
$x = a$
snijpunt $(a, 0)$

Snijdt de lijn l de assen in de punten $(4, 0)$ en $(0, -5)$, dan krijg je l: $\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$.
Na vermenigvuldigen met 20 krijg je l: $5x - 4y = 20$.

De lijn door de punten $(a, 0)$ en $(0, b)$ heeft de vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ met $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Heb je te maken met de lijn k door de punten $(-1, 0)$ en $(0, 2)$ en de lijn l door de punten $(3, 0)$ en $(0, 4)$, dan krijg je k: $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$ ofwel k: $2x - y = -2$ en l: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ofwel l: $4x + 3y = 12$.
Om het snijpunt van de lijnen k en l te berekenen los je het stelsel $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$ op.

8

Voorbeeld

De lijn k snijdt de x-as in het punt $(6, 0)$ en de y-as in het punt $(0, q)$.

a Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.

b Bereken q in het geval het punt $(4, -1)$ op k ligt.

c Voor welke waarde van q is k evenwijdig met de lijn $l: y = 3x + 2$?

Uitwerking

a $k: \frac{x}{6} + \frac{y}{q} = 1$ — Vermenigvuldig alle termen met $6q$.

Dus $k: qx + 6y = 6q$.

b $(4, -1)$ op k geeft $q \cdot 4 + 6 \cdot -1 = 6q$

$$4q - 6 = 6q$$
$$-2q = 6$$
$$q = -3$$

c $k: qx + 6y = 6q$ en $l: 3x - y = -2$

$k \,//\, l$ geeft $\frac{q}{3} = \frac{6}{-1}$

$$-q = 18$$
$$q = -18$$

T 10 [▶▶14]

a De lijn k gaat door de punten $(4, 0)$ en $(0, -7)$.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

b De lijn l gaat door de punten $(2p, 0)$ en $(0, -p)$.
Stel van l een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

c De lijn m snijdt de x-as in het punt $(q, 0)$ en de y-as in het punt $(0, 5)$.
Bereken q in het geval het punt $(3, -1)$ op m ligt.

8

11 De lijn k gaat door de punten $(2, 0)$ en $(0, -1)$.
De lijn l gaat door de punten $(5, 0)$ en $(0, -3)$.

a Stel van k en van l een vergelijking op.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van k en l.

12 Stel een assenvergelijking op van de lijn en schrijf de vergelijking vervolgens in de vorm $ax + by = c$.

a l door $(p, 0)$ en $(0, 5)$

b m door $(4, 0)$ en $(0, q)$

c n door $(3r, 0)$ en $(0, r)$

13 De lijn k snijdt de x-as in het punt $(p, 0)$ en de y-as in het punt $(0, 8)$.

a Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.

b Bereken p in het geval het punt $(1, 2)$ op k ligt.

c Voor welke p is k evenwijdig met de lijn $l: y = 2x + 3$?

A 14 De lijn k snijdt de assen in de punten $(3, 0)$ en $(0, p)$ en de lijn l snijdt de assen in de punten $(2p, 0)$ en $(0, 5)$.

a Stel van k en van l een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$.

b Voor welke p ligt het punt $A(1, 2)$ op k? En voor welke p op l?

c Voor welke p is de lijn k evenwijdig met de lijn m: $y = 4x + 5$?

d Voor welke p is de lijn l evenwijdig met de lijn n: $2x + 3y = 10$?

R 15 **a** Jan zegt dat met de vergelijking $y = ax + 3$ alle lijnen door $(0, 3)$ zijn gegeven.

Harm zegt dat met de vergelijking $\frac{x}{p} + \frac{y}{3} = 1$ alle lijnen door $(0, 3)$ zijn gegeven.

Volgens Gerrit mist Jan één lijn en mist Harm twee lijnen.

Welke lijnen bedoelt Gerrit? Licht toe.

b Door de lijnen door $(4, 0)$ te noteren als $y = a(x - 4)$ mis je één lijn. Welke?

c Door de lijnen door $(4, 0)$ te noteren als $\frac{x}{4} + \frac{y}{p} = 1$ mis je twee lijnen. Welke?

16 Gegeven zijn de lijnen k_p: $px + 2y = 8$.

Voor welke p

a gaat de lijn door het punt $(3, 5)$

b snijdt de lijn de x-as in het punt $(3, 0)$

c is de lijn evenwijdig met de lijn $3x + 5y = 10$

d is de lijn evenwijdig met de lijn $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$?

A 17 Gegeven zijn de lijnen l_p: $\frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1$.

Voor welke p

a gaat de lijn door het punt $(3, 4)$

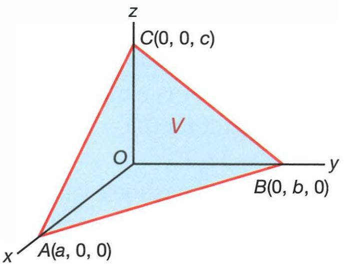
b is de richtingscoëfficiënt van de lijn gelijk aan 2?

8

Informatief De assenvergelijking van een vlak

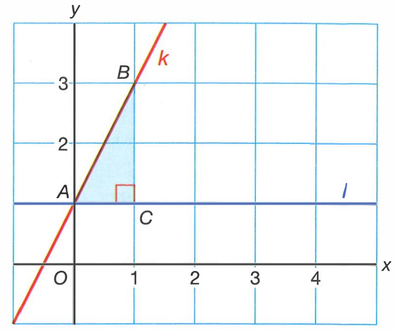
Om in de ruimte de coördinaten van een punt vast te leggen wordt gewerkt met een $Oxyz$-assenstelsel. Dit wordt meestal getekend zoals in de figuur hiernaast.

In dit assenstelsel is een vlak V getekend dat de x-as snijdt in het punt $A(a, 0, 0)$, de y-as in het punt $B(0, b, 0)$ en de z-as in het punt $C(0, 0, c)$. De assenvergelijking van dit vlak is V: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.



O 18 In figuur 8.1 zijn de lijnen k: $y = 2x + 1$ en l: $y = 1$ getekend.
Het punt $A(0, 1)$ is het snijpunt van k en l, het punt $B(1, 3)$ ligt op k en het punt $C(1, 1)$ ligt op l.
Er geldt $\angle CAB \approx 63{,}435°$.

a Toon dit aan.

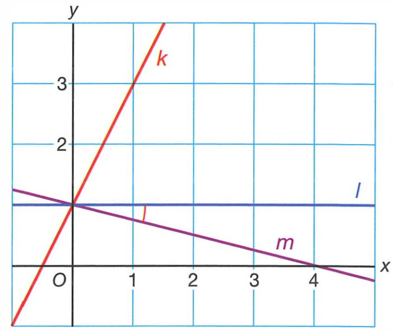


figuur 8.1

In figuur 8.2 is bovendien de lijn m: $y = -\frac{1}{4}x + 1$ getekend. De hoek tussen l en m is met een boogje aangegeven. Deze hoek is ongeveer 14,036°.

b Toon dit aan.

c Bereken de hoek tussen de lijnen k en m in één decimaal nauwkeurig.



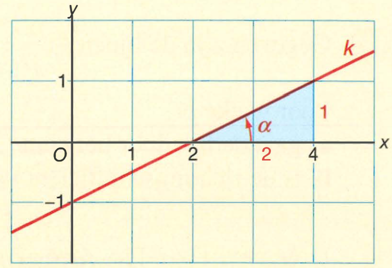
figuur 8.2

Theorie D De hoek tussen twee lijnen

In figuur 8.3 is de lijn k: $y = \frac{1}{2}x - 1$ getekend. De **richtingshoek** van deze lijn is de hoek α waarover de x-as moet draaien om samen te vallen met k. Hierbij is $-90° < \alpha \leq 90°$.

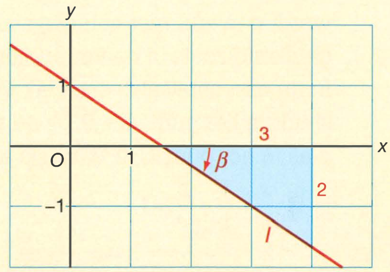
Je ziet dat $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ en dit geeft $\alpha \approx 26{,}6°$.

Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = rc_k$ en $-90° < \alpha \leq 90°$.



figuur 8.3

De richtingshoek van de lijn l: $y = -\frac{2}{3}x + 1$ in figuur 8.4 is aangegeven met β.
Er geldt $\tan(\beta) = rc_l$, dus $\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$ en dit geeft $\beta \approx -33{,}7°$.
De richtingshoek van de lijn l is dus negatief.

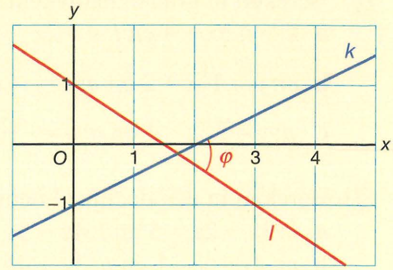


figuur 8.4

Bij berekeningen met richtingshoeken nemen we aan dat de eenheden op de assen gelijk zijn.

In figuur 8.5 zijn zowel de lijn $k: y = \frac{1}{2}x - 1$ als de lijn $l: y = -\frac{2}{3}x + 1$ getekend.
De **hoek tussen de lijnen** k en l is aangegeven met φ.
Hier is $\varphi = \alpha - \beta \approx 26{,}6° - -33{,}7° = 26{,}6° + 33{,}7° \approx 60°$.

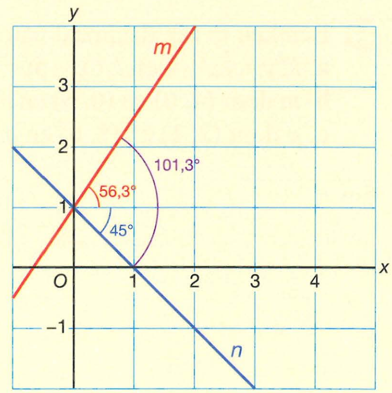
Voor de hoek φ tussen twee lijnen nemen we altijd de hoek waarvoor geldt $0° \leq \varphi \leq 90°$.



figuur 8.5

In figuur 8.6 heb je te maken met de lijnen $m: y = 1\frac{1}{2}x + 1$ en $n: y = -x + 1$.
Voor de richtingshoek α van m geldt $\tan(\alpha) = 1\frac{1}{2}$, dus $\alpha = 56{,}30...°$ en voor de richtingshoek β van n geldt $\tan(\beta) = -1$, dus $\beta = -45°$.
Omdat $\alpha - \beta = 56{,}30...° - -45° \approx 101{,}3°$ geldt voor de hoek φ tussen m en n dat $\varphi \approx 180° - 101{,}3° = 78{,}7°$.

Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β, waarbij $\alpha > \beta$, geldt
$\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90°$
$\varphi = 180° - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90°$.



figuur 8.6

Voorbeeld

Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $k: 2x - 3y = 5$ en $l: 5x + 2y = 3$.

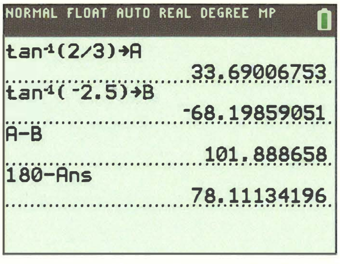
Uitwerking

$2x - 3y = 5$
$-3y = -2x + 5$
$y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$, dus $\text{rc}_k = \frac{2}{3}$
$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33{,}69...°$

$5x + 2y = 3$
$2y = -5x + 3$
$y = -2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_l = -2\frac{1}{2}$

$\tan(\beta) = -2\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -68{,}19....°$

$\alpha - \beta = 33{,}69...° - -68{,}19...° \approx 102°$
De gevraagde hoek is $180° - 102° = 78°$.



R 19 Om de hoek te berekenen waaronder lijnen elkaar snijden, wordt aangenomen dat de eenheden op de assen gelijk zijn.
Licht toe dat deze aanname nodig is.

8

20 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.

a k: $y = 3x + 4$ en l: $y = 2x - 1$

b m: $y = 1\frac{1}{2}x + 2$ en n: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

c p: $y = 3\frac{1}{2}x - 1$ en q: $y = -1\frac{1}{4}x + 5$

21 Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.

a k: $3x - 2y = 5$ en l: $4x - 3y = 6$

b m: $4x + y = 1$ en n: $3x + 4y = 2$

c p: $5x + 3y = 4$ en q: $6x - 5y = 1$

A 22 Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.

a k: $y = \frac{2}{3}x + 4$ en l: $6x - 5y = 3$

b m door $(4, 0)$ en $(0, 5)$ en n door $(-2, 0)$ en $(0, 1)$

c p door $(2, 1)$ en $(5, 6)$ en q door $(-3, 1)$ en $(2, -6)$

8

Terugblik

Strijdige en afhankelijke stelsels

De vergelijkingen in het stelsel $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$ zijn

strijdig als geldt $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ en afhankelijk als geldt $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$.

Zo heb je bij het stelsel $\begin{cases} 2x - 6y = 13 \\ 5x - 15y = 29 \end{cases}$ met strijdige vergelijkingen te maken. Het stelsel heeft geen oplossing, de lijnen k: $2x - 6y = 13$ en l: $5x - 15y = 29$ zijn evenwijdig en vallen niet samen.

De lijnen k: $2x - 6y = 13$ en m: $5x - 15y = 32\frac{1}{2}$ vallen samen omdat geldt $\frac{2}{5} = \frac{-6}{-15} = \frac{13}{32\frac{1}{2}}$.

De parametervoorstelling van een lijn

Een lijn kan worden genoteerd met een parametervoorstelling (pv) van de vorm $x(t) = at + c \wedge y(t) = bt + d$.

Zo is $\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$ een pv van de lijn met vergelijking $2x - 3y = 11$. Dit is te controleren door uit de pv de variabele t te elimineren.

Bij de vergelijking $2x - 3y = 11$ zijn oneindig veel parametervoorstellingen te geven.
Neem je bijvoorbeeld $x = -6t + 1$ dan krijg je $2(-6t + 1) - 3y = 11$ en dit geeft $y = -4t - 3$.
Dus ook $x = -6t + 1 \wedge y = -4t - 3$ is een pv van de lijn $2x - 3y = 11$.

De assenvergelijking van een lijn

De vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ heet de assenvergelijking van een lijn.

De lijn snijdt de assen in de punten $(a, 0)$ en $(0, b)$.
Snijdt de lijn k de assen in de punten $(5, 0)$ en $(0, -6)$, dan hoort hierbij de vergelijking

$\frac{x}{5} + \frac{y}{-6} = 1$ ofwel $6x - 5y = 30$.

De hoek tussen twee lijnen

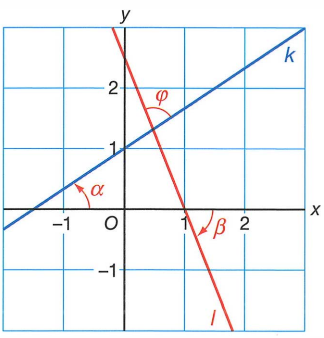
Voor de richtingshoek α van een lijn l geldt $-90° < \alpha \leq 90°$ en $\tan(\alpha) = \text{rc}_l$.

De lijn k: $y = \frac{2}{3}x + 1$ in de figuur hiernaast heeft richtingshoek α.

Er geldt $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ en dit geeft $\alpha \approx 33{,}69°$.

De lijn l: $y = -2\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ heeft richtingshoek β. Er geldt

$\tan(\beta) = -2\frac{1}{2}$ en dit geeft $\beta \approx -68{,}20°$.



