Inhoud

Voor sommige (computer)opgaven is geen uitwerking opgenomen.
Deze zijn aangegeven met een *.

1 Functies en grafieken

Voorkennis Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden

Bladzijde 8

1 **a** $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$

$10 - 3x - 3 = 5x - 2x + 1$

$-3x - 5x + 2x = 1 - 10 + 3$

$-6x = -6$

$x = \frac{-6}{-6} = 1$

b $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$

$12x - 20 = 35x - 45$

$-23x = -25$

$x = \frac{-25}{-23} = 1\frac{2}{23}$

c $\frac{2t - 3}{4} = t - 1\frac{1}{3}$

$6t - 9 = 12t - 16$

$-6t = -7$

$t = \frac{-7}{-6} = 1\frac{1}{6}$

d $1{,}6(2x - 1) = 1{,}4x - 2$

$3{,}2x - 1{,}6 = 1{,}4x - 2$

$3{,}2x - 1{,}4x = -2 + 1{,}6$

$1{,}8x = -0{,}4$

$x = \frac{-0{,}4}{1{,}8} = \frac{-4}{18} = -\frac{2}{9}$

e $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$

$8(4x - 1) = 21(1 - 5x)$

$32x - 8 = 21 - 105x$

$137x = 29$

$x = \frac{29}{137}$

f $5 - \frac{3t - 1}{6} = \frac{5t + 1}{4} - \frac{2t + 3}{3}$

$60 - 2(3t - 1) = 3(5t + 1) - 4(2t + 3)$

$60 - 6t + 2 = 15t + 3 - 8t - 12$

$-6t - 15t + 8t = 3 - 12 - 2 - 60$

$-13t = -71$

$t = \frac{-71}{-13} = 5\frac{6}{13}$

Bladzijde 9

2 **a** $3x > 5x$

$-2x > 0$

$x < 0$

b $\frac{1}{6}x + 3 < \frac{1}{2}x - 2$

$x + 18 < 3x - 12$

$-2x < -30$

$x > 15$

c $\frac{3p - 4}{3} \leq 2p - 1\frac{1}{6}$

$2(3p - 4) \leq 12p - 7$

$6p - 8 \leq 12p - 7$

$-6p \leq 1$

$p \geq -\frac{1}{6}$

d $1{,}5(1{,}6x - 2) < 2{,}5(1{,}4x - 3)$

$2{,}4x - 3 < 3{,}5x - 7{,}5$

$-1{,}1x < -4{,}5$

$-11x < -45$

$x > \frac{-45}{-11}$

$x > 4\frac{1}{11}$

e $\frac{3}{8}(5x - 2) > \frac{1}{4}(2x - 5)$

$3(5x - 2) > 2(2x - 5)$

$15x - 6 > 4x - 10$

$11x > -4$

$x > -\frac{4}{11}$

f $10 - \frac{2a - 3}{6} \geq \frac{4a - 1}{5} - \frac{3a + 2}{15}$

$300 - 5(2a - 3) \geq 6(4a - 1) - 2(3a + 2)$

$300 - 10a + 15 \geq 24a - 6 - 6a - 4$

$-10a - 24a + 6a \geq -6 - 4 - 300 - 15$

$-28a \geq -325$

$a \leq 11\frac{17}{28}$

1.1 Lineaire functies

Bladzijde 10

1 **a** Ga je 1 naar rechts, dan ga je 2 omhoog.
Het getal 3 geeft aan dat de lijn de y-as in het punt $(0,3)$ snijdt.

b Stel l: $y = ax + b$.
Het snijpunt met de y-as is $(0,2)$, dus $b = 2$.
l gaat door $(0,2)$ en $(2,1)$, dus $a = \dfrac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \dfrac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.
Dus l: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

c Stel m: $y = ax + b$.
Het snijpunt met de y-as is $(0,-1)$, dus $b = -1$.
m is evenwijdig met l dus $a = -\frac{1}{2}$.
Dus m: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Bladzijde 11

2 **a** Stel k: $y = ax + b$.
$k \,//\, l$, dus $a = \text{rc}_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(4,3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\cdot 4 + b = 3 \\ -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus k: $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

b
$$\left.\begin{array}{l} m\colon y = ax + 3 \\ \text{door } B(-4,2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a\cdot -4 + 3 = 2 \\ -4a + 3 = 2 \\ -4a = -1 \\ a = \frac{1}{4} \end{array}$$

c p snijden met de x-as, dus $y = 0$, geeft $-1\frac{1}{2}x + 6 = 0$

$$-1\tfrac{1}{2}x = -6$$
$$x = 4$$

Dus p snijdt de x-as in $(4, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} n\colon y = 2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (4,0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2}\cdot 4 + b = 0 \\ 10 + b = 0 \\ b = -10 \end{array}$$

3 **a** Stel l: $y = ax + b$.
$a = \text{rc}_l = -2$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(-2,3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2\cdot -2 + b = 3 \\ 4 + b = 3 \\ b = -1 \end{array}$$

Dus l: $y = -2x - 1$.

b Stel k: $y = ax + b$.
$k \,//\, m$, dus $a = \text{rc}_m = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 4x + b \\ \text{door } B(-5,21) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4\cdot -5 + b = 21 \\ -20 + b = 21 \\ b = 41 \end{array}$$

Dus k: $y = 4x + 41$.

4 **a** Stel p: $y = ax + b$.
$p \,//\, q$, dus $a = \text{rc}_q = -\frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } C(-18,30) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3}\cdot -18 + b = 30 \\ 6 + b = 30 \\ b = 24 \end{array}$$

Dus p: $y = -\frac{1}{3}x + 24$.

b Snijpunt met de x-as: $y = 0$ geeft $-\frac{1}{3}x + 24 = 0$

$$-\tfrac{1}{3}x = -24$$
$$x = \frac{-24}{-\frac{1}{3}} = 72$$

Dus het snijpunt met de x-as is $(72, 0)$.
Snijpunt met de y-as: $x = 0$ geeft $y = -\frac{1}{3}\cdot 0 + 24 = 24$.
Dus het snijpunt met de y-as is $(0, 24)$.

5 **a** $\left.\begin{array}{l} k\colon y = ax + 10 \\ \text{door } P(-20, 0) \end{array}\right\}$ $a \cdot -20 + 10 = 0$
$-20a = -10$
$a = \frac{1}{2}$

b $\left.\begin{array}{l} k\colon y = ax + 10 \\ \text{door } Q(2, -4) \end{array}\right\}$ $a \cdot 2 + 10 = -4$
$2a = -14$
$a = -7$

c $\left.\begin{array}{l} k\colon y = ax + 10 \\ \text{door } O(0, 0) \end{array}\right\}$ $a \cdot 0 + 10 = 0$
$10 = 0$ dit kan niet
Er is dus geen a mogelijk.