De hoek tussen k en l is in de figuur aangegeven met φ.
De hoek tussen de lijnen is de niet-stompe hoek tussen de lijnen.
Omdat $\alpha - \beta \approx 33{,}69° - -68{,}20° = 101{,}89°$ is
$\varphi \approx 180° - 101{,}89° \approx 78°$.

8

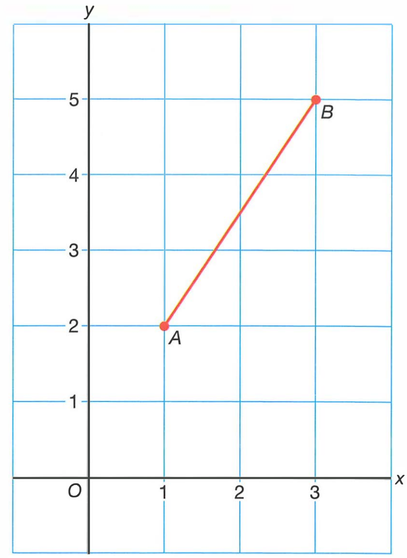
8.2 Afstanden bij punten en lijnen

O 23 Gegeven zijn de punten $A(1, 2)$ en $B(3, 5)$.
Zie figuur 8.7.

a Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.

b Het punt M is het midden van het lijnstuk AB.
Geef de coördinaten van M.

c Gegeven zijn de punten $C(83, 61)$ en $D(89, 69)$.
Geef de coördinaten van het midden N van het lijnstuk CD.

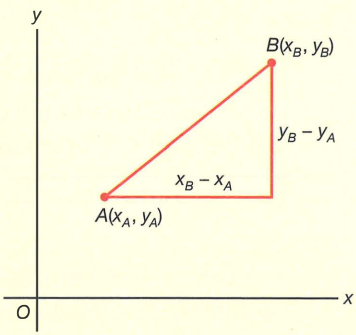


figuur 8.7

Theorie A De afstand tussen twee punten

De afstand tussen twee meetkundige figuren is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen die figuren.
De afstand tussen de punten A en B is dus de lengte van het lijnstuk AB. Voor de lengte van het lijnstuk AB bestaat de notatie $d(A, B)$.
In deze notatie is de letter d van distance (afstand) gebruikt.
In figuur 8.8 zijn de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ getekend. Met de stelling van Pythagoras in de getekende driehoek vind je $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, dus de afstand tussen de punten A en B is

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



figuur 8.8

Om de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB te berekenen, neem je het gemiddelde van de x-coördinaten van A en B en het gemiddelde van de y-coördinaten van A en B. Zo krijg je $M(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$.

Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt

- **de afstand tussen A en B is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$**
- **de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB zijn $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M + \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.**

8

Voorbeeld

Voor $q > 0$ zijn gegeven de punten $A(0, q)$ en $B(q, 5)$.

a Druk de afstand tussen de punten A en B uit in q.

b Bereken exact de minimale afstand tussen A en B.

c Bereken vanaf welke waarde van q de afstand tussen A en B groter is dan 7. Rond af op twee decimalen.

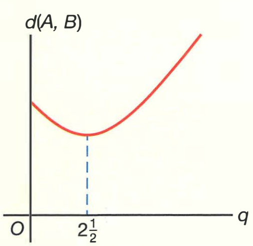
Uitwerking

a $d(A,B) = \sqrt{(q-0)^2 + (5-q)^2} = \sqrt{q^2 + 25 - 10q + q^2} = \sqrt{2q^2 - 10q + 25}$

b $d(A,B) = d(q) = \sqrt{2q^2 - 10q + 25}$ geeft

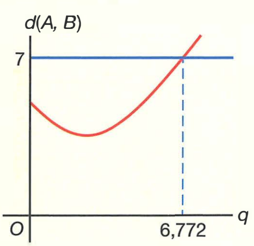
$$d'(q) = \frac{1}{2\sqrt{2q^2 - 10q + 25}} \cdot (4q - 10) = \frac{2q - 5}{\sqrt{2q^2 - 10q + 25}}$$

$$\begin{aligned} d'(q) = 0 \text{ geeft } 2q - 5 &= 0 \\ 2q &= 5 \\ q &= 2\tfrac{1}{2} \\ &\text{vold.} \end{aligned}$$



De minimale afstand is $q\left(2\frac{1}{2}\right) = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c Voer in $y_1 = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$ en $y_2 = 7$.
Intersect geeft $x \approx 6{,}772$.



Dus vanaf $q = 6{,}78$. ← Let op met afronden.

24 Voor $p > 0$ zijn gegeven de punten $A(p, 3)$ en $B(p + 2, 2p)$.

a Druk de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB uit in p.

b Druk de afstand tussen A en B uit in p.

c Bereken exact de minimale afstand tussen A en B.

d Bereken vanaf welke waarde van p de afstand tussen A en B groter is dan 5. Rond af op twee decimalen.

25 Voor $p > 0$ en $q > 0$ zijn gegeven de punten $A(0, p)$ en $B(p + q, q)$.
Voor de afstand d tussen de punten A en B geldt $d = \sqrt{2p^2 + 2q^2}$.

a Toon dit aan.

b Voor $q = 2p$ is de formule van d te schrijven in de vorm $d = p\sqrt{c}$.
Bereken c.

c Er geldt $q = \sqrt{p}$ en $d = 12$.
Bereken p algebraïsch.

A 26 Gegeven zijn de punten $A(3, 4)$ en $B(p + 5, p + 2)$.

a Bereken voor welke waarde van p het midden M van het lijnstuk AB op de lijn $k: y = 2x - 3$ ligt.

De afstand d tussen de punten A en B is te schrijven in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + b}$.

b Bereken a en b.

c Bereken exact de minimale afstand tussen de punten B en $C(2p, 3p)$.

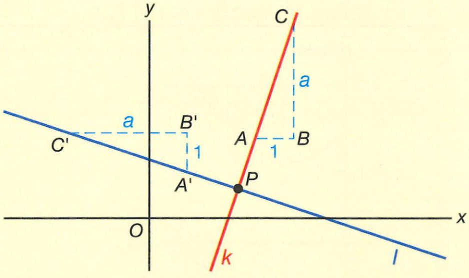
O 27 Bereken de hoek tussen de lijnen $k: y = 2x - 2$ en $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Theorie B Onderling loodrechte lijnen

In opgave 27 heb je gezien dat de lijnen k met $\text{rc}_k = 2$ en l met $\text{rc}_l = -\frac{1}{2}$ loodrecht op elkaar staan.
Ook de lijnen m met $\text{rc}_m = 5$ en n met $\text{rc}_n = -\frac{1}{5}$ staan loodrecht op elkaar.

In het algemeen staan de lijnen k en l met $\text{rc}_k = a$ en $\text{rc}_l = -\frac{1}{a}$ loodrecht op elkaar.

Dus als $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, dan staan de lijnen k en l loodrecht op elkaar.



figuur 8.9 $k \perp l$ omdat $\text{rc}_k = a$ en $\text{rc}_l = -\frac{1}{a}$.

Als voor de lijnen k en l geldt $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, dan staan de lijnen loodrecht op elkaar.

8

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn k die door het punt $A(6, 5)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $l: y = 4x - 1$.

Uitwerking
Stel $k: y = ax + b$.

$$\left.\begin{array}{l} k \perp l \text{, dus } rc_k \cdot rc_l = -1 \\ rc_l = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} rc_k \cdot 4 = -1 \\ rc_k = -\frac{1}{4} \text{, dus } a = -\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(6, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 6 + b = 5 \\ -1\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = 6\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{4}x + 6\frac{1}{2}$.

28 Stel een vergelijking op van de lijn
- **a** k die door het punt $A(6, 7)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $l: y = 3x - 2$
- **b** m die door het punt $B(-3, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $n: y = \frac{1}{2}x + 2$
- **c** p die door het punt $C(2, -5)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $q: y = -\frac{2}{7}x + 3$.

29 Gegeven is de lijn $k: 2x - 3y = 5$.
Elke lijn met een vergelijking van de vorm $3x + 2y = c$ staat loodrecht op k.
- **a** Toon dit aan.
- **b** De lijn l gaat door het punt $A(4, 1)$ en staat loodrecht op k.
  Stel van l een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- **c** De lijn m gaat door het punt $B(3, -1)$ en staat loodrecht op de lijn $n: 4x + 5y = 6$.
  Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

R 30 Toon aan dat de lijn $k: ax + by = c$ loodrecht staat op de lijn $l: bx - ay = d$.

De lijn $k: ax + by = c$ staat loodrecht op de lijn $l: bx - ay = d$.

31 De lijn k gaat door de punten $(3, 0)$ en $(0, 5)$.
- **a** Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- **b** De lijn l gaat door het punt $A(2, -4)$ en staat loodrecht op k.
  Stel van l een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- **c** De lijn m gaat door de punten $(p, 0)$ en $(0, 2p)$.
  De lijn n gaat door het punt $B(5, -3)$ en staat loodrecht op m.
  Stel van n een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

8

32 De lijn k gaat door de punten $A(2, 3)$ en $B(7, 5)$.

a Stel van k de vergelijking op in de vorm $y = ax + b$.

b De lijn l gaat door het punt $C(4, 6)$ en staat loodrecht op k.
Stel van l een vergelijking op.

c De lijn m gaat door de punten $D(-3, 4)$ en $E(2, -5)$.
De lijn n gaat door het punt $F(3, 7)$ en staat loodrecht op m.
Stel van n een vergelijking op.

A 33 Stel een vergelijking op van de lijn

a k die door het punt $A(6, 15)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l: $y = -\frac{3}{5}x + 1$

b m die door het punt $B(2, -2)$ gaat en loodrecht staat op de lijn n: $6x - 7y = 3$

c p die door het punt $C(-5, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn door de punten $(-4, 0)$ en $(0, 3)$

d q die door het punt $D(-6, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn door de punten $E(1, 5)$ en $F(5, -1)$.

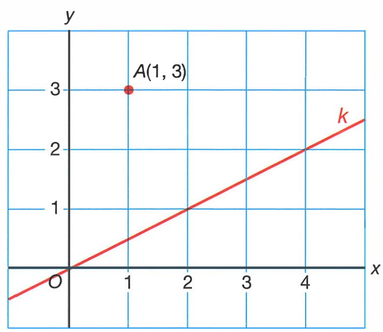
D 34 In deze opgave is $p \neq 0$ en $q \neq 0$.
De lijn k door de punten $(2p, 0)$ en $(0, 3p)$ staat loodrecht op de lijn l door de punten $(3q, 0)$ en $(0, aq)$.
Bereken a.

O 35 Gegeven is de lijn k: $y = \frac{1}{2}x$ en het punt $A(1, 3)$.
Zie figuur 8.10.
De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k.
De lijnen k en l snijden elkaar in het punt B.

a Toon aan dat B het punt $(2, 1)$ is.

De afstand van A tot k is de lengte van het lijnstuk AB.

b Bereken exact de afstand van A tot k.

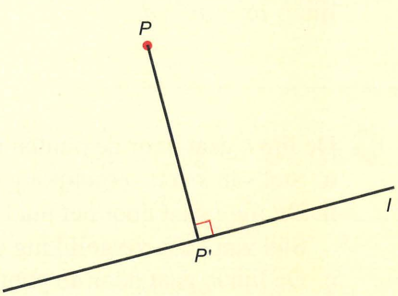


figuur 8.10

Bij het onderwerp De afstand van een punt tot een lijn hoort paragraaf 8.5C waar je werkt met GeoGebra.

Theorie C De afstand van een punt tot een lijn

Bij de afstand van een punt tot een lijn speelt het begrip **loodrechte projectie** een rol.
In figuur 8.11 is P' de loodrechte projectie van het punt P op de lijn l.
De afstand van het punt P tot de lijn l is gelijk aan de lengte van het lijnstuk PP'. Notatie $d(P, l) = PP'$.
Voor de berekening van de afstand van een punt tot een lijn gebruiken we het werkschema op de volgende bladzijde.



figuur 8.11 De afstand van een punt P tot een lijn l is de afstand van P tot zijn loodrechte projectie P' op l.

Werkschema: het berekenen van de afstand van het punt A tot de lijn k

1 Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k.
2 Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l.
3 Gebruik $d(A, k) = d(A, B)$.

Voorbeeld

Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn $k: 3x + 2y = 12$.

Uitwerking
De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} l: 2x - 3y = c \\ A(5, 5) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5$$

Dus $l: 2x - 3y = -5$.
k en l snijden geeft

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 6y = 36 \\ 4x - 6y = -10 \end{cases} +$$

$$13x = 26$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 2y = 12 \\ 2y = 6 \\ y = 3 \end{array}$$

Dus het snijpunt van k en l is $B(2, 3)$.
$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

36 Bereken exact de afstand van
- **a** het punt $A(3, 0)$ tot de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 1$
- **b** het punt $B(6, 0)$ tot de lijn $l: 2x + y = 2$
- **c** de oorsprong tot de lijn $m: y = -3x + 10$
- **d** de oorsprong tot de lijn $n: 3x - 4y = 12$.

8

37 Bereken in twee decimalen nauwkeurig de afstand van het punt $A(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ tot de lijn door de punten $B(2, 1)$ en $C(7, 3)$.

38 Gegeven zijn de lijnen $k: x + 3y = 3$ en $l: x + y = 9$.
Onderzoek met een berekening of het punt $A(1, 4)$ dichter bij k dan bij l ligt.

A 39 Gegeven is $\triangle ABC$ met de punten $A(1, 0)$, $B(7, 4)$ en $C(3\frac{1}{2}, 6)$.
- **a** Bereken exact de afstand van het punt C tot de lijn door de punten A en B.
- **b** Bereken algebraïsch de oppervlakte van $\triangle ABC$.

Terugblik

De afstand tussen twee punten

Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt

- de afstand tussen A en B is $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB zijn $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.

Voor de punten $A(p, 3p)$ en $B(2p, p + 6)$ geldt dus

- het midden M is $M\left(\frac{1}{2}(p + 2p), \frac{1}{2}(3p + p + 6)\right) = M(1\frac{1}{2}p, 2p + 3)$
- $d(A,B) = \sqrt{(2p - p)^2 + (p + 6 - 3p)^2} = \sqrt{p^2 + (6 - 2p)^2}$
  $= \sqrt{p^2 + 36 - 24p + 4p^2} = \sqrt{5p^2 - 24p + 36}$.

De minimale afstand tussen de punten A en B krijg je door de vergelijking $d'(p) = 0$ op te lossen. $d'(p) = \dfrac{5p - 12}{\sqrt{5p^2 - 24p + 36}} = 0$ geeft $p = 2\frac{2}{5}$ en de minimale afstand is $1\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

Onderling loodrechte lijnen

Als voor de lijnen k en l geldt $\mathrm{rc}_k \cdot \mathrm{rc}_l = -1$, dan staan de lijnen loodrecht op elkaar.
De lijnen m: $4x + 3y = 1$ en n: $3x - 4y = 2$ staan loodrecht op elkaar, want $\mathrm{rc}_m \cdot \mathrm{rc}_n = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -1$.
Je krijgt de formule van de lijn k die door het punt $A(5, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l door de punten $B(-1, 3)$ en $C(5, -2)$ als volgt.

$$\mathrm{rc}_l = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - 3}{5 - -1} = -\frac{5}{6}, \text{ dus } \mathrm{rc}_k = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

$$\left.\begin{array}{l} k{:}\ y = 1\frac{1}{5}x + b \\ \text{door } A(5,4) \end{array}\right\} \ 1\frac{1}{5} \cdot 5 + b = 4, \text{ dus } b = -2 \text{ en } k{:}\ y = 1\frac{1}{5}x - 2.$$

> De lijn q door het punt $S(4, -3)$ die loodrecht staat op de lijn p: $2x - 5y = 1$ is van de vorm $5x + 2y = c$.
> $c = 5 \cdot 4 + 2 \cdot -3 = 14$,
> dus q: $5x + 2y = 14$.

De afstand van een punt tot een lijn

De afstand van een punt P tot een lijn l is de afstand tot zijn loodrechte projectie P' op l.
Om de afstand van het punt $A(2, 5)$ tot de lijn k: $y = \frac{1}{3}x + 1$ te berekenen ga je als volgt te werk.

1. Stel een vergelijking op van de lijn l door $A(2, 5)$ die loodrecht staat op k.
   Omdat $\mathrm{rc}_k = \frac{1}{3}$ is $\mathrm{rc}_l = -3$.
   l: $y = -3x + b$ door $(2, 5)$ geeft $b = 11$, dus l: $y = -3x + 11$.
2. Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l.
   $y = \frac{1}{3}x + 1$ en $y = -3x + 11$ geeft $\frac{1}{3}x + 1 = -3x + 11$, dus $3\frac{1}{3}x = 10$ en dit geeft $x = 3$, dus $B(3, 2)$.
3. De afstand van A tot k, dus $d(A, k)$ is de afstand van A tot B.
   $d(A,k) = d(A,B) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

8.3 Cirkelvergelijkingen

O 40 Gegeven is het punt $M(1, 4)$ en het variabele punt $P(x, y)$.
Voor de afstand d tussen M en P geldt $d^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$.

a Licht dit toe.

In het geval $d = 5$ krijg je de vergelijking $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

b Licht toe dat deze vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal $r = 5$.

c Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10.

d Geef van de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ de coördinaten van het middelpunt en de straal.

Bij het onderwerp cirkelvergelijkingen hoort paragraaf 8.5D waar je werkt met GeoGebra.

Theorie A De cirkelvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Voor een punt $P(x, y)$ op afstand r van $M(a, b)$ geldt

$d(P, M) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ en $d(P, M) = r$, dus

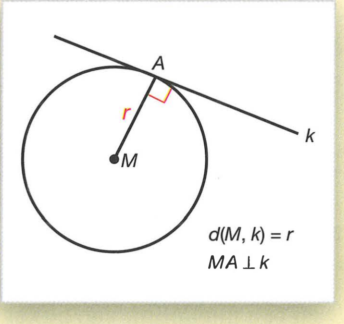
$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$.

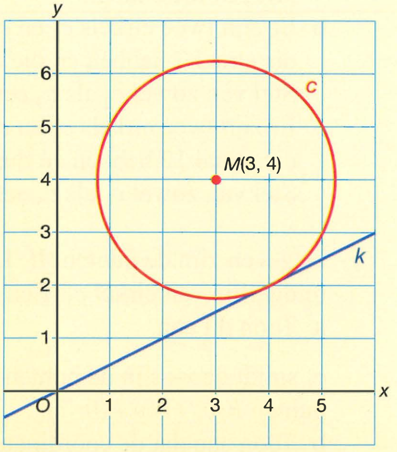
Kwadrateren geeft $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Hiermee is een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r opgesteld.

De cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r heeft als vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

In figuur 8.12 zie je de cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ die de lijn $k: y = \frac{1}{2}x$ raakt.
Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van M tot k, dus $r = d(M, k)$.





figuur 8.12

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ die de lijn $k: y = \frac{1}{2}x$ raakt.

Uitwerking
De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k.
Stel $l: y = ax + b$.

$\text{rc}_k = \frac{1}{2}$, dus $a = \text{rc}_l = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } M(3, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 4 \\ -6 + b = 4 \\ b = 10 \end{array}$$

$l: y = -2x + 10$ snijden met $k: y = \frac{1}{2}x$ geeft $-2x + 10 = \frac{1}{2}x$

$$-2\tfrac{1}{2}x = -10$$
$$x = 4$$

Het snijpunt van k en l is het raakpunt $A(4, 2)$.

$r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Dus $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

41 Stel een vergelijking op van de cirkel
a c_1 met middelpunt $(2, -5)$ en straal 3
b c_2 met middelpunt $(3, 1)$ die de x-as raakt
c c_3 met middelpunt $(-4, 2)$ die de y-as raakt
d c_4 met middelpunt $(3, 4)$ die door de oorsprong gaat.

8

42 Gegeven is de lijn $k: y = \frac{1}{3}x$.
a Stel een vergelijking op van de cirkel c_1 met middelpunt $M(5, 5)$ die k raakt.
b Er zijn twee cirkels c_2 en c_3 waarvan het middelpunt op k ligt, die straal 2 hebben en die de x-as raken.
Stel van zowel c_2 als c_3 een vergelijking op.
c Er zijn twee cirkels c_4 en c_5 waarvan het middelpunt op k ligt, die straal 12 hebben en die de y-as raken.
Stel van zowel c_4 als c_5 een vergelijking op.

43 Gegeven zijn de punten $A(-1, 4)$ en $B(9, 4)$. Het lijnstuk AB is een middellijn van cirkel c_1. Een vergelijking van c_1 is $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$.
a Toon dit aan.

c_1 snijdt de x-as in de punten $C(1, 0)$ en $D(7, 0)$ en de y-as in de punten $E(0, 1)$ en $F(0, 7)$.
b Toon aan dat de coördinaten van C, D, E en F juist zijn door vergelijkingen op te lossen.

Een middellijn van cirkel c_2 is CD en een middellijn van cirkel c_3 is EF.
c Stel van zowel c_2 als c_3 een vergelijking op.

A 44 Gegeven zijn de punten $A(3, 7)$ en $B(9, 1)$ en de lijn $k: 3x + 4y = 12$.
Stel een vergelijking op van de cirkel
a c_1 met middelpunt A die de x-as raakt
b c_2 met middelpunt B die door de oorsprong gaat
c c_3 met middellijn AB
d c_4 met middelpunt A die k raakt
e c_5 met middelpunt de oorsprong die k raakt.

O 45 Gegeven is de vergelijking $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.
Door kwadraatafsplitsen is de vergelijking te schrijven in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Toon dit aan.

Theorie B De cirkelvergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Door bij de vergelijking $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ kwadraat af te splitsen is de vergelijking te schrijven in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Dit gaat als volgt.

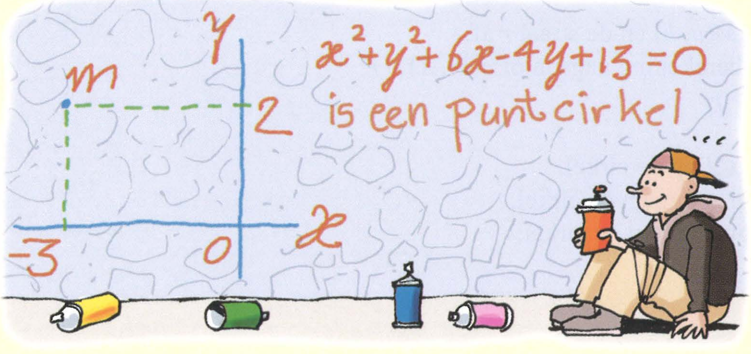
$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$
$x^2 + 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$
$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 3 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 - 3 = 0$
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

$x^2 + 6x =$
$x^2 + 6x + 9 - 9 =$
$(x + 3)^2 - 9$

$y^2 - 4y =$
$y^2 - 4y + 4 - 4 =$
$(y - 2)^2 - 4$

De vergelijking $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ hoort dus bij de cirkel met middelpunt $(-3, 2)$ en straal 4.

De vergelijking $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ is van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Niet elke vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ stelt een cirkel voor. Zo is $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 15 = 0$ te herleiden tot $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = -2$ en dit is niet de vergelijking van een cirkel.



Voorbeeld

Bereken van de cirkel $c: x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$ de straal en de coördinaten van het middelpunt.

Uitwerking

$x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$

$x^2 + 8x + y^2 - 3y + 6 = 0$

$(x + 4)^2 - 16 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$

$(x + 4)^2 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 = 12\frac{1}{4}$

Dus de straal is $\sqrt{12\frac{1}{4}} = 3\frac{1}{2}$ en het middelpunt is $\left(-4, 1\frac{1}{2}\right)$.

46 Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.

a $c_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
b $c_2: x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$
c $c_3: x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
d $c_4: x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$

O 47 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ en de punten $A(0, 4)$ en $B(-3, 0)$. Van c is het middelpunt $M(-3, 4)$ en is de straal $\sqrt{10}$.

a Toon dit aan.
b Bereken $d(M, A)$.
c Ligt A op, binnen of buiten c? Licht toe.
d Ligt B op, binnen of buiten c? Licht toe.

8

Theorie C Afstanden bij cirkels

Om te onderzoeken of een punt A op, binnen of buiten de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ ligt, schrijf je de vergelijking in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Je leest het middelpunt $M(a, b)$ en de straal r af.
Daarna kun je met een berekening nagaan of $d(M, A) = r$, $d(M, A) < r$ of $d(M, A) > r$.

Als $d(M, A) = r$, dan ligt A op de cirkel.
Als $d(M, A) < r$, dan ligt A binnen de cirkel.
Als $d(M, A) > r$, dan ligt A buiten de cirkel.

Voorbeeld

Onderzoek met een berekening of het punt $A(2, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$ ligt.

Uitwerking

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$

$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 21 = 0$

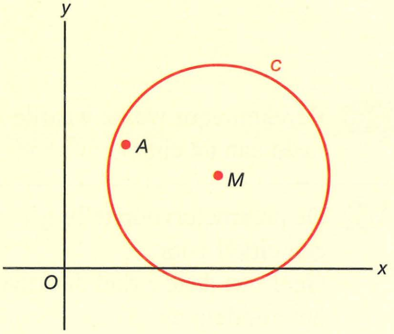
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 21 = 0$

$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 13$

Cirkel met middelpunt $M(5, 3)$ en $r = \sqrt{13}$.

$d(M, A) = \sqrt{(2-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} < r$, dus A ligt binnen de cirkel.

In figuur 8.13 is de cirkel c van het voorbeeld met het punt A getekend.
Om de afstand van het punt A tot de cirkel te berekenen gebruiken we dat de afstand van A tot c gelijk is aan de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen A en c.



figuur 8.13

De afstand van een punt tot een kromme is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen het punt en de kromme.

Dit betekent dat in figuur 8.13 de afstand van A tot c, dus $d(A, c)$, gelijk is aan $d(M, c) - d(M, A)$.
Ofwel $d(A, c) = r - d(M, A)$.
Omdat $r = \sqrt{13}$ en $d(M, A) = \sqrt{10}$ is $d(A, c) = \sqrt{13} - \sqrt{10}$.

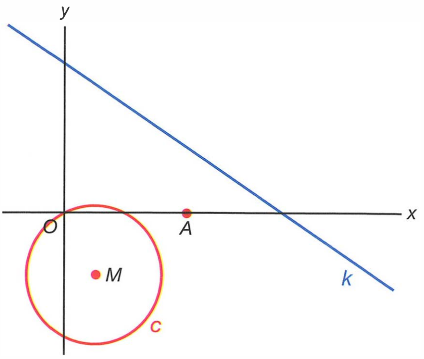
Als je te maken hebt met een punt B buiten c, dan is $d(B, c) = d(M, B) - r$.

Omdat in figuur 8.13 geldt $d(M, O) = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ is $d(O, c) = \sqrt{34} - \sqrt{13}$.

48 Onderzoek met een berekening of
- **a** het punt $A(-1, 2)$ op, binnen of buiten de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ ligt
- **b** de oorsprong op, binnen of buiten de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$ ligt
- **c** het punt $B(1, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel $c_3: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ ligt.

49 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ en de punten $A(2, 1)$, $B(-1, 5)$ en $C(9, 4)$.
Bereken exact.
a $d(A, c)$
b $d(B, c)$
c $d(C, c)$

A 50 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, de lijn $k: 4x + 6y = 29$ en het punt $A(4, 0)$. Zie figuur 8.14.
Toon op algebraïsche wijze aan dat het punt A dichter bij c dan bij k ligt.



figuur 8.14

D 51 Bereken voor welke waarde van a de lijn $k: 2x + y = 18$ raakt aan de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + a = 0$.

O 52 De parametervoorstelling $x = \cos(t) \wedge y = \sin(t)$ stelt een cirkel voor.
Geef van deze cirkel de straal en de coördinaten van het middelpunt.

$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$

8

Theorie D Een parametervoorstelling van een cirkel

In opgave 52 is een **parametervoorstelling van een cirkel** gegeven. Door met behulp van de formule $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ de parameter te elimineren, krijg je een vergelijking van de cirkel.

Bij de parametervoorstelling (pv) $x = 3 + 2\cos(t) \wedge y = 4 + 2\sin(t)$
krijg je $x = 3 + 2\cos(t) \wedge y = 4 + 2\sin(t)$

$$x - 3 = 2\cos(t) \wedge y - 4 = 2\sin(t)$$
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2$$
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t)$$
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4(\cos^2(t) + \sin^2(t))$$
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$$

Je hebt dus de cirkel met middelpunt (3, 4) en straal 2.

De grafiek bij de parametervoorstelling $x = a + r\cos(t) \wedge y = b + r\sin(t)$ is de cirkel $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Voorbeeld

Het punt P doorloopt de cirkel $c: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$.
Het punt Q is het midden van het lijnstuk AP, waarbij $A(6, 0)$.
Op welke kromme ligt Q?

Uitwerking
Een pv van c is $x = -4 + 3\cos(t) \wedge y = 2 + 3\sin(t)$.
Het midden Q van $P(-4 + 3\cos(t), 2 + 3\sin(t))$ en $A(6, 0)$ is

$$Q\left(\frac{-4 + 3\cos(t) + 6}{2}, \frac{2 + 3\sin(t) + 0}{2}\right) = Q(1 + 1\tfrac{1}{2}\cos(t), 1 + 1\tfrac{1}{2}\sin(t)).$$

Dus Q ligt op de cirkel $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2\frac{1}{4}$.

53 Stel bij de parametervoorstelling een cirkelvergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
a $x = 5 + 2\cos(t) \wedge y = -1 + 2\sin(t)$
b $x = 4 + \cos(2t) \wedge y = 3 + \sin(2t)$
c $x = 2\frac{1}{2} - 4\cos(t) \wedge y = 3\frac{1}{2} + 4\sin(t)$
d $x = 1 + 3\sin(2t) \wedge y = 2 - 3\cos(2t)$

54 Stel bij de cirkelvergelijking een parametervoorstelling op van de vorm $x = a + r\cos(t) \wedge y = b + r\sin(t)$.
a $c: (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 10$
b $c: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$
c $c: x^2 + y^2 + 2y = 0$

55 Gegeven zijn de cirkel $c_1: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ en het punt $A(-5, 2)$.
Het punt P doorloopt c_1 en het punt Q is het midden van AP. Zo doorloopt Q de cirkel c_2.
Stel van c_2 een vergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

A 56 Gegeven zijn de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 = 0$ en de punten $A(2, 0)$, $B(7, 5)$ en $C(8, 1)$.
a Onderzoek met een berekening voor elk van de punten A, B en C of ze op, binnen of buiten de cirkel liggen.