Bladzijde 12

6 **a** $\left.\begin{array}{l} m\colon y = -2x + b \\ \text{door } P(-8, 0) \end{array}\right\}$ $-2 \cdot -8 + b = 0$
$16 + b = 0$
$b = -16$

b $m \,//\, l$ indien $rc_l = rc_m$, dus $a = -2$.
$\left.\begin{array}{l} m\colon y = -2x + b \\ \text{door } Q(10, 7) \end{array}\right\}$ $-2 \cdot 10 + b = 7$
$-20 + b = 7$
$b = 27$

c k gaat door $R(8, 6)$ want $6 = \frac{1}{2} \cdot 8 + 2$.
$\left.\begin{array}{l} l\colon y = ax - 4 \\ \text{door } R(8, 6) \end{array}\right\}$ $a \cdot 8 - 4 = 6$
$8a - 4 = 6$
$8a = 10$
$a = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$
$\left.\begin{array}{l} m\colon y = -2x + b \\ \text{door } R(8, 6) \end{array}\right\}$ $-2 \cdot 8 + b = 6$
$-16 + b = 6$
$b = 22$

d $\left.\begin{array}{l} k\colon y = \frac{1}{2}x + 2 \\ \text{snijpunt met } x\text{-as: } y = 0 \end{array}\right\}$ $\frac{1}{2}x + 2 = 0$
$\frac{1}{2}x = -2$
$x = -4$
Dus het snijpunt met de x-as is $(-4, 0)$.
$\left.\begin{array}{l} l\colon y = ax - 4 \\ \text{door } (-4, 0) \end{array}\right\}$ $a \cdot -4 - 4 = 0$
$-4a - 4 = 0$
$-4a = 4$
$a = -1$
$\left.\begin{array}{l} m\colon y = -2x + b \\ \text{door } (-4, 0) \end{array}\right\}$ $-2 \cdot -4 + b = 0$
$8 + b = 0$
$b = -8$

7 **a** Kies x zo dat de formule geen a meer bevat.
Voor $k\colon y = ax + 1$ geldt dat
$x = 0$ geeft $y = a \cdot 0 + 1 = 1$, dus $A(0, 1)$.
Voor $l\colon y = 2ax - 2a$ geldt dat
$y = 2ax - 2a = 2a(x - 1)$
$x = 1$ geeft $y = 2a(1 - 1) = 0$, dus $B(1, 0)$.

b k en l snijden in A dus
$\left.\begin{array}{l} l\colon y = 2ax - 2a \\ \text{door } A(0, 1) \end{array}\right\}$ $2a \cdot 0 - 2a = 1$
$-2a = 1$
$a = -\frac{1}{2}$
k en l snijden in B dus
$\left.\begin{array}{l} k\colon y = ax + 1 \\ \text{door } B(1, 0) \end{array}\right\}$ $a \cdot 1 + 1 = 0$
$a + 1 = 0$
$a = -1$

c $\left.\begin{array}{l} k\colon y = ax + 1 \\ x_C = 10 \end{array}\right\}$ $y = a \cdot 10 + 1 = 10a + 1$

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 2ax - 2a \\ x_C = 10 \end{array}\right\}$ $y = 2a \cdot 10 - 2a = 18a$

Formules aan elkaar gelijkstellen geeft $10a + 1 = 18a$
$-8a = -1$
$a = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$

Dus $y_C = \frac{1}{8} \cdot 10 + 1 = \frac{10}{8} + 1 = 1\frac{1}{4} + 1 = 2\frac{1}{4}$.

8 **a** Ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus ga je 1 naar rechts, dan ga je $\frac{3}{4}$ omhoog.
Dus $\text{rc}_l = \frac{3}{4}$.

b Deel $y_B - y_A$ door $x_B - x_A$. Dus $\text{rc}_l = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{4}$.

Bladzijde 14

9 **a** Stel k: $y = ax + b$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-8}{20-8} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } (8, 8) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 8 + b = 8 \\ 2 + b = 8 \\ b = 6 \end{array}$$

Dus k: $y = \frac{1}{4}x + 6$.

Stel l: $y = ax + b$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10-14}{50-2} = \frac{-24}{48} = -\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (2, 14) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 14 \\ -1 + b = 14 \\ b = 15 \end{array}$$

Dus l: $y = -\frac{1}{2}x + 15$.

k en l snijden geeft

$\frac{1}{4}x + 6 = -\frac{1}{2}x + 15$

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x = 15 - 6$

$\frac{3}{4}x = 9$

$3x = 36$

$x = 12$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + 6 \\ x = 12 \end{array}\right\} y = \frac{1}{4} \cdot 12 + 6 = 3 + 6 = 9$$

Dus $E(12, 9)$.

b Stel $N = aM + b$.

$$\left.\begin{array}{l} M = 5 \text{ en } N = 62 \\ M = 20 \text{ en } N = 86 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta N}{\Delta M} = \frac{86-62}{20-5} = \frac{24}{15} = 1\tfrac{3}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} N = 1\frac{3}{5}M + b \\ M = 5 \text{ en } N = 62 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{3}{5} \cdot 5 + b = 62 \\ 8 + b = 62 \\ b = 54 \end{array}$$

Dus $N = 1\frac{3}{5}M + 54$.

Stel $M = aN + b$.

$$\left.\begin{array}{l} N = 62 \text{ en } M = 5 \\ N = 86 \text{ en } M = 20 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta M}{\Delta N} = \frac{20-5}{86-62} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} M = \frac{5}{8}N + b \\ N = 62 \text{ en } N = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{5}{8} \cdot 62 + b = 5 \\ 38\frac{3}{4} + b = 5 \\ b = -33\frac{3}{4} \end{array}$$

Dus $M = \frac{5}{8}N - 33\frac{3}{4}$.

Alternatieve oplossing

Omwerken van de formule geeft M uitgedrukt in N.

$N = 1\frac{3}{5}M + 54$

$1\frac{3}{5}M + 54 = N$

$8M + 270 = 5N$

$8M = 5N - 270$

$M = \frac{5}{8}N - 33\frac{3}{4}$

10 **a** Stel l: $y = ax + b$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{1--1} = \frac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (1, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 + b = 4 \\ 1\frac{1}{2} + b = 4 \\ b = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus l: $y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

b Stel k: $y = ax + b$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-5}{2--3} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + b \\ \text{door } (2, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + b = 0 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus k: $y = -x + 2$.

c Stel m: $y = ax + b$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{-7-5} = \frac{0}{-12} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y = b \\ \text{door } (5, 3) \end{array}\right\} b = 3$$

Dus m: $y = 3$.

d Stel n: $y = ax + b$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{250-360}{160-180} = \frac{-110}{-20} = 5\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 5\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (180, 360) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5\frac{1}{2} \cdot 180 + b = 360 \\ 990 + b = 360 \\ b = -630 \end{array}$$

Dus n: $y = 5\frac{1}{2}x - 630$.

11 **a** Stel $K = am + b$.

$$\left.\begin{array}{l} m = 5 \text{ en } K = 10 \\ m = 12 \text{ en } K = 115 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta K}{\Delta m} = \frac{115-10}{12-5} = \frac{105}{7} = 15$$

$$\left.\begin{array}{l} K = 15m + b \\ m = 5 \text{ en } K = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 15 \cdot 5 + b = 10 \\ 75 + b = 10 \\ b = -65 \end{array}$$

Dus $K = 15m - 65$.

b Stel $F = aR + b$.

$$\left.\begin{array}{l} R = 15 \text{ en } F = 300 \\ R = 42 \text{ en } F = 138 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta F}{\Delta R} = \frac{138 - 300}{42 - 15} = \frac{-162}{27} = -6$$

$$\left.\begin{array}{l} F = -6R + b \\ R = 15 \text{ en } F = 300 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -6 \cdot 15 + b = 300 \\ -90 + b = 300 \\ b = 390 \end{array}$$

Dus $F = -6R + 390$.

c Stel $g = an + b$.

$$\left.\begin{array}{l} n = 6 \text{ en } g = 35 \\ n = 10 \text{ en } g = 49 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta g}{\Delta n} = \frac{49 - 35}{10 - 6} = \frac{14}{4} = 3\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g = 3\tfrac{1}{2}n + b \\ n = 6 \text{ en } g = 35 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3\tfrac{1}{2} \cdot 6 + b = 35 \\ 21 + b = 35 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus $g = 3\tfrac{1}{2}n + 14$.

12 **a** Stel $p = aq + b$.

$$\left.\begin{array}{l} q = 150 \text{ en } p = 7{,}75 \\ q = 425 \text{ en } p = 2{,}25 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{2{,}25 - 7{,}75}{425 - 150} = \frac{-5{,}5}{275} = -0{,}02$$

$$\left.\begin{array}{l} p = -0{,}02q + b \\ q = 150 \text{ en } p = 7{,}75 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}02 \cdot 150 + b = 7{,}75 \\ -3 + b = 7{,}75 \\ b = 10{,}75 \end{array}$$

Dus $p = -0{,}02q + 10{,}75$.

Stel $q = ap + b$.

$$\left.\begin{array}{l} p = 7{,}75 \text{ en } q = 150 \\ p = 2{,}25 \text{ en } q = 425 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{425 - 150}{2{,}25 - 7{,}75} = \frac{275}{-5{,}5} = -50$$

$$\left.\begin{array}{l} p = -50q + b \\ p = 7{,}75 \text{ en } q = 150 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -50 \cdot 7{,}75 + b = 150 \\ -387{,}5 + b = 150 \\ b = 537{,}5 \end{array}$$

Dus $q = -50p + 537{,}5$.

Alternatieve oplossing

Omwerken van de formule geeft q uitgedrukt in p.

$p = -0{,}02q + 10{,}75$

$0{,}02q = -p + 10{,}75$

$q = -50p + 537{,}5$

b

$$\left.\begin{array}{l} p = -0{,}02q + 10{,}75 \\ q = 250 \end{array}\right\} p = -0{,}02 \cdot 250 + 10{,}75 = 5{,}75$$

$$\left.\begin{array}{l} q = -50p + 537{,}5 \\ p = 4{,}25 \end{array}\right\} q = -50 \cdot 4{,}25 + 537{,}5 = 325$$

Bladzijde 15

13 **a** Stel $h = at + b$.

$$\left.\begin{array}{l} t = 12 \text{ en } h = 164{,}0 \\ t = 18 \text{ en } h = 152{,}8 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{152{,}8 - 164{,}0}{18 - 12} = -1\tfrac{13}{15}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = -1\tfrac{13}{15}t + b \\ t = 12 \text{ en } h = 164{,}0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\tfrac{13}{15} \cdot 12 + b = 164{,}0 \\ -22{,}4 + b = 164{,}0 \\ b = 186{,}4 \end{array}$$

Dus $h = -1\tfrac{13}{15}t + 186{,}4$.

b $h = 156{,}7$ geeft $-1\tfrac{13}{15}t + 186{,}4 = 156{,}7$

$$-1\tfrac{13}{15}t = -29{,}7$$

$$t = \frac{-29{,}7}{-1\tfrac{13}{15}} \approx 15{,}9$$

De auto passeert hectometerpaal 156,7 om ongeveer 14:16 uur.

14 Stel $y = ax + b$.

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p + 2 - (p + 1)}{2p - p} = \frac{1}{p}$

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{p}x + b \\ \text{door } (p, p + 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{p} \cdot p + b = p + 1 \\ 1 + b = p + 1 \\ b = p \end{array}$

Dus $y = \frac{1}{p}x + p$.

Snijden met de x-as: $y = 0$ geeft $\frac{1}{p}x + p = 0$

$\frac{1}{p}x = -p$

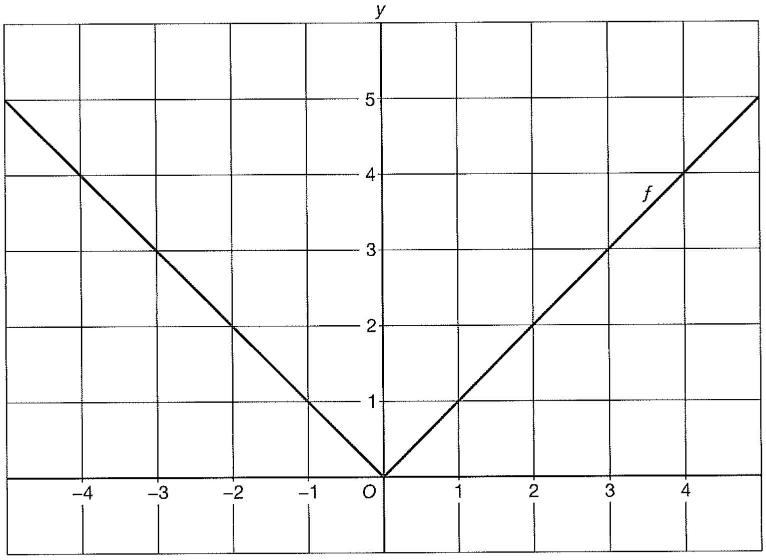
$x = -p^2$

Voor $p \neq 0$ geldt dat $-p^2 < 0$, dus $x < 0$.
Dus elke lijn snijdt de negatieve x-as.