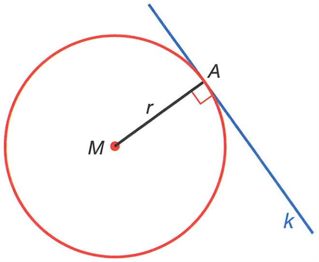
Het punt P doorloopt c_1. Het punt Q is het midden van het lijnstuk AP, het punt R is het midden van het lijnstuk BP en het punt S is het midden van het lijnstuk QR.
b S doorloopt de cirkel c_2.
Stel van c_2 een vergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

8

Terugblik

De cirkelvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

De cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r heeft vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. In de figuur hiernaast geldt $d(M, k) = r$.



Om een vergelijking op te stellen van de cirkel c met middelpunt $M(5, 2)$ die de lijn k: $2x - y = -2$ raakt ga je als volgt te werk.

1. Stel een vergelijking op van de lijn l door M die loodrecht staat op k.
   Je krijgt l: $x + 2y = 9$.
2. Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en l. Dit is het raakpunt A.
   Je krijgt $A(1, 4)$.
3. Bereken de straal van de cirkel met $r = d(M, A)$.
   Je krijgt $r = d(M, A) = \sqrt{(1-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.
4. Gebruik de coördinaten van M en de straal om een vergelijking van c op te stellen.
   Je krijgt c: $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

De cirkelvergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Om de vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ te herleiden tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$ ga je kwadraatafsplitsen.
Je krijgt $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 9 = 0$$
$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 9 = 0$$
$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

Je hebt dus te maken met de cirkel met middelpunt $M(5, 2)$ en straal $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Om de afstand van het punt $B(1, 6)$ tot de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ te berekenen, gebruik je de afstand van B tot $M(5, 2)$.
$d(B, M) = \sqrt{(5-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Omdat $d(B, M) > r$ ligt B buiten c, dus $d(B, c) = d(B, M) - r = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$.

De parametervoorstelling $x = a + r\cos(t) \wedge y = b + r\sin(t)$

Bij de parametervoorstelling (pv) $x = -3 + 4\cos(t) \wedge y = 6 + 4\sin(t)$ hoort de cirkel $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 16$.
Algemeen hoort bij de pv $x = a + r\cos(t) \wedge y = b + r\sin(t)$ de cirkel $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Om bij de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ een pv op te stellen, herleid je de vergelijking eerst tot $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$. Zo krijg je de pv $x = 5 + 2\sqrt{5} \cdot \cos(t) \wedge y = 2 + 2\sqrt{5} \cdot \sin(t)$.

8

8.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

O 57 Gegeven is de cirkel $c: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$ en het punt $A(5, 2)$ op c. De lijn k raakt c in A. Zie figuur 8.15.

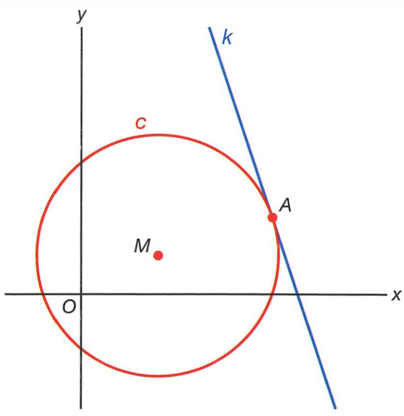
a Hoe kun je controleren dat A op c ligt?

De lijn l gaat door M en A.

b Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van l.

De lijn k staat loodrecht op l.

c Stel de formule van k op.



figuur 8.15

Theorie A Raaklijnen aan cirkels

In opgave 57 heb je de formule opgesteld van een raaklijn aan een cirkel in een gegeven raakpunt.
Je gaat daarbij als volgt te werk.

Werkschema: het opstellen van een vergelijking van een raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c

1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A.
2 Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
3 Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

Voorbeeld

Het punt $A(2, 3)$ ligt op de cirkel $c: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.
Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in A.

Uitwerking
Stel $k: y = ax + b$.
$M(3, 1)$ is het middelpunt van c.
m door M en A met $rc_m = \dfrac{3-1}{2-3} = -2$, dus $a = rc_k = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 2 + b = 3 \\ 1 + b = 3 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 2$.

58 Zie het voorbeeld met de cirkel c: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.
De lijn l raakt c in het punt $B(2, -1)$.

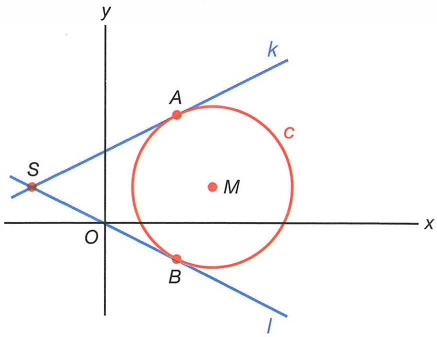
a Toon aan dat l: $y = \frac{1}{2}x$.

b De raaklijn l in B gaat door de oorsprong.
Er is nog een lijn door de oorsprong die c raakt.
Toon aan dat bij deze lijn de vergelijking $y = 2x$ hoort door de afstand van het middelpunt van de cirkel tot deze lijn te berekenen.

c c snijdt de x-as in de punten C en D met $x_C < x_D$.
De lijn p raakt c in C.
Stel een vergelijking op van p.

59 Zie het voorbeeld en opgave 58.
In figuur 8.16 zijn c, de punten A en B en de raaklijnen k en l getekend.

a Bereken de hoek tussen k en l door gebruik te maken van de richtingshoeken van k en l. Rond af op één decimaal.



figuur 8.16

Het snijpunt van k en l is S.

b Bereken de coördinaten van S.

Door gebruik te maken van de lengte van het lijnstuk MS en de straal van de cirkel is $\angle MSA$ in $\triangle AMS$ te berekenen.

c Bereken op deze manier $\angle MSA$ en gebruik dit om de hoek tussen k en l te berekenen. Rond af op één decimaal.

60 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$.
De punten A en B met $x_A = x_B = 3$ en $y_A > y_B$ liggen op c.
De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B.

a Stel van k en van l een vergelijking op.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en l.

c Er zijn twee raaklijnen aan de cirkel die door de oorsprong gaan.
Bereken in graden nauwkeurig de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken.

8

A 61 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$.
c snijdt de negatieve x-as in het punt A en de positieve x-as in het punt B. Verder ligt het punt $C(1, 3)$ op c.
De lijn k raakt c in A, de lijn l raakt c in B en de lijn m raakt c in C.

a Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en m.

De lijnen l en m snijden elkaar in het punt S.

b Bereken de coördinaten van S.

c Bereken exact de afstand van S tot c.

O 62 Gegeven zijn de cirkel $c{:}\, x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$ en de lijn $k{:}\, y = x - 1$.
Door $y = x - 1$ te substitueren in de cirkelvergelijking krijg je de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$.

a Toon dit aan.

b Los de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$ op en bereken de coördinaten van de snijpunten van k met c.

Theorie B Snijpunten van lijnen met cirkels

In opgave 62 heb je de coördinaten van de snijpunten van de lijn $k{:}\, y = x - 1$ met de cirkel $c{:}\, x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$ berekend. Dit deed je door $y = x - 1$ te substitueren in de cirkelvergelijking. Zo kreeg je een vergelijking met alleen de variabele x.

Heb je te maken met de lijn $l{:}\, y = x + 1$ en c, dan krijg je
$x^2 + (x + 1)^2 - 10x + 15 = 0$
$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x + 15 = 0$
$2x^2 - 8x + 16 = 0$
$x^2 - 4x + 8 = 0$
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$
Hieruit volgt dat de lijn l geen snijpunten heeft met c.

Heb je te maken met de lijn $m{:}\, y = 3x - 5$ en c, dan krijg je
$x^2 + (3x - 5)^2 - 10x + 15 = 0$
$x^2 + 9x^2 - 30x + 25 - 10x + 15 = 0$
$10x^2 - 40x + 40 = 0$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x - 2)^2 = 0$
$x = 2$
Hieruit volgt dat de lijn m precies één gemeenschappelijk punt met de cirkel heeft, dus dat m de cirkel raakt. Het raakpunt is $(2, 1)$.
Merk op dat de discriminant van de vergelijking $x^2 - 4x + 4 = 0$ gelijk is aan nul.

De ligging van de lijn $y = ax + b$ ten opzichte van een cirkel
Ontstaat na substitutie van $y = ax + b$ in de cirkelvergelijking een tweedegraadsvergelijking waarvan de discriminant
- groter is dan nul, dan zijn er twee snijpunten
- kleiner is dan nul, dan zijn er geen snijpunten
- gelijk is aan nul, dan raakt de lijn de cirkel.

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c: (x-5)^2+(y-1)^2=17$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn $k: 3x+5y=37$ met c.

b Bereken voor welke waarden van q de lijn $y=4x+q$ de cirkel raakt.

Aanpak

b Gebruik de vergelijking van de cirkel in de vorm $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Uitwerking

a $3x+5y=37$

$5y=-3x+37$

$y=-\frac{3}{5}x+7\frac{2}{5}$

Substitutie van $y=-\frac{3}{5}x+7\frac{2}{5}$ in $(x-5)^2+(y-1)^2=17$ geeft $(x-5)^2+\left(-\frac{3}{5}x+6\frac{2}{5}\right)^2=17$.

Voer in $y_1=(x-5)^2+\left(-\frac{3}{5}x+6\frac{2}{5}\right)^2$ en $y_2=17$.

Intersect geeft $x=4$ en $x=9$.

$x=4$ geeft $y=-\frac{3}{5}\cdot 4+7\frac{2}{5}=5$

$x=9$ geeft $y=-\frac{3}{5}\cdot 9+7\frac{2}{5}=2$.

De snijpunten zijn $(4, 5)$ en $(9, 2)$.

b $(x-5)^2+(y-1)^2=17$

$x^2-10x+25+y^2-2y+1=17$

$x^2+y^2-10x-2y+9=0$

Substitutie van $y=4x+q$ in $x^2+y^2-10x-2y+9=0$ geeft

$x^2+(4x+q)^2-10x-2(4x+q)+9=0$

$x^2+16x^2+8qx+q^2-10x-8x-2q+9=0$

$17x^2+(8q-18)x+q^2-2q+9=0$

$D=(8q-18)^2-4\cdot 17\cdot(q^2-2q+9)=64q^2-288q+324-68q^2+136q-612$

$=-4q^2-152q-288$

Raken, dus $D=0$.

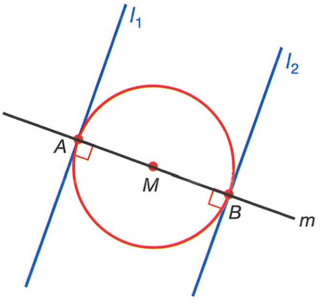
$D=0$ geeft $-4q^2-152q-288=0$

$q^2+38q+72=0$

$D=38^2-4\cdot 1\cdot 72=1156$

$q=\dfrac{-38-34}{2}=-36 \vee q=\dfrac{-38+34}{2}=-2$

R 63 Zie het voorbeeld b.
Je kunt q ook op een andere manier berekenen. Daartoe stel je een vergelijking op van de lijn m door het middelpunt M van c die loodrecht staat op $y=4x+q$. De snijpunten A en B van m met c zijn raakpunten. Gebruik dat de lijn $y=4x+q$ door A of B gaat om de waarden van q te berekenen.



figuur 8.17

64 Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van
- **a** de lijn $k: y = x + 1$ met de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$
- **b** de lijn $l: x + y = 6$ met de cirkel $c_2: x^2 + y^2 = 26$
- **c** de lijn $m: x = t + 1 \wedge y = 2t + 1$ met de cirkel $c_3: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$.

65 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn met de cirkel. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- **a** De lijn $k: 2x - 3y + 4 = 0$ en de cirkel $c_1: (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$.
- **b** De lijn $l: 3x + 4y = 19$ en de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
- **c** De lijn $m: y = 2x$ en de cirkel $c_3: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

66 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$.
Bereken voor welke a de lijn $y = ax + 1$
- **a** raaklijn is van c
- **b** geen punten gemeenschappelijk heeft met c
- **c** twee snijpunten heeft met c.

67 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$.
Bereken voor welke b de lijn $y = \frac{1}{2}x + b$
- **a** raaklijn is van c
- **b** geen punten gemeenschappelijk heeft met c
- **c** twee snijpunten heeft met c.

A 68 Het lijnstuk AB met $A(-1, 3)$ en $B(7, -1)$ is een middellijn van de cirkel c.
- **a** Bereken voor welke p de lijn $y = -2x + p$ de cirkel c raakt.
- **b** Bereken voor welke q de lijn $y = qx - 5\frac{1}{2}$ geen punten gemeenschappelijk heeft met c.

Terugblik

Een vergelijking van een raaklijn aan een cirkel opstellen

Bij het opstellen van een vergelijking van de raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c ga je als volgt te werk.

1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A.
2 Bereken rc_k met behulp van $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$.
3 Stel een vergelijking op van k met behulp van rc_k en de coördinaten van A.

Bij het opstellen van een vergelijking van de lijn k die de cirkel $c: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 17$ raakt in het punt $A(2, 3)$ krijg je

1 $M(6, 2)$, dus de lijn l door M en A heeft $\text{rc}_l = \dfrac{3-2}{2-6} = \dfrac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.
2 Uit $\text{rc}_l = -\frac{1}{4}$ en $k \perp l$ volgt $\text{rc}_k = 4$.
3 $\left.\begin{array}{l} k: y = 4x + b \\ \text{door } A(2, 3) \end{array}\right\} \; 4 \cdot 2 + b = 3 \text{ geeft } b = -5$

Dus $k: y = 4x - 5$.

Snijpunten van lijnen met cirkels

Om de coördinaten van de snijpunten van de lijn $l: y = -x + 3$ met de cirkel $c: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 17$ te berekenen, substitueer je $y = -x + 3$ in de cirkelvergelijking. Je krijgt $(x-6)^2 + (-x+1)^2 = 17$.

Algebraïsch oplossen van deze vergelijking geeft
$$\begin{aligned} &x^2 - 12x + 36 + x^2 - 2x + 1 = 17 \\ &2x^2 - 14x + 20 = 0 \\ &x^2 - 7x + 10 = 0 \\ &(x-2)(x-5) = 0 \\ &x = 2 \vee x = 5 \end{aligned}$$

8

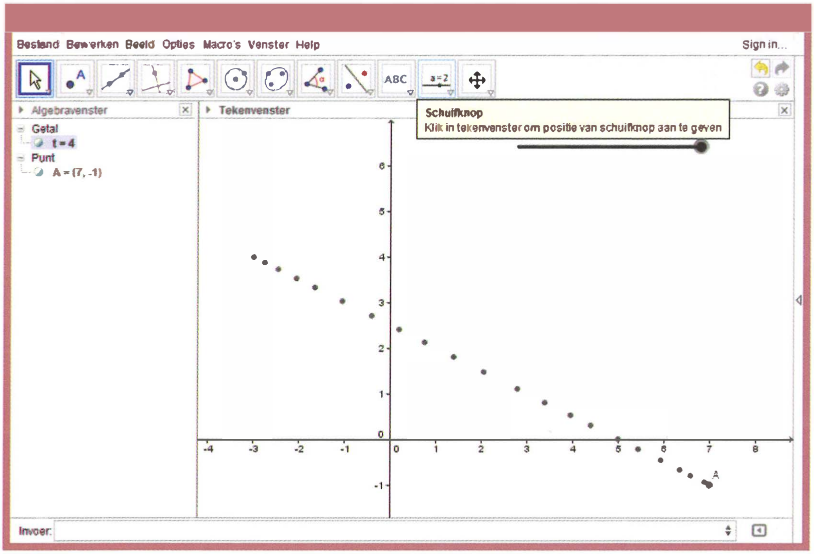
De snijpunten van l en c zijn $(2, 1)$ en $(5, -2)$.
Afhankelijk van de vraagstelling mag je de vergelijking die je na substitutie krijgt eventueel grafisch-numeriek oplossen.