15 **a**

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2	3	4

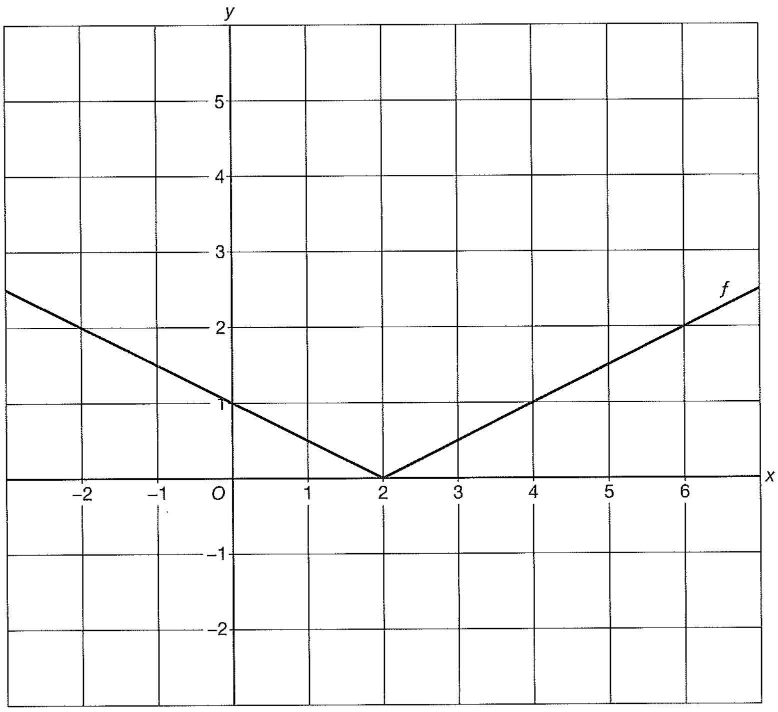
b



Bladzijde 16

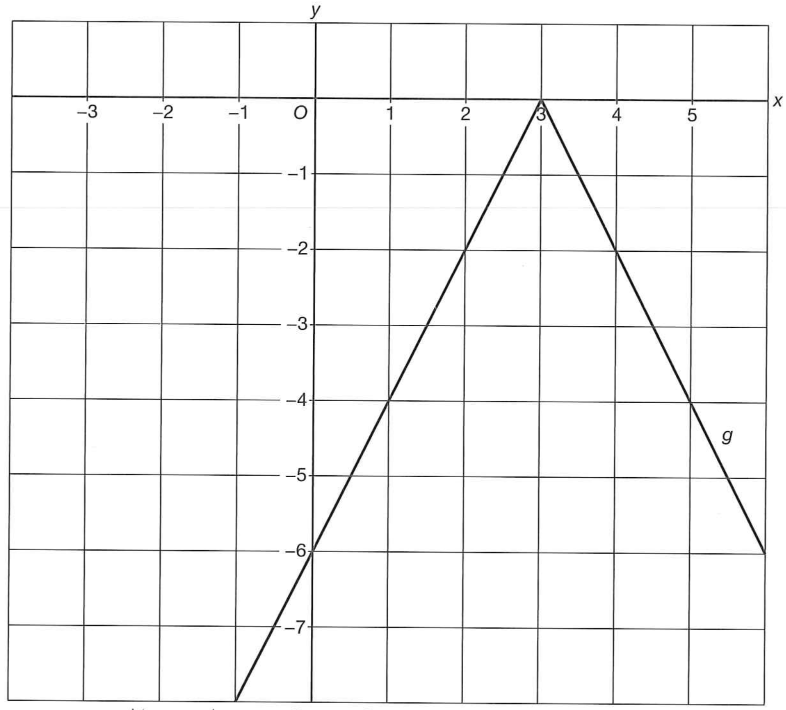
16 **a** $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| = \frac{1}{2}x - 1$ als $\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$, dus als $x \geq 2$.

$f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| = -\frac{1}{2}x + 1$ als $\frac{1}{2}x - 1 < 0$, dus als $x < 2$.

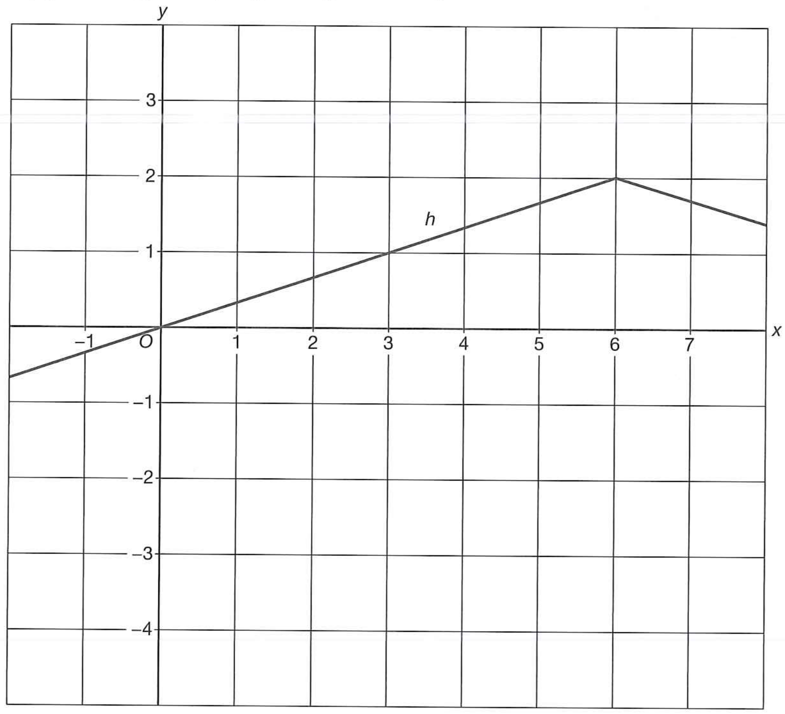


1

b $g(x) = -|2x - 6| = -2x + 6$ als $2x - 6 \geq 0$, dus als $x \geq 3$.
$g(x) = -|2x - 6| = 2x - 6$ als $2x - 6 < 0$, dus als $x < 3$.