Om te berekenen voor welke p de lijn $y = px + 5$ de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 = 0$ raakt, substitueer je $y = px + 5$ in de cirkelvergelijking en gebruik je dat moet gelden $D = 0$ bij de vergelijking die je krijgt.
Substitutie geeft $x^2 + (px+5)^2 - 10x - 4(px+5) + 12 = 0$.
Herleiden geeft $(p^2+1)x^2 + (6p-10)x + 17 = 0$.
Hierbij hoort $D = -32p^2 - 120p + 32$.
$D = 0$ geeft $-32p^2 - 120p + 32 = 0$ ofwel $4p^2 + 15p - 4 = 0$.
Oplossen van deze vergelijking geeft $p = -4 \vee p = \frac{1}{4}$.

Dus de lijnen $y = -4x + 5$ en $y = \frac{1}{4}x + 5$ raken de cirkel.

8.5 Meetkunde met GeoGebra

O 69 Met de optie Schuifknop kun je met GeoGebra een variabele aanmaken.



figuur 8.18

a Maak met Schuifknop een variabele t aan, waarvan de waarde varieert van -1 tot 4 met stapgrootte 0,01.

b Voer in de invoerregel het punt $A = (2t - 1, 3 - t)$ in.

c Zet voor A het Spoor aan (rechts klikken op A) en verander de waarde van t door de knop te verschuiven. Wat kun je zeggen over de baan waarover A beweegt?

d Zet voor de variabele t de Animatie aan (rechts klikken op de schuifknop). Tussen welke punten gaat het punt A heen en weer?

Theorie A Parameterkrommen

In opgave 69 heb je gezien dat het punt $A(2t - 1, 3 - t)$ over een rechte lijn beweegt als t verandert.
Omdat de x-coördinaat van A gelijk is aan $2t - 1$ en de y-coördinaat gelijk is aan $3 - t$ zeggen we dat A beweegt over de lijn met parametervoorstelling $x = 2t - 1 \wedge y = 3 - t$.
Om met GeoGebra de formule van de lijn te vinden teken je deze lijn met de optie Rechte door twee punten en lees je de formule af in het algebravenster.

Neem je voor de coördinaten van A formules die niet lineair zijn, dan kun je kromme lijnen in het platte vlak krijgen.

Om de lijn l: $x = 4t + 3 \wedge y = 1 - 3t$ te tekenen ga je als volgt te werk.

- Maak een schuifknop voor t.
- Teken het punt $A(4t + 3, 1 - 3t)$ en zet voor A het Spoor aan.
- Versleep t of zet voor t de Animatie aan.

70 Teken de volgende lijnen en geef de formule van de lijn.

a k: $x = 4t + 3 \wedge y = 1 - 3t$

b l: $x = 4 - t \wedge y = 2t + 1$

71 Teken de volgende krommen.

a K: $x = 8 - t^2 \wedge y = 1 - 2t$

b L: $x = 4t - t^3 \wedge y = 2t - 1$

Theorie B De opdracht Kromme

De manier waarop je hiervoor bij een parametervoorstelling een kromme hebt getekend heeft een paar nadelen. Zo zijn er geen berekeningen mee te maken en zijn er geen raaklijnen te tekenen. GeoGebra heeft ook een optie om een parametervoorstelling rechtstreeks in te voeren in de invoerregel.
De kromme K: $x = 5 - t^2 \wedge y = 2t^3 - 4t$ voer je als volgt in.

```
Invoer: Kromme[5-t^2,2t^3-4t,t,-10,10]
```

De betekenis van de argumenten van de opdracht Kromme zijn achtereenvolgens: de x-coördinaat, de y-coördinaat, de parameter, de startwaarde van de parameter en de eindwaarde van de parameter.
Bij de opdracht hierboven wordt dus de kromme K getekend van $t = -10$ tot $t = 10$.
Het is leerzaam om te experimenteren met de opdracht Kromme en het niet te laten bij de aangeboden opdrachten.

72 Teken de volgende krommen met de opdracht Kromme voor t op $[-10, 10]$.

a K: $x = 3 + 4\cos(t) \wedge y = 1 + 4\sin(t)$

b K: $x = t + 2\cos(2t) \wedge y = 3 + 3\sin(t)$

73 **a** Maak een schuifknop voor de parameter p die loopt van 0 tot 2π met stapgrootte 0,01.

b Teken de kromme K: $x = 3 + 2\cos(3t) \wedge y = 1 + 3\sin(t)$ waarbij t loopt van 0 tot p.

c Zet voor de schuifknop p de Animatie aan.

d Neem nu t van $-0{,}5p$ tot $0{,}5p$ (klik hiervoor in het algebravenster op de formules) en zet de Animatie aan.

π voer je in als pi.

Theorie C De afstand van een punt tot een lijn

Om met GeoGebra de afstand tussen de punten A en B te berekenen teken je het lijnstuk AB. Je leest de lengte van dat lijnstuk af in het algebravenster. GeoGebra noemt de lengten van lijnstukken a, b, c, ... Je kunt deze namen gebruiken in de invoerregel.

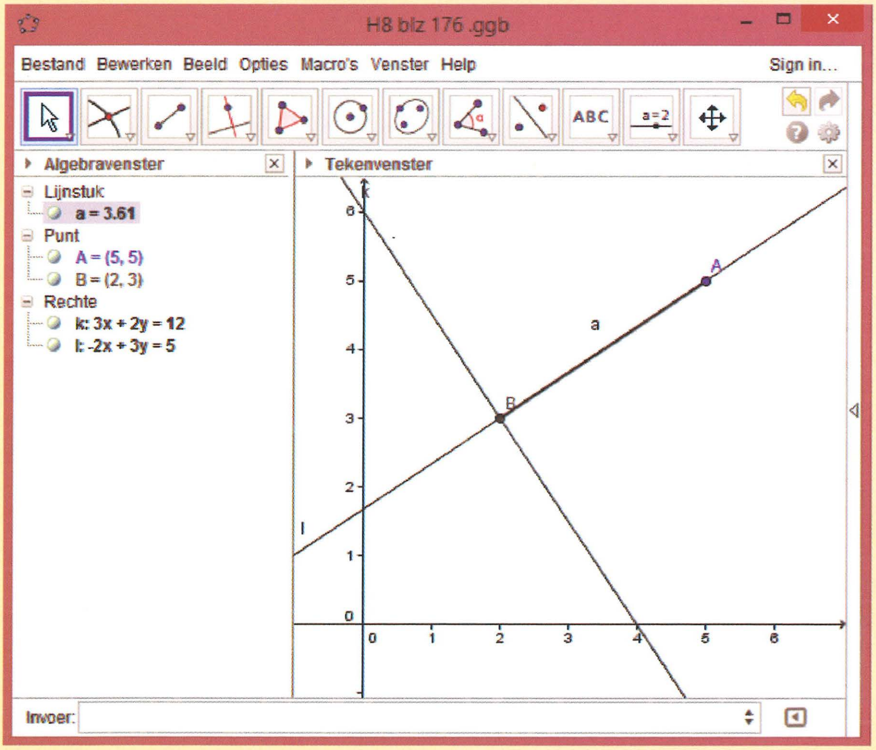
De afstand tussen een punt A en een lijn k is de lengte van het loodlijnstuk vanuit A op k.

Om met GeoGebra de afstand van het punt A tot de lijn k te berekenen kun je het volgende werkschema gebruiken.

Werkschema: het berekenen van de afstand van een punt A tot de lijn k

1 Teken de lijn l door A die loodrecht staat op k.
2 Teken het snijpunt B van k en l.
3 Teken het lijnstuk AB en lees de lengte af.

Bij de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn k: $3x + 2y = 12$ krijg je uiteindelijk het volgende scherm.
Je leest in het algebravenster af dat de afstand ongeveer gelijk is aan 3,61.



figuur 8.19

8

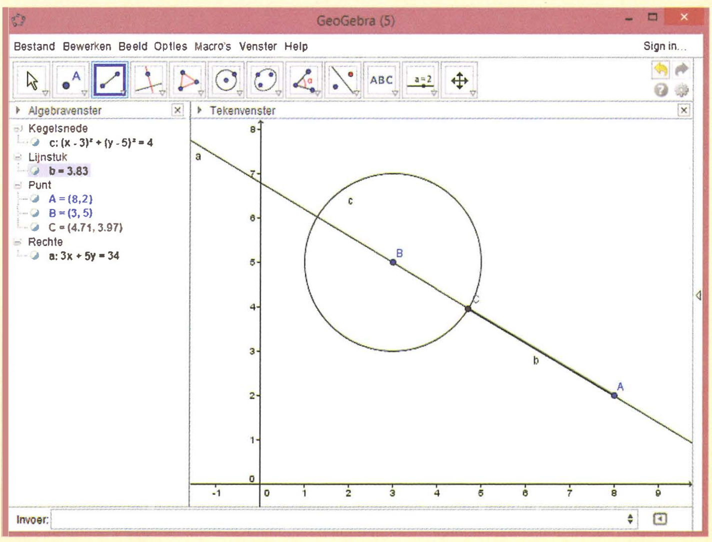
74 Bereken de afstand van

a het punt $A(3, 0)$ tot de lijn $k\colon y = \frac{1}{2}x + 1$
b het punt $B(6, 0)$ tot de lijn $l\colon 2x + y = 2$
c de oorsprong tot de lijn $m\colon y = -3x + 10$
d de oorsprong tot de lijn $n\colon 3x - 4y = 12$.

75 Gegeven zijn de lijnen $k\colon x + 3y = 3$ en $l\colon x + y = 9$.
Onderzoek met een berekening of het punt $A(1, 4)$ dichter bij k dan bij l ligt.

Theorie D De afstand van een punt tot een cirkel

De cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r heeft als vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Zo hoort bij de cirkel met middelpunt $M(3, 5)$ en straal 2 de vergelijking $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$. Werk je in deze vergelijking de haakjes weg, dan krijg je
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 4$ ofwel $x^2 + y^2 - 6x - 10y = -30$.
Zowel de vergelijking $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$ als de vergelijking $x^2 + y^2 - 6x - 10y = -30$ kun je in de invoerregel invoeren.
Door in het algebravenster op de formule rechts te klikken is de ene vergelijking om te zetten in de andere vergelijking.



figuur 8.20

Gebruik in de volgende opgaven dat de afstand tussen twee meetkundige figuren de kortste afstand tussen deze figuren is.

76 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ en het punt $A(8, 2)$.
Om de afstand tussen A en c, dus $d(A, c)$, met GeoGebra te berekenen ga je als volgt te werk.

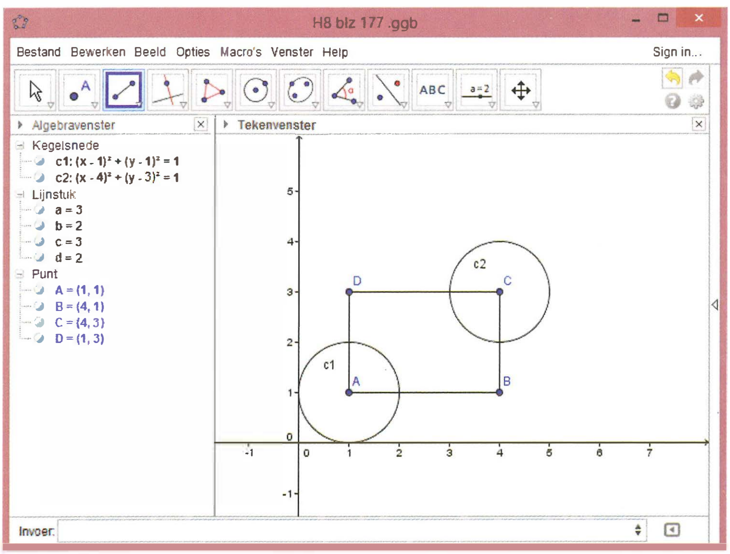
- Teken c, A en het middelpunt M van c.
- Teken de lijn k door A en M.

De lijn k snijdt c in twee punten.

a Geef met behulp van de optie Lijnstuk de afstand van A tot c in twee decimalen nauwkeurig.

b Teken het punt $C(4, 6)$ en bereken $d(C, c)$ in twee decimalen nauwkeurig.

A 77 Gegeven zijn de punten $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$ en $D(1, 3)$.
c_1 is de cirkel met middelpunt A en straal 1 en c_2 is de cirkel met middelpunt C en straal 1.



figuur 8.21

a Bereken de afstand tussen c_1 en c_2 in twee decimalen nauwkeurig.

b Licht toe dat het exacte antwoord van vraag b gelijk is aan $\sqrt{13} - 2$.

c Bereken de afstand tussen c_1 en de lijn BD in twee decimalen nauwkeurig.

Diagnostische toets

8.1 Lijnen en hoeken

1 Gegeven zijn de lijnen k_p: $px + (p - 5)y = 2$ en $l_{p,q}$: $(p + 1)x - (3 - p)y = q$.
Bereken algebraïsch voor welke p en q
a de lijnen k_p en $l_{p,q}$ evenwijdig zijn.
b de lijnen k_p en $l_{p,q}$ samenvallen.

2 Voor welke p gaat de lijn $\begin{cases} x(t) = 3t - 6p \\ y(t) = -2t + p \end{cases}$ door het punt (2, 7)?

3 De lijn k snijdt de assen in de punten $(p, 0)$ en $(0, 3)$.
a Stel een vergelijking op van k van de vorm $ax + by = c$.
b Voor welke p ligt het punt $A(3, 6)$ op k?
c Voor welke p is k evenwijdig met de lijn m: $2x + 5y = 10$?

4 Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.
a k: $y = 4x + 2$ en l: $y = -\frac{1}{2}x + 6$
b m door (3, 0) en (0, −2) en n door (2, 0) en (0, 5)
c p: $2x + 3y = 6$ en q: $y = 8x - 6$

8.2 Afstanden bij punten en lijnen

5 Gegeven zijn de punten $A(2p, 0)$ en $B(3, p + 1)$.
a Druk de afstand tussen de punten A en B uit in p.
b Bereken langs algebraïsche weg voor welke p de afstand tussen A en B kleiner is dan 5.
c Bereken exact de minimale afstand tussen A en B.
d Voor welke p ligt het midden van lijnstuk AB op de lijn k: $x + y = 6$?

8

6 Stel een vergelijking op van de lijn
a k die door het punt $A(2, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l: $y = -\frac{1}{3}x + 5$
b m die door het punt $B(2, -4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn n: $3x + 2y = 6$
c p die door het punt $C(-2, 6)$ gaat en loodrecht staat op de lijn q door de punten (3, 0) en (0, 4).

7 **a** Bereken exact de afstand van het punt $A(6, -1)$ tot de lijn k: $y = 2x - 3$.
b Bereken exact de afstand van het punt $B(3, 5)$ tot de lijn l door de punten $C(2, 1)$ en $D(-2, 5)$.