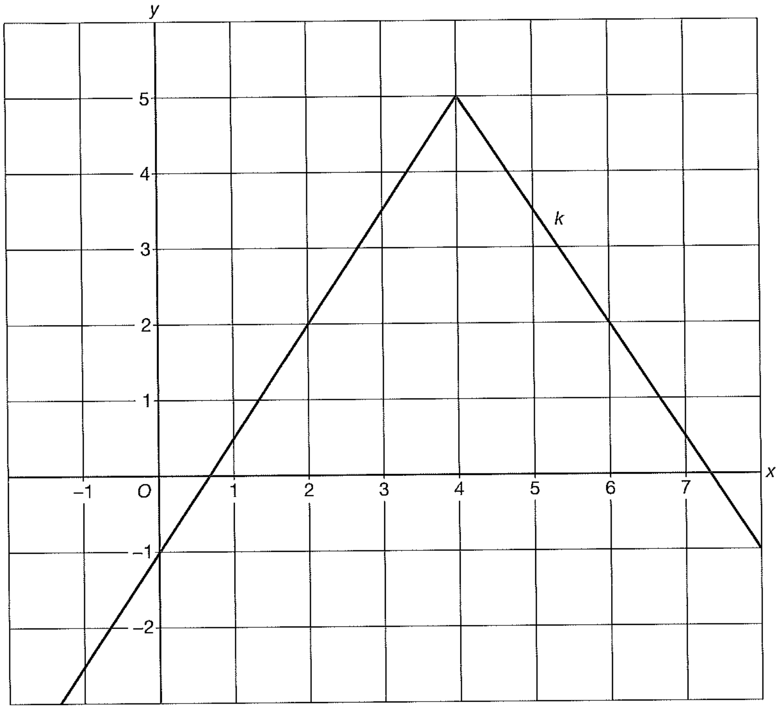


c $h(x) = 2 - |\frac{1}{3}x - 2| = 4 - \frac{1}{3}x$ als $\frac{1}{3}x - 2 \geq 0$, dus als $x \geq 6$.
$h(x) = 2 - |\frac{1}{3}x - 2| = \frac{1}{3}x$ als $\frac{1}{3}x - 2 < 0$, dus als $x < 6$.



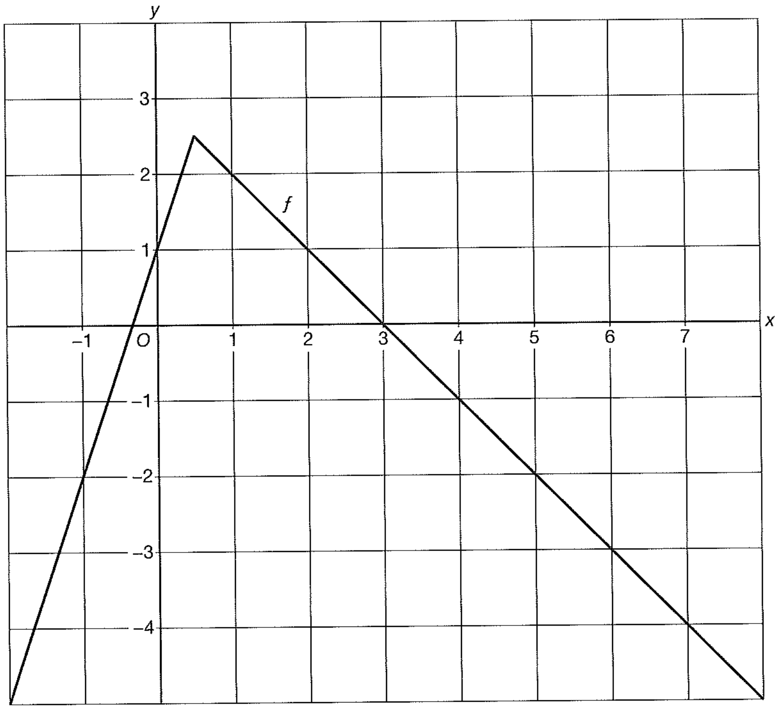
d $k(x) = 5 - |6 - 1\frac{1}{2}x| = -1 + 1\frac{1}{2}x$ als $6 - 1\frac{1}{2}x \geq 0$, dus als $x \leq 4$.

$k(x) = 5 - |6 - 1\frac{1}{2}x| = 11 - 1\frac{1}{2}x$ als $6 - 1\frac{1}{2}x < 0$, dus als $x > 4$.

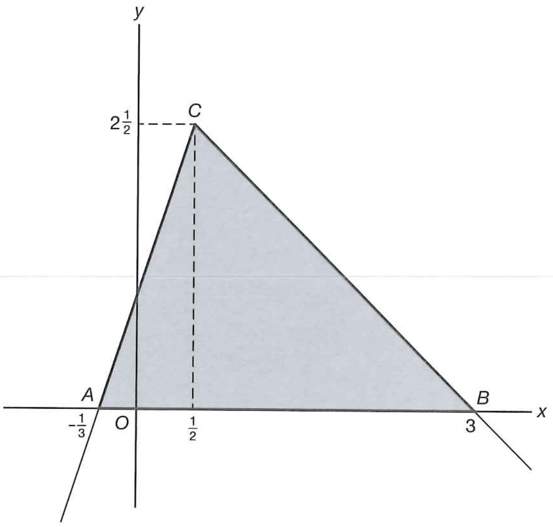


17 **a** $f(x) = x + 2 - |2x - 1| = -x + 3$ als $2x - 1 \geq 0$, dus als $x \geq \frac{1}{2}$.

$f(x) = x + 2 - |2x - 1| = 3x + 1$ als $2x - 1 < 0$, dus als $x < \frac{1}{2}$.



b



$x_C = \frac{1}{2}$ geeft $y = -\frac{1}{2} + 3 = 2\frac{1}{2}$, dus $C\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$.

$y_A = 0$ geeft $3x + 1 = 0$

$3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

Dus $A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.