8.3 Cirkelvergelijkingen

8 Gegeven zijn de punten $A(2, -3)$ en $B(8, 2)$ en de lijn k: $y = 3x - 6$.
Stel een vergelijking op van de cirkel

a c_1 met middelpunt B en straal 5
b c_2 met middelpunt A die door B gaat
c c_3 met middelpunt A die de y-as raakt
d c_4 met middellijn AB
e c_5 met middelpunt B die k raakt.

9 Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.

a c_1: $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
b c_2: $x^2 + y^2 + 3x - 7y = 0$

10 Gegeven zijn de cirkel c_1: $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$ en de punten $A(3, -4)$, $B(2, 5)$ en $C(3, 4)$.

a Onderzoek met een berekening of het punt A op, binnen of buiten c_1 ligt.
b Bereken exact $d(B, c_1)$.
c Bereken exact $d(C, c_1)$.

Het punt P doorloopt c_1 en het punt Q is het midden van AP. Zo doorloopt Q de cirkel c_2.

d Stel van c_2 een vergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

8.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

11 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 + 14x - 4y + 43 = 0$. De punten A en B met $x_A = x_B = -8$ en $y_A > y_B$ liggen op c. De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B. Het snijpunt van k en l is S.

a Stel van k en van l een vergelijking op.
b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en l.
c Bereken exact $d(S, c)$.
d Er zijn twee raaklijnen aan de cirkel die door de oorsprong gaan. Bereken in graden nauwkeurig de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken.

12 Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(1, 2)$ en straal $r = \sqrt{5}$.

a Bereken voor welke p de lijn k: $y = -2x + p$ de cirkel raakt.
b Bereken voor welke q de lijn m: $y = \frac{1}{2}x + q$ twee snijpunten met de cirkel heeft.


We eat problems
for breakfast.
Preferably unsolved ones...
Internationale Wiskunde Olympiade
Nederland 2011
IMO2011

De Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen tot en met de vijfde klas havo/vwo die wel houden van wat wiskundige uitdaging. In januari of februari vindt de eerste ronde plaats op alle scholen die zich hebben aangemeld. Je krijgt dan 12 speelse en uitdagende opgaven voorgeschoteld waar je 2 uur de tijd voor krijgt. Voorbeelden van de opgaven van de afgelopen jaren vind je hierna. Het gaat bij de A-vragen om meerkeuzevragen en bij de B-vragen alleen maar om de eindantwoorden in exacte vorm, zoals $\frac{11}{81}$, $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi + 1$. Je mag geen rekenmachine of een lijst met formules gebruiken, alleen pen en papier, passer en liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand. Voor de opgaven kun je twee punten per A-vraag halen en vijf punten per B-vraag. Aan het eind van elk jaar is in een tabel opgenomen welk percentage van de deelnemers uit vwo 4 de betreffende opgave goed had opgelost. Verder staat erbij hoeveel punten minimaal nodig waren om uitgenodigd te worden voor de volgende ronde.

Sinds 2010 is er een tweede ronde die in maart regionaal wordt georganiseerd. De beste 120 a 140 van de tweede ronde worden uitgenodigd voor de eindronde, die in september van het volgende schooljaar altijd op de Technische Universiteit Eindhoven plaatsvindt. Als je bij de eindronde hoog eindigt, krijg je een uitnodiging voor een trainingsprogramma dat parallel aan je schoolwerk loopt van november tot en met juni. De beste 6 leerlingen vormen het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Die is in 2014 in Zuid-Afrika, in 2015 in Thailand, in 2016 in Hong Kong en in 2017 in Brazilië. Er doen zo'n 100 landen aan mee.

Je kunt aan je wiskundedocent laten weten dat het je wel leuk lijkt om mee te doen; hij of zij kan de school dan opgeven via de site www.wiskundeolympiade.nl of via de inschrijfformulieren die elke school in september krijgt opgestuurd via de SLO.

Het werk van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade wordt mogelijk gemaakt door financiële bijdragen en steun van:
Technische Universiteit Eindhoven: Faculteit Wiskunde en Informatica, Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap, Stichting DIAMANT, Nederlandse Onderwijs Commissie Wiskunde, CITO, ORTEC, Transtrend BV, All Options BV, The Derivatives Technology Foundation, Centraal Bureau voor de Statistiek, Stichting Compositio Mathematica, Pythagoras wiskundetijdschrift voor jongeren, Epsilon Uitgaven, Veen Magazines, Natuurwetenschap & Techniek, CANdiensten.

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

2009

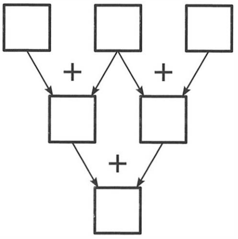
A-vragen

1. Ella scoort 60% goed bij een toets van 25 vragen, 70% goed bij een toets van 30 vragen en 80% goed bij een toets van 45 vragen. Als de toetsen worden samengevoegd tot één toets met 100 vragen, wat is dan haar score voor die toets van 100 vragen?
A 68% **B** 70% **C** 72% **D** 74% **E** 76%

2. Voor hoeveel van de gehele getallen 10 tot en met 99 geldt dat de som van de cijfers gelijk is aan het kwadraat van een geheel getal? (Een voorbeeld is het getal 27 met som van de cijfers $2 + 7 = 9 = 3^2$.)
A 13 **B** 14 **C** 15 **D** 16 **E** 17

3. Ronald gooit met drie dobbelstenen. Die zien er net zo uit als gewone dobbelstenen, alleen staan er op de zes zijvlakken andere getallen.
Op de eerste dobbelsteen staan de getallen: 1, 1, 2, 2, 3 en 3.
Op de tweede dobbelsteen staan de getallen: 2, 2, 4, 4, 6 en 6.
En op de derde dobbelsteen staan de getallen: 1, 1, 3, 3, 5 en 5.
Hij telt de drie getallen die hij gooit bij elkaar op.
Hoe groot is de kans dat het resultaat een oneven getal is?
A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{2}{3}$ **E** $\frac{3}{4}$

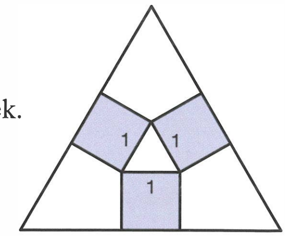
4. Drie verschillende getallen uit de verzameling {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} worden in de bovenste drie vierkantjes geplaatst van de figuur hiernaast. Vervolgens worden de getallen opgeteld volgens het aangegeven schema. Noem het grootst mogelijke getal dat in het onderste vierkantje kan komen Max en het kleinst mogelijke getal dat in het onderste vierkantje kan komen Min. Wat is de waarde van Max − Min?
A 16 **B** 24 **C** 25 **D** 26 **E** 32



5. De lengtes van de diagonalen van een ruit hebben een verhouding 3 : 4. (Een ruit is een vierhoek met vier zijden die even lang zijn.) De som van de lengtes van de diagonalen is 56. Hoe groot is de omtrek van de ruit?
A 80 **B** 96 **C** 100 **D** 108 **E** 160

6. Wouter gaat lopend van zijn huis naar zijn sportclub. Hij had ook zijn racefiets kunnen pakken; daarmee gaat de tocht zeven keer zo snel. Maar die liet hij thuis staan. Na 1 km is hij op een punt aangekomen dat het in tijd niets uitmaakt of hij verder doorloopt of juist naar huis terugloopt om alsnog met zijn racefiets te gaan. Hoeveel km is hij op dat moment nog verwijderd van zijn sportclub?
A $\frac{8}{7}$ **B** $\frac{7}{6}$ **C** $\frac{6}{5}$ **D** $\frac{5}{4}$ **E** $\frac{4}{3}$

7 Op de zijden van een gelijkzijdige driehoek worden drie vierkanten getekend. De zijden van de vierkanten die evenwijdig zijn met de zijden van de driehoek worden verlengd tot ze elkaar snijden. De drie snijpunten vormen weer een gelijkzijdige driehoek. De lengte van de zijde van de oorspronkelijke driehoek is 1. Wat is de lengte van de zijde van de grote gelijkzijdige driehoek?



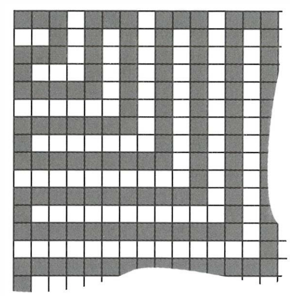
A $1 + 2\sqrt{2}$ **B** $5 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **C** $3\sqrt{2}$ **D** $1 + 2\sqrt{3}$ **E** $2\sqrt{6}$

8 Bekijk alle getallen van vier cijfers waarin elk van de cijfers 3, 4, 6 en 7 precies eenmaal voorkomt. Hoeveel van deze getallen zijn deelbaar door 44?

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 12

B-vragen

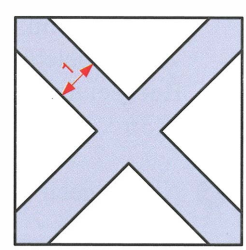
1 Op een vel papier staat een rooster van 101 bij 101 witte vierkantjes. Er is een slang gevormd door vierkantjes grijs te kleuren zoals in bijgaande figuur. De slang begint linksboven en loopt door tot hij niet verder kan. Slechts een deel van het rooster is afgebeeld. Hoeveel vierkantjes zijn er in totaal grijs gekleurd in het volledige rooster van 101 bij 101 vierkantjes?



$$\underbrace{99999...99999}_{2009\times}$$

2 Het gehele getal N bestaat uit 2009 negens achter elkaar geschreven. Een computer berekent $N^3 = (99999 \ldots 99999)^3$. Hoeveel negens bevat het uitgeschreven getal N^3 in totaal?

3 Met een brede kwast worden de diagonalen van een vierkante tegel geverfd, zie de figuur. Precies de helft van het oppervlak van de tegel is geverfd. De breedte van de verfkwast is 1, zoals aangegeven. Bereken de lengte van de zijde van de tegel.



4 Bepaal een drietal gehele getallen (a, b, c) dat voldoet aan de vergelijkingen:

$$a + b + c = 18$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 756$$
$$a^2 = bc$$

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage	87	41	68	67	59	34	39	49	16	4	1	11

De 54 leerlingen uit vwo 4 met een score van 23 of meer zijn uitgenodigd voor de eindronde.

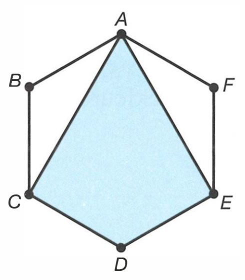
2010

A-vragen

1 Een figuur bestaat uit drie cirkels en twee lijnen.
Hoeveel snijpunten kunnen er maximaal zijn?
A 15 **B** 16 **C** 18 **D** 19 **E** 20

2 Een toets bestaat uit zes vragen die achtereenvolgens 1 tot en met 6 punten waard zijn. Heb je een vraag goed beantwoord, dan wordt het aantal punten van die vraag bij je score opgeteld. Zo niet, dan wordt het juist ervan afgetrokken. Heb je alleen vragen 1, 3 en 4 goed, dan is je score dus $1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 = -5$.
Hoeveel verschillende eindscores zijn er mogelijk?
A 20 **B** 22 **C** 41 **D** 43 **E** 64

3 Een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ heeft oppervlakte 1.
Wat is de oppervlakte van de vlieger $ACDE$?
A $\frac{1}{4}\sqrt{6}$ **B** $\frac{2}{3}$ **C** $\frac{3}{4}$ **D** $\frac{5}{6}$ **E** $\frac{1}{2}\sqrt{3}$



4 Drie spelers spelen een spelletje met fiches. Elke ronde geeft degene (of één van degenen) met het grootste aantal fiches één fiche aan de pot en daarna één aan elk van zijn medespelers. De pot is in het begin leeg en de drie spelers beginnen met respectievelijk 13, 14 en 15 fiches. Het spel eindigt als een van de spelers al zijn fiches kwijt is.
Hoeveel fiches zitten er in de pot op het moment dat het spel eindigt?
A 36 **B** 37 **C** 38 **D** 39 **E** 40

5 Als het getal $((((7^6)^5)^4)^3)^2$ wordt uitgeschreven, wat is dan het laatste cijfer?
A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** 9

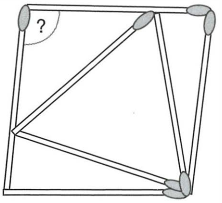
6 Bereken $\left((\sqrt{2}+1)^7 + (\sqrt{2}-1)^7\right)^2 - \left((\sqrt{2}+1)^7 - (\sqrt{2}-1)^7\right)^2$.
A 2 **B** 4 **C** $8\sqrt{2}$ **D** 128 **E** 512

7 De kilometerteller van een auto geeft aan dat de auto 2010 km gereden heeft. Het is een kilometerteller met zes wieltjes en geen cijfer achter de komma, dus de stand van de teller is 002010. Deze kilometerteller slaat echter het cijfer 4 over en springt dus direct van 3 naar 5, bij elk van de wieltjes.
Hoeveel kilometer heeft de auto werkelijk gereden?
A 1409 **B** 1467 **C** 1647 **D** 1787 **E** 1809

8 Dertig mensen van verschillende lengte zijn opgesteld in een rechthoek van zes rijen van elk vijf personen. Uit elke rij kiezen we de kortste en van die zes kortsten nemen we de langste; dat is Piet. Ook kiezen we uit elke rij de langste en van die zes langsten kiezen we de kortste; dat is Jan. Vervolgens zetten we alle dertig mensen op volgorde van lengte naast elkaar, de kortste links en de langste rechts.
Op welke positie kan Jan *niet* staan?
A 21 posities links van Piet
B 19 posities links van Piet
C direct naast Piet
D 19 posities rechts van Piet
E 21 posities rechts van Piet

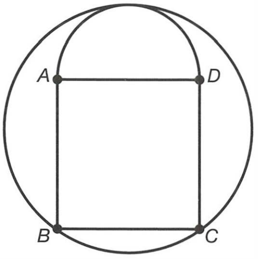
B-vragen

1 Zeven even lange lucifers liggen op tafel en raken elkaar zoals in de figuur. Hoeveel graden is de aangegeven hoek?



2 Hoeveel positieve gehele getallen a zijn er, waarvoor geldt: als je 2216 door a deelt, is de rest 29.

3 Een figuur bestaat uit een vierkant $ABCD$ en een halve cirkel met middellijn AD buiten het vierkant. De zijde van het vierkant heeft lengte 1.
Wat is de straal van de omgeschreven cirkel van de figuur?



4 Op een bord met 28 rijen en 37 kolommen wordt in elk vakje met een rode pen een getal geschreven: in de bovenste rij van links naar rechts de getallen 1 tot en met 37, in de rij eronder van links naar rechts de getallen 38 tot en met 74, enzovoorts.
Met een groene pen wordt daarna opnieuw in elk vakje een getal geschreven, maar nu komen de getallen 1 tot en met 28 van boven naar beneden in de linker kolom, in de kolom ernaast van boven naar beneden de getallen 29 tot en met 56, enzovoorts.
In het vakje linksboven staat nu zowel in rood als in groen het getal 1. Tel de rode getallen op, van alle vakjes waar in rood en groen hetzelfde getal staat. Wat is de uitkomst?

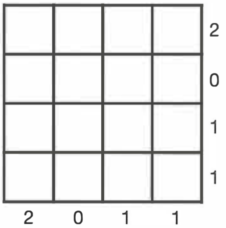
opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage	54	20	68	42	44	16	21	24	21	8	5	1

De 243 leerlingen uit vwo 4 met een score van 12 of meer zijn uitgenodigd voor de regionale ronde.