$y_C = 0$ geeft $-x + 3 = 0$

$-x = -3$

$x = 3$

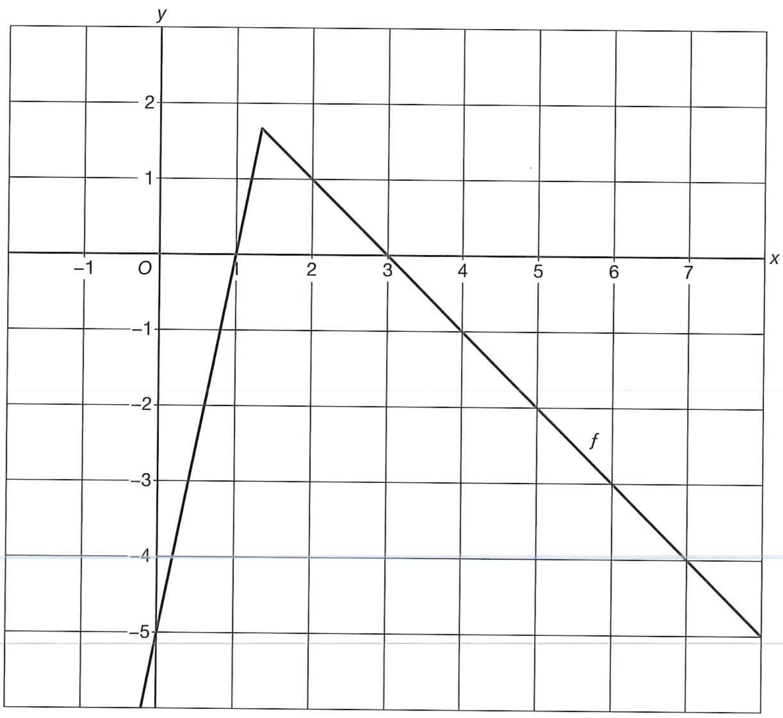
Dus $B(0, 3)$.

De oppervlakte van het ingesloten vlakdeel is $\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{6}$.

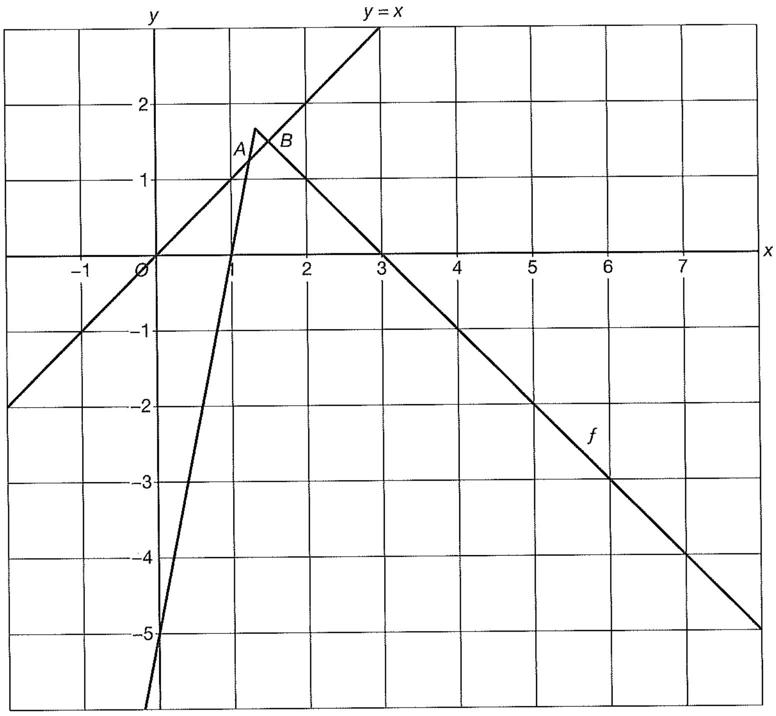
18 **a** $f(x) = ax - 1 - |3x - 4| = (a - 3)x + 3$ als $3x - 4 \geq 0$, dus als $x \geq 1\frac{1}{3}$.

$f(x) = ax - 1 - |3x - 4| = (a + 3)x - 5$ als $3x - 4 < 0$, dus als $x < 1\frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = (a+3)x - 5 \\ \text{door } (1, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (a+3) \cdot 1 - 5 = 0 \\ a + 3 - 5 = 0 \\ a = 2 \end{array}$$



b



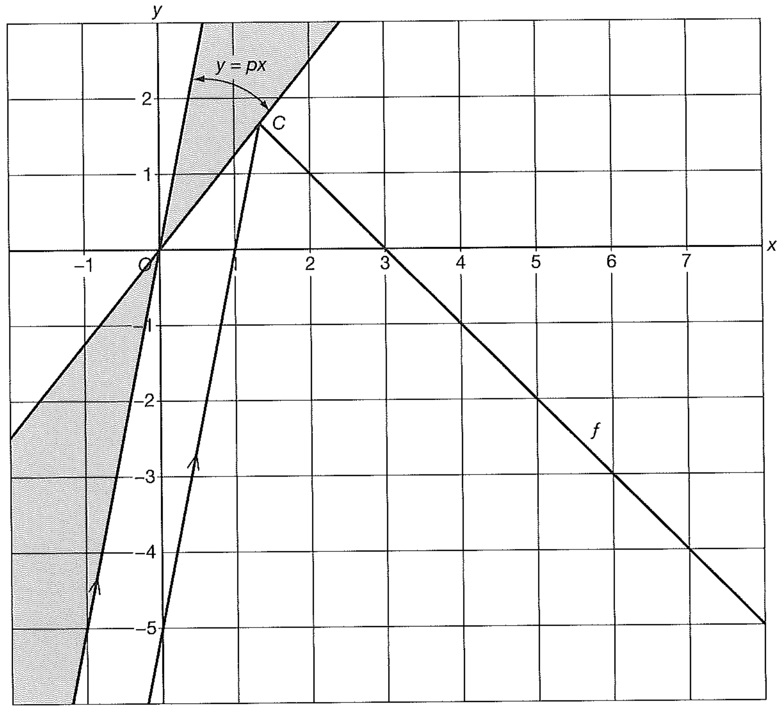
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 5x - 5 \\ y = x \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5x - 5 = x \\ 4x = 5 \\ x = 1\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $A\left(1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x + 3 \\ y = x \end{array}\right\} \begin{array}{l} -x + 3 = x \\ -2x = -3 \\ x = \frac{-3}{-2} = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $B\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$.

c



1

$x = 1\frac{1}{3}$ geeft $y = -1\frac{1}{3} + 3 = 1\frac{2}{3}$, dus $C(1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3})$.