2011

A-vragen

1 De velden van een 4 × 4-bord worden wit of zwart gekleurd.
Naast elke rij en onder elke kolom staat aangegeven hoeveel velden in die rij of kolom zwart moeten zijn.
Op hoeveel manieren kan het bord gekleurd worden?

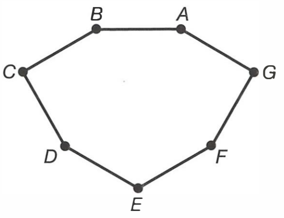


A 0 **B** 1 **C** 4 **D** 5 **E** 8

2 De datum 4 februari 2011 wordt genoteerd als 04-02-2011. We kijken in deze opgave naar de eerstvolgende dag na 4 februari 2011 waarvan de datum met acht *verschillende* cijfers wordt geschreven. In welke maand valt die dag?

A januari **B** maart **C** juni **D** oktober **E** december

3 Gegeven is zevenhoek $ABCDEFG$, waarvan alle zijden lengte 2 hebben. Bovendien geldt $\angle E = 120°$, $\angle C = \angle G = 90°$ en $\angle A = \angle B = \angle D = \angle F$. Wat is de oppervlakte van de zevenhoek?



A $10 + 2\sqrt{2}$ **C** 14 **E** $8 + 3\sqrt{6}$
B $8 + 3\sqrt{3}$ **D** $10 + 2\sqrt{6}$

4 Aline, Bram en Cas doen mee aan een wiskundewedstrijd met 12 vragen.
Vooraf zijn ze enigszins pessimistisch en doen ze de volgende uitspraken.
Aline: "Bram zal minstens twee vragen meer goed hebben dan ik."
Bram: "Ik zal niet meer dan vijf vragen goed hebben."
Cas: "Ik zal hoogstens zoveel vragen goed hebben als Aline."
Hun leraar probeert hun moed in te spreken en zegt: "Samen hebben jullie vast meer dan 18 vragen goed." Na afloop blijken zowel alle drie de leerlingen als hun leraar een foute voorspelling te hebben gedaan.
Wie heeft/hebben het kleinste aantal vragen goed beantwoord?

A alleen Aline
B alleen Bram
C alleen Cas
D zowel Aline als Bram
E dat kun je niet met zekerheid zeggen

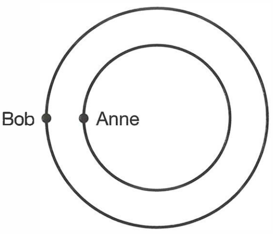
5 Van de getallen 1 tot en met 100 wil Jaap er zoveel mogelijk (verschillende) op een blaadje papier schrijven. Er mogen geen twee getallen op het blaadje komen die bij elkaar opgeteld 125 zijn.
Hoeveel getallen kan hij hoogstens op het blaadje schrijven?

A 50 **B** 61 **C** 62 **D** 63 **E** 64

6 Het getal $a = 11\ldots111$ bestaat uit precies 2011 enen.
Wat is de rest van a bij deling door 37?

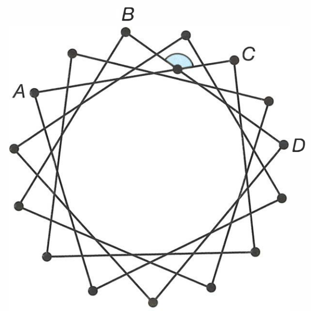
A 0 **B** 1 **C** 3 **D** 7 **E** 11

7 Anne en Bob zitten in een kermisattractie. Ze bewegen in cirkels rond hetzelfde middelpunt en in dezelfde richting. Anne gaat één keer per 20 seconden rond, Bob één keer per 28 seconden. Op een gegeven moment zijn ze op de kleinst mogelijke afstand van elkaar (zie de tekening).
Hoeveel seconden duurt het daarna voordat Anne en Bob juist zo ver mogelijk van elkaar verwijderd zijn?



A 22,5 **B** 35 **C** 40 **D** 49 **E** 70

8 De hoekpunten van een regelmatige vijftienhoek worden verbonden zoals in het plaatje. (Pas op: de afmetingen in het plaatje kloppen niet precies!) Hoe groot is de hoek, aangegeven met een boogje, tussen *AC* en *BD*?



A 130° **B** 132° **C** 135° **D** 136° **E** 137,5°

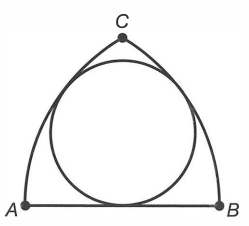
B-vragen

1 Voor het getal x geldt $x = \frac{1}{1+x}$. Bereken $x - \frac{1}{x}$. Vereenvoudig je antwoord zo ver mogelijk.

2 In een warenhuis loopt een roltrap van de begane grond naar de eerste verdieping. Dion gaat met deze roltrap omhoog; hij zet hierbij zelf ook nog een aantal stappen in een vast tempo. Raymond loopt over dezelfde roltrap, tegen de richting in, van boven naar beneden en zet hierbij stappen in hetzelfde tempo als Dion. Ze nemen allebei één trede per stap. Dion is na precies 12 stappen boven; Raymond is na precies 60 stappen beneden. Hoeveel stappen zou Dion nodig hebben om boven te komen als de roltrap stilstond?

3 Zes padvinders gaan op speurtocht. Op zaterdag gaan ze naar het bos en op zondag gaan ze de bergen in. Op beide dagen moeten ze in tweetallen hun weg vinden. Hun leider wil ze voor elk van beide tochten in paren verdelen, zó dat niemand op de tweede dag dezelfde partner heeft als op de eerste dag. Op hoeveel manieren kan hij dat doen?

4 In de figuur zie je een 'spitsboog' *ABC* en zijn ingeschreven cirkel. De spitsboog bestaat uit lijnstuk *AB* met lengte 1, cirkelboog *BC* met middelpunt *A* en cirkelboog *AC* met middelpunt *B*. Hoe groot is de straal van de ingeschreven cirkel van de spitsboog?



opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage	55	47	22	37	67	29	54	27	6	6	5	6

De 273 leerlingen uit vwo 4 met een score van 13 of meer zijn uitgenodigd voor de regionale ronde.

Gemengde opgaven

5 Machten en exponenten

1 Schrijf als macht van x.

a $x^4 \cdot \sqrt[3]{x}$

b $\dfrac{x^{-3}}{x^2}$

c $x \cdot \sqrt{\dfrac{1}{x^5}}$

d $\dfrac{1}{x}\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^8$

e $\dfrac{x^3 \cdot x^{-5}}{\sqrt{x}}$

f $\left(x\sqrt{x}\right)^{-3}$

2 Los algebraïsch op. Rond de oplossingen af op drie decimalen.
a $2 \cdot (5x)^{2,4} - 12 = 18$ **b** $3 \cdot \sqrt[4]{x^{-5}} = 16$

3 **a** Maak x vrij bij de formule $y = \sqrt{2 - 5x} - 3$.
b Maak A vrij bij de formule $B = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[5]{6A - 1} + 2$.
c Gegeven is de formule $4P\sqrt{Q} - \sqrt{Q} = 3$.
Druk Q uit in P.
d Gegeven zijn de formules $y = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$ en $x = 2t \cdot \sqrt[3]{t}$.
Druk y uit in t en herleid deze formule tot de vorm $y = at^b$.

4 Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

a $f(x) = 10 - 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x$

b $g(x) = 6 + \dfrac{3x}{8 - x}$

c $h(x) = -2 + 4 \cdot \left(1\frac{1}{6}\right)^x$

d $j(x) = \dfrac{2 + 6x}{3 - 2x} + 3^{x+1} - 2$

5 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x + 6} - 3$ en $g(x) = \dfrac{1}{x - 2} - 1$.
a Teken de grafieken van f en g in één figuur en geef B_f.
b Los op $f(x) \leq g(x)$. Rond in het antwoord zo nodig af op drie decimalen.
c Los algebraïsch op $f(x) \leq 1$.
d Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x < -2$?
e Los algebraïsch op $g(x) \geq -5$.
f Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $0 \leq x \leq 6$?

6 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{4x + 2}{2x + 3}$ en $g(x) = \dfrac{|4x + 2|}{2x + 3}$.

a Stel de formules op van de asymptoten van de grafieken van f en g.
b Voor welke waarden van x geldt $f(x) = g(x)$?
c Los algebraïsch op $g(x) \leq 1$.

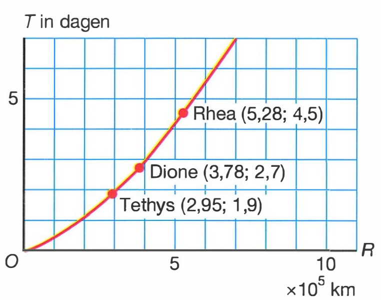
7 Bereken exact de oplossingen.

a $30 - 3^{3x + 1} = 3$
b $2^{x^2 - 2} = 32$
c $2 \cdot 3^{x - 1} + 5 = 59$
d $4^{3x + 1} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$
e $5^{1 - 3x} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{25}$
f $4^{3x - x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 - x}$
g $3^{x - 3} + 3^{x - 4} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$
h $\left(\frac{1}{3}\right)^{x + 2} = 9^{2x - 5}$
i $2^{x + 2} - 2^{x - 1} = 14\sqrt{2}$
j $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x + 2} + 2^{x + 3} = 4\frac{1}{8}$

8 Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 9,6% toe.
a Hoeveel procent is de toename per 10 jaar? Rond af op gehelen.
b Hoeveel procent is de toename per maand?

Een hoeveelheid neemt per dag met 17% af.
c Hoeveel procent is de afname per week?
d Hoeveel procent is de afname per uur?

9 De planeet Saturnus heeft vele manen. In de grafiek van figuur G.1 is voor drie van die manen het verband tussen de omlooptijd T in dagen en de straal R van de baan in 10^5 km af te lezen.
Sterrenkundigen hebben aangetoond dat $T = a \cdot R^{1,5}$.
Uit de figuur volgt dat a in twee decimalen nauwkeurig gelijk is aan 0,37.



figuur G.1

a Toon dit aan.
b De baan van de maan Iapetus heeft een straal van $35{,}6 \times 10^5$ km.
Hoeveel dagen is de omlooptijd?
c De straal van de baan van de maan Titan is $\frac{25}{11}$ keer de straal van de baan van de maan Rhea.
Hoeveel keer zo groot is de omlooptijd?
d Schrijf de formule in de vorm $R = pT^q$. Rond p en q af op twee decimalen.
e In 1980 heeft de Voyager enkele tot dan toe onbekende manen van Saturnus gefotografeerd. Van een van deze manen, de 1980S.27, is de omlooptijd 15 uur.
Bereken de straal van de baan.

10 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 \cdot 2^x - 2$ en $g(x) = 2^{x-3} + 1$.

a Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit een standaardgrafiek?

b Teken de grafieken van f en g in één figuur en geef B_f en B_g.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken in twee decimalen nauwkeurig.

d Los algebraïsch op $f(x) = -\frac{1}{2}$.

e Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \leq 7$?

f De grafieken van f en g snijden van de lijn $y = 9$ een lijnstuk AB af. Bereken de lengte van AB in twee decimalen nauwkeurig.

11 Op 1 mei start in een laboratorium een onderzoek met 1 miljard bacteriën. Aanvankelijk groeit de populatie bacteriën met 5% per dag. Doordat de onderzoekers de temperatuur veranderen, neemt vanaf 21 mei het aantal bacteriën per dag met 8% af. Het onderzoek duurt de gehele maand mei.

a Hoeveel bacteriën zijn er aan het eind van het onderzoek?

b Met welk percentage zou het aantal bacteriën vanaf 21 mei per dag moeten afnemen, opdat er aan het eind van het onderzoek weer precies 1 miljard bacteriën zijn?

c Een ander onderzoek met 1 miljard bacteriën start ook op 1 mei. Ook hier groeit de populatie aanvankelijk met 5% per dag. Vanaf een zekere dag neemt het aantal met 10% per dag af. Op 1 juni zijn er weer precies 1 miljard bacteriën. Op welke datum vindt de overgang plaats van toename naar afname?

12 Röntgenstraling wordt deels door het menselijk lichaam geabsorbeerd. Hoeveel straling geabsorbeerd wordt hangt af van het soort weefsel en de dikte ervan. Voor bot geldt dat de halveringsdikte 2 cm is. Dit betekent dat er bot met een dikte van 2 cm nodig is om de intensiteit van de röntgenstraling te halveren. P_b is het percentage van de röntgenstralingsintensiteit dat door bot met een dikte van d cm doordringt.
Er bestaat een exponentieel verband tussen P_b en d.

a Stel de formule op van P_b.

b Hoeveel mm bot is er nodig om 90% van de oorspronkelijke intensiteit van de röntgenstraling te absorberen? Rond af op gehelen.

Voor lood geldt de formule $P_l = 100 \cdot 0{,}03125^d$.
P_l is het percentage van de röntgenstralingsintensiteit dat door lood met een dikte van d cm doordringt.

c Bereken de halveringsdikte van lood.

d Hoeveel keer minder lood dan bot heb je nodig om 90% van de oorspronkelijke intensiteit van de röntgenstraling te absorberen?

13 Differentieer.

a $f(x) = (x^2 + 1)^4$

b $g(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 7}{2\sqrt{x}}$

c $h(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot (3x^2 - 5x)$

d $j(x) = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x^3 + 2}$

14 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

b Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen?

c Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in het punt A met $x_A = -2$.

15 Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{6}{(3x + 5) \cdot \sqrt{3x + 5}}$

b $g(x) = (2x + 6) \cdot \sqrt{x^2 + 6x + 10}$

c $h(x) = \dfrac{3x}{(x^2 - 6x)^3}$

d $j(x) = x^4 \cdot (2x^2 - 1)^3$

e $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3 + 1}}$

f $l(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 3x}{x\sqrt{x}}$

16 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^3 - x + 6}$.

a Toon met de afgeleide aan dat de functie een extreme waarde heeft voor $x = 1$.

De noemer is te ontbinden in $(x + 2)(x^2 - 2x + 3)$.

b Toon dit aan.

c Bereken de coördinaten van de perforatie van de grafiek van f.

d Los de vergelijking $f'(x) = 0$ algebraïsch op door eerst de formule van f te vereenvoudigen.

17 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2px^3 + px^2 - 4x - 2$.
Bereken exact voor welke waarden van p de grafiek van f_p twee buigpunten heeft.

18 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{10x + p}{x^2 + 1}$.
De lijn k met $\text{rc}_k = -1\frac{1}{2}$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 1$.
Stel algebraïsch de formule op van k.

19 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{-10x}{x^2 + 4}$.

a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f en geef B_f.

b Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ twee oplossingen?

20 Gegeven is de functie $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 2}$.

a De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A.

b De grafiek van f heeft twee horizontale raaklijnen.
Bereken exact de afstand tussen deze lijnen.

c Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen?

d Bereken algebraïsch de x-coördinaten van de punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $\frac{15}{16}$.