$$\left.\begin{array}{l} y = px \\ \text{door } C(1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}) \end{array}\right\} \; p \cdot 1\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$$

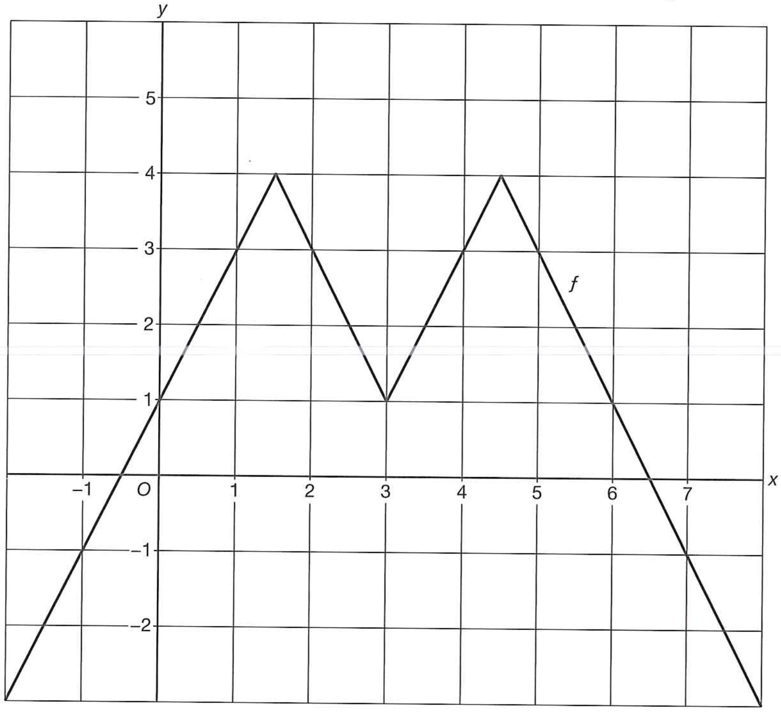
$$1\frac{1}{3}p = 1\frac{2}{3}$$

$$4p = 5$$

$$p = 1\frac{1}{4}$$

Voor $p = 1\frac{1}{4}$ gaat de grafiek van $y = px$ door het punt C.
Voor $p = 5$ is de lijn $y = px$ evenwijdig met f.
Dus de lijn $y = px$ heeft geen enkel punt met f gemeen voor $1\frac{1}{4} < p \leq 5$.

19 $f(x) = 4 - |3 - |2x - 6|| = 4 - |-2x + 9|$ als $2x - 6 \geq 0$, dus als $x \geq 3$.
Dit geeft $f(x) = 4 - |-2x + 9| = 2x - 5$ als $9 - 2x \geq 0$, dus als $3 \leq x \leq 4\frac{1}{2}$
en $f(x) = 4 - |-2x + 9| = -2x + 13$ als $9 - 2x < 0$, dus als $x > 4\frac{1}{2}$.
$f(x) = 4 - |3 - |2x - 6|| = 4 - |2x - 3|$ als $2x - 6 < 0$, dus als $x < 3$.
Dit geeft $f(x) = 4 - |2x - 3| = -2x + 7$ als $2x - 3 \geq 0$, dus als $1\frac{1}{2} \leq x < 3$
en $f(x) = 4 - |2x - 3| = 2x + 1$ als $2x - 3 < 0$, dus als $x < 1\frac{1}{2}$.



1.2 Tweedegraadsvergelijkingen

Bladzijde 18

20 **a** Bij $4x^2 - 25x = 0$ breng je x buiten de haakjes en bij $4x^2 - 25 = 0$ schrijf je de vergelijking eerst in de vorm $x^2 = c$.

b $4x^2 + 25 = 0$
$4x^2 = -25$
$x^2 = -6{,}25$
geen oplossingen

c $x(x + 2) = 0$ los je op met behulp van de regel: $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.
Dit geldt niet voor $x(x + 2) = 8$, omdat het rechterlid niet gelijk is aan 0.

Bladzijde 20

21 **a** $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

$\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$

b $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\vee x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\vee x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\vee x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

22 **a** $2x^2-13x=3(x-10)$
$2x^2-13x=3x-30$
$2x^2-16x+30=0$
$x^2-8x+15=0$
$(x-3)(x-5)=0$
$x=3\vee x=5$

b $3x^2+2x+7=7(x+1)$
$3x^2+2x+7=7x+7$
$3x^2-5x=0$
$x(3x-5)=0$
$x=0\vee 3x-5=0$
$x=0\vee 3x=5$
$x=0\vee x=1\frac{2}{3}$

c $100(x^2-1)=525$
$100x^2-100=525$
$100x^2=625$
$x^2=6\frac{1}{4}$
$x=2\frac{1}{2}\vee x=-2\frac{1}{2}$

d $2(x-3)^2=3x-10$
$2(x^2-6x+9)=3x-10$
$2x^2-12x+18=3x-10$
$2x^2-15x+28=0$
$D=(-15)^2-4\cdot2\cdot28=1$
$x=\frac{15-1}{4}=3\frac{1}{2}\vee x=\frac{15+1}{4}=4$

e $5(4x-1)(6x-5)=0$
$4x-1=0\vee 6x-5=0$
$4x=1\vee 6x=5$
$x=\frac{1}{4}\vee x=\frac{5}{6}$

f $\frac{1}{4}(2x-3)^2-3=1$
$\frac{1}{4}(2x-3)^2=4$
$(2x-3)^2=16$
$2x-3=4\vee 2x-3=-4$
$2x=7\vee 2x=-1$
$x=3\frac{1}{2}\vee x=-\frac{1}{2}$