21 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 - px^2 - 4x + 1$.

a De functie f_p heeft een extreme waarde voor $x = 4$.
Bereken p en de andere extreme waarde.

b Bereken voor welke p de functie twee extreme waarden heeft.

c Stel een formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

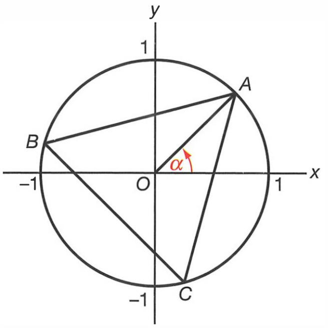
22 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x\sqrt{x} - p\sqrt{x}$.

a De lijn k: $y = 5x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 16$.
Bereken p en q.

b Stel een formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

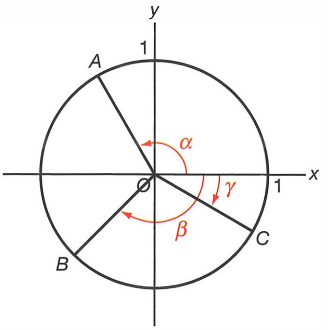
c Bereken voor welke p de grafiek van f_p een top heeft met $y_{top} = -2$.

23 De hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek ABC liggen op de eenheidscirkel. De draaiingshoek α is 40°. Zie figuur G.2.
Bereken de coördinaten van de punten A, B en C in drie decimalen nauwkeurig



figuur G.2

24 Op de eenheidscirkel liggen de punten A, B en C.
Gegeven is $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ rad, $x_B = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\gamma = -\frac{1}{6}\pi$ rad. Zie figuur G.3.
Bereken exact
a de coördinaten van A
b de coördinaten van C
c β in radialen
d de lengte van de langste cirkelboog BC.



figuur G.3

25 Bereken exact de oplossingen.

a $\cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
b $\sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$
c $1 + \tan\left(3x - \frac{3}{4}\pi\right) = 0$
d $\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)\cos(2x) = 0$
e $3\tan\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{3}$
f $4\cos^2\left(2\pi x - \frac{1}{2}\pi\right) = 3$

26 Los algebraïsch op.

a $\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(\pi - x)$
b $\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$
c $\sin(\pi x) = \sin(2\pi x)$
d $\cos(10\pi x) = \cos(5\pi x - 6\pi)$

27 Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$.

a $\sin\left(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
b $\cos^3\left(2\frac{1}{2}x\right) + \cos\left(2\frac{1}{2}x\right) = 0$
c $\sin^2\left(1\frac{1}{2}x\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}x\right) + 2$
d $\tan\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = \tan\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right)$

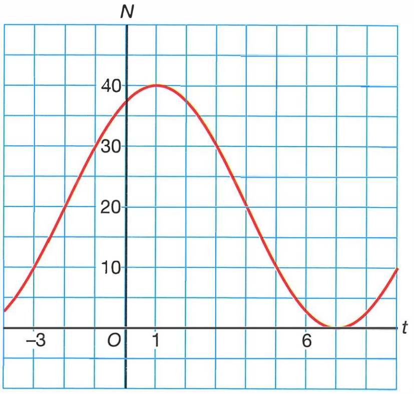
28 Gegeven is de functie $f(x) = \left|1 + 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)\right|$ met domein $[0, 4\pi]$.
a Schets de grafiek van f.
b De grafiek heeft drie punten met een horizontale raaklijn.
Bereken exact de coördinaten van deze punten.
c Los op $f(x) \geq 2$. Rond in het antwoord zo nodig af op twee decimalen.
d Bereken de maximale helling van de grafiek.

29 Gegeven zijn de volgende transformaties.
T_1: translatie $\left(\frac{1}{3}\pi, 0\right)$
T_2: translatie $(0, -2)$
T_3: vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 3
T_4: vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{2}$
Geef telkens de formule van de functie die ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door toepassing van achtereenvolgens de transformaties

a T_2 en T_3
b T_1 en T_4
c T_3, T_2 en T_4
d T_4, T_3 en T_2
e T_3, T_4, T_2 en T_4
f T_1, T_3, T_4 en T_2

30 **a** Herleid $\sin\left(4x - \frac{1}{3}\pi\right)$ tot de vorm $\cos(ax + b)$.
b Herleid $-\cos\left(3x + \frac{1}{6}\pi\right)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.
c Druk $3\sin^2(x) - 2\cos(x)$ uit in $\cos(x)$.
d Druk $3\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) - 2\cos^2(x)$ uit in $\sin(x)$.

31 In figuur G.4 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $N = a + b\sin(c(t - d))$ met $b > 0$
b $N = a + b\cos(c(t - d))$ met $b < 0$.



figuur G.4

32 Op het interval $[0, 4]$ zijn gegeven de functies
$f(x) = 15 + 20\cos(\pi x)$ en $g(x) = 30 - \tan\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$.
a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
b Geef van de grafiek van g een beginpunt, de periode en de asymptoten.
c Schets de grafieken van f en g in één figuur.
d Los op $f(x) < g(x)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

33 Differentieer.

a $f(x) = 3 - \sin\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$
b $g(x) = x^4\cos(3x - 4)$
c $h(x) = \dfrac{1}{\sin(x) + \cos(x)}$
d $j(x) = 2\pi x - \dfrac{3}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\pi x - 1\right)$
e $k(x) = \dfrac{x^2 + \cos(2x)}{\sin(2x)}$
f $l(x) = 4\cos^4(x)$
g $m(x) = x\sin^2(x)$
h $n(x) = 5x^2\tan(3x)$

34 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin(x) + \sin^2(x)$ met domein $[0, 4\pi]$.

a Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn l in het punt A met $x_A = \pi$.

b Bereken exact het bereik van f.

8 Meetkunde met coördinaten

35 **a** Bereken voor welke p de lijn $\begin{cases} x(t) = 2t + \frac{1}{2} \\ y(t) = \frac{4}{5}t + p \end{cases}$ de vergelijking $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$ heeft.

b Bereken voor welke p de lijn $\begin{cases} x(t) = 2t + p \\ y(t) = -1\frac{1}{2}t - 1 \end{cases}$ de vergelijking $3x + 4y = 2p$ heeft.

c Bereken voor welke p de lijn $\begin{cases} x(t) = 3t - p \\ y(t) = pt - 4 \end{cases}$ door het punt (3, 14) gaat.

36 Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.

a k: $3x + y = 6$ en l: $y = -2x + 3$

b m door (3, 0) en (0, 4) en n door (1, 1) en (3, 3)

c p: $y = \frac{1}{2}x + 2$ en q: $y = \frac{1}{3}x - 6$

37 De lijn k snijdt de assen in de punten $A(p + 1, 0)$ en $B(0, 3p)$.

a Stel een vergelijking op van k van de vorm $ax + by = c$.

b Voor welke p ligt het punt $C(-1, 6)$ op k?

c Voor welke p staat k loodrecht op de lijn l: $2x + 3y = 6$?

d Bereken algebraïsch voor welke waarden van p de afstand tussen A en B kleiner is dan 3.

e Voor welke waarden van p ligt het midden M van lijnstuk AB op de lijn m door O, die AB loodrecht snijdt?

38 Bereken exact de afstand van het punt $A(3, 4)$ tot

a het punt $B(6, 8)$

b de cirkel c_1: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$

c de cirkel c_2: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

d de lijn k: $3x + 4y = 15$.

39 Stel een vergelijking op van de lijn

a k die wordt beschreven door het stelsel $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 6 \\ y = 4t - 4 \end{cases}$

b l die door het punt $A(1, 2)$ gaat en loodrecht staat op de lijn m: $2x - 3y = 6$

c n die door het punt $B(3, 2)$ gaat en de cirkel met middellijn OB raakt

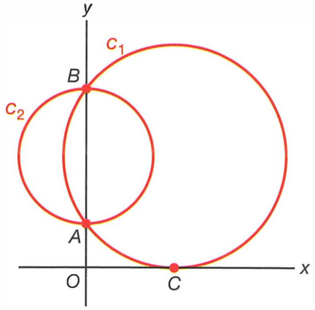
d p die door het punt $C(3, -1)$ gaat en die evenwijdig is met de lijn q door de punten (5, 0) en (0, -3).

40 Om een vergelijking op te stellen van de cirkel door de punten A, B en C, kun je gebruik maken van de constructie van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Zie het volgende werkschema.

1 Stel een vergelijking op van de middelloodlijn lijn k van lijnstuk AB.
2 Stel een vergelijking op van de middelloodlijn l van lijnstuk AC.
3 Bereken de coördinaten van het snijpunt M van k en l.
4 Bereken $d(M, A)$.
5 Geef de vergelijking van de cirkel.

a Licht bovenstaand werkschema toe.
b Stel een vergelijking op van de cirkel c door de punten $A(6, 8)$, $B(7, 1)$ en $C(-2, 4)$.

41 Gegeven zijn de punten $A(0, 2)$, $B(0, 8)$ en $C(4, 0)$. De cirkel c_1 gaat door A en B en raakt de x-as in C. De cirkel c_2 heeft middellijn AB. Zie de figuur hiernaast.



figuur G.5

a Stel van zowel c_1 als van c_2 een vergelijking op.
b Bereken de waarden van p waarvoor de lijn k: $3x + 4y = p$ de cirkel c_1 raakt.
c Er zijn twee raaklijnen van c_2 die door $O(0, 0)$ gaan.
Bereken de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken in graden nauwkeurig.
d Het punt P doorloopt c_2 en het punt Q is het midden van CP. Zo doorloopt Q de cirkel c_3.
Stel van c_3 een vergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

42 Gegeven zijn de cirkel c_1: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$ en de punten $A(0, -6)$ en $B(6, 0)$. Het punt P doorloopt c_1.
Het punt Q is het midden van het lijnstuk AP, het punt R is het midden van het lijnstuk BP en het punt S is het midden van het lijnstuk OP.
Het punt Z is het zwaartepunt van driehoek QRS. Het punt Z doorloopt de cirkel c_2.
Stel van c_2 een vergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

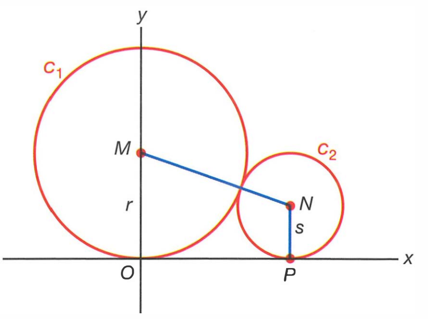
43 Gegeven is de cirkel c_p: $x^2 + y^2 + px + 4y - 5 = 0$.
a Neem $p = 2$ en bereken voor welke q de lijn k_q: $x - 3y = q$ de cirkel raakt.
b Bereken voor welke p de lijn l_p: $3x + y = p$ geen punten gemeenschappelijke heeft met c_p. Rond af op twee decimalen.

44 In de figuur hiernaast zijn in een assenstelsel de cirkels c_1 en c_2 getekend.
Het middelpunt M van c_1 ligt op de y-as en de straal van c_1 is r. Het middelpunt van c_2 is N en de straal is s.
Er geldt $r > s$.
De cirkels raken de x-as in de punten O en P.
De cirkels raken elkaar, dus $d(M,N) = r + s$.

a Neem $r = 9$ en $s = 4$ en bereken exact de oppervlakte van vierhoek $OPNM$.

b Toon aan dat de oppervlakte van vierhoek $OPNM$ gelijk is aan $(r + s)\sqrt{rs}$.

c Bereken algebraïsch voor welke r en s geldt dat $MN = 25$ en $OP = 15$.



figuur G.10

Overzicht GR-handleiding

Module

Berekeningen op het basisscherm ▪ Het basisscherm ▪ Eenvoudige berekeningen ▪ Mintekens ▪ Haakjes ▪ Tussenstappen ▪ De toets ANS ▪ Fouten verbeteren ▪ De toets ENTRY / REPLAY ▪ Breuken invoeren ▪ Decimaal getal omzetten in breuk ▪ Breuken vermenigvuldigen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 10
Formules, grafieken en tabellen ▪ Formules invoeren ▪ Grafieken plotten ▪ Het standaardscherm ▪ Formules uitzetten ▪ De trace-cursor ▪ Functiewaarden berekenen met de trace-cursor ▪ Functiewaarden berekenen op het basisscherm ▪ Tabellen maken ▪ Tabelinstelling veranderen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 39
Toppen en snijpunten ▪ Toppen van grafieken ▪ Snijpunten van grafieken ▪ Berekenen van nulpunten	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 39
Helling ▪ De richtingscoëfficiënt van een raaklijn	vwo B deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 60
Het gebruik van Ans en lettergeheugens ▪ De toets ANS ▪ Het gebruik van lettergeheugens	vwo B deel 1 hoofdstuk 4 bladzijde 141
Allerlei ▪ Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Trefwoordenregister

A

afhankelijk stelsel *142*
amplitude *113*
assenvergelijking *145, 147*

B

beeldgrafiek *10*
beginpunt *13, 114*
buigpunt *64*
buigraaklijn *65*

D

draaiingshoek *96*

E

eenheidscirkel *96*
eerstegraads gebroken functie *22*
evenwichtsstand *113*
exacte-waarden-cirkel *103*
exponent *8*
exponentieel verband *49*
exponentieel verval *44*
exponentiële afname *44*
exponentiële functie *36*
exponentiële groei *44*
exponentiële ongelijkheid *39*
exponentiële standaardfunctie *36*
exponentiële vergelijking *40*

G

gebroken exponenten en hogeremachtswortels *32*
gebroken functie *20*
goniometrische formules *119*
goniometrische functie *113*
groeifactor *44*
groeipercentage *44*
grondtal *8*

H

hoek tussen lijnen *149*
horizontale asymptoot *20*
hyperbool *20*

K

kettingfunctie *75*
kettingregel *75*
koorden en de sinus *98*

L

limiet *20*
loodrechte projectie *156*

M

macht *8*
machtsfunctie *9*
middelpuntshoek *100*

N

nulpunt *113*

P

parameter *84, 144*
parametervoorstelling van cirkel *164*
parametervoorstelling van lijn *144*
periode *113*

R

rad *100*
radiaal *100, 101*
reële getallen *36*
rekenregels voor machten *8*
richtingshoek *148*

S

samengestelde functie *75*
schakel *75*
sinusoïde *114*
standaardfunctie *9*
standaardgrafiek *9*
standaardlimiet *20*
strijdig stelsel *142*

T

tak van hyperbool *20*
tangensfunctie *129*
transformatie *14*
translatie *13*
tweede afgeleide *65*

V

vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as *11*
vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as *114*
verticale asymptoot *20*
vrijmaken van variabele *18*

W

wortelfunctie *13*

Verantwoording

Fotoresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam
Illustratieverwerving: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: OKS, Delhi (India)

Foto's
ImageSelect, Wassenaar: blz. 6-7, 54-55
Shutterstock: blz. 47, 49
Corbis: blz. 73, 92-93
ANPPhoto, Rijswijk: blz. 138-139
Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, Arnhem: blz. 180, 181

Met betrekking tot sommige teksten en/of illustratiemateriaal is het de uitgever, ondanks zorgvuldige inspanningen daartoe, niet gelukt eventuele rechthebbende(n) te achterhalen. Mocht u van mening zijn (auteurs-)rechten te kunnen doen gelden op teksten en/of illustratiemateriaal in deze uitgave dan verzoeken wij u contact op te nemen met de uitgever.

Colofon
Omslagontwerp: In Ontwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: OKS, Delhi (India)

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
www.fsc.org

0 / 15

ISBN 978 90 01 84233 8

GETAL& RUIMTE

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
FSC www.fsc.org

ISBN 978-90-01-84233-8

9 789001 842338

www.getalenruimte.noordhoff.nl