23 **a** $(3x-2)^2=36$
$3x-2=6\vee 3x-2=-6$
$3x=8\vee 3x=-4$
$x=2\frac{2}{3}\vee x=-1\frac{1}{3}$

b $\left(4-\frac{1}{2}x\right)^2=9$
$4-\frac{1}{2}x=3\vee 4-\frac{1}{2}x=-3$
$-\frac{1}{2}x=-1\vee -\frac{1}{2}x=-7$
$x=2\vee x=14$

c $x^2+6=5x$
$x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0$
$x=2\vee x=3$

d $x(x-1)=12$
$x^2-x=12$
$x^2-x-12=0$
$(x+3)(x-4)=0$
$x=-3\vee x=4$

e $2x^2=5x$
$2x^2-5x=0$
$x(2x-5)=0$
$x=0\vee 2x-5=0$
$x=0\vee 2x=5$
$x=0\vee x=2\frac{1}{2}$

f $x^2+4=1$
$x^2=-3$
geen oplossingen

24 a $3x^2 - 6x = 24$
$3x^2 - 6x - 24 = 0$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x+2)(x-4) = 0$
$x = -2 \vee x = 4$

b $3x^2 - 6x = -3(x-6)$
$3x^2 - 6x = -3x + 18$
$3x^2 - 3x - 18 = 0$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x+2)(x-3) = 0$
$x = -2 \vee x = 3$

c $2x^2 - 3x = 2$
$2x^2 - 3x - 2 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$
$x = \dfrac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \vee x = \dfrac{3+5}{4} = 2$

d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$
$x^2 - 4x - 12 = 0$
$(x+2)(x-6) = 0$
$x = -2 \vee x = 6$

e $x^2 - 3x = 5(x-3)$
$x^2 - 3x = 5x - 15$
$x^2 - 8x + 15 = 0$
$(x-3)(x-5) = 0$
$x = 3 \vee x = 5$

f $2x^2 - 5x = 3x$
$2x^2 - 8x = 0$
$2x(x-4) = 0$
$x = 0 \vee x = 4$

25 a $6 - x^2 = -2$
$-x^2 = -8$
$x^2 = 8$
$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \vee x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

b $2x^2 = 9x + 5$
$2x^2 - 9x - 5 = 0$
$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 121$
$x = \dfrac{9-11}{4} = -\frac{1}{2} \vee x = \dfrac{9+11}{4} = 5$

c $3(x+2)^2 + 5 = 80$
$3(x+2)^2 = 75$
$(x+2)^2 = 25$
$x + 2 = 5 \vee x + 2 = -5$
$x = 3 \vee x = -7$

d $\frac{1}{2}(x-3)^2 - 3 = 5$
$\frac{1}{2}(x-3)^2 = 8$
$(x-3)^2 = 16$
$x - 3 = 4 \vee x - 3 = -4$
$x = 7 \vee x = -1$

e $-(2x-1)^2 + 5 = 1$
$-(2x-1)^2 = -4$
$(2x-1)^2 = 4$
$2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$
$2x = 3 \vee 2x = -1$
$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

f $8 - 3(4x-5)^2 = 5$
$-3(4x-5)^2 = -3$
$(4x-5)^2 = 1$
$4x - 5 = 1 \vee 4x - 5 = -1$
$4x = 6 \vee 4x = 4$
$x = 1\frac{1}{2} \vee x = 1$

26 a $x^2 - 5x = 0$
$x(x-5) = 0$
$x = 0 \vee x - 5 = 0$
$x = 0 \vee x = 5$

b $x^2 - 5x = 14$
$x^2 - 5x - 14 = 0$
$(x+2)(x-7) = 0$
$x = -2 \vee x = 7$

c $x^2 - 5 = 14$
$x^2 = 19$
$x = \sqrt{19} \vee x = -\sqrt{19}$

d $x^2 - 5 = 14x$
$x^2 - 14x - 5 = 0$
$(x-7)^2 - 49 - 5 = 0$
$(x-7)^2 = 54$
$x - 7 = \sqrt{54} \vee x - 7 = -\sqrt{54}$
$x - 7 = 3\sqrt{6} \vee x - 7 = -3\sqrt{6}$
$x = 7 + 3\sqrt{6} \vee x = 7 - 3\sqrt{6}$

e $(2x-1)(3x+6) = 0$
$2x - 1 = 0 \vee 3x + 6 = 0$
$2x = 1 \vee 3x = -6$
$x = \frac{1}{2} \vee x = -2$

f $(2x-1)(3x+6) = 9x$
$6x^2 + 12x - 3x - 6 = 9x$
$6x^2 = 6$
$x^2 = 1$
$x = 1 \vee x = -1$

g $3x(2x-1) = 6$
$6x^2 - 3x = 6$
$6x^2 - 3x - 6 = 0$
$2x^2 - x - 2 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 17$
$x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \vee x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$
$x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} \vee x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}$

h $3x(2x-1) = 6 - 9x$
$6x^2 - 3x = 6 - 9x$
$6x^2 + 6x - 6 = 0$
$x^2 + x - 1 = 0$
$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$
$x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

27 a $(x+3)^2 = 16x$
$x^2 + 6x + 9 = 16x$
$x^2 - 10x + 9 = 0$
$(x-1)(x-9) = 0$
$x = 1 \vee x = 9$

b $(2x+3)^2 = -16$
geen oplossingen

c $2(x+3)^2 = -4x$
$2(x^2 + 6x + 9) = -4x$
$2x^2 + 16x + 18 = 0$
$x^2 + 8x + 9 = 0$
$(x+4)^2 - 16 + 9 = 0$
$(x+4)^2 = 7$
$x + 4 = \sqrt{7} \vee x + 4 = -\sqrt{7}$
$x = -4 + \sqrt{7} \vee x = -4 - \sqrt{7}$

d $(2x+3)(4-x) = 9$
$8x - 2x^2 + 12 - 3x = 9$
$-2x^2 + 5x + 3 = 0$
$D = 5^2 - 4 \cdot -2 \cdot 3 = 49$
$x = \dfrac{-5-7}{-4} = 3 \vee x = \dfrac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2}$

e $(-4x+3)^2 = 36$
$-4x + 3 = 6 \vee -4x + 3 = -6$
$-4x = 3 \vee -4x = -9$
$x = -\frac{3}{4} \vee x = 2\frac{1}{4}$

f $-4(x+3)^2 = 4x$
$x^2 + 6x + 9 = -x$
$x^2 + 7x + 9 = 0$
$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13$
$x = \dfrac{-7-\sqrt{13}}{2} \vee x = \dfrac{-7+\sqrt{13}}{2}$
$x = -3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = -3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$

g $x^2 - (x+1)^2 = (x+3)^2$
$x^2 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 6x + 9$
$x^2 - x^2 - 2x - 1 = x^2 + 6x + 9$
$-x^2 - 8x - 10 = 0$
$x^2 + 8x + 10 = 0$
$(x+4)^2 - 16 + 10 = 0$
$(x+4)^2 = 6$
$x + 4 = \sqrt{6} \vee x + 4 = -\sqrt{6}$
$x = -4 + \sqrt{6} \vee x = -4 - \sqrt{6}$

h $(x+3)^2 + (x+2)^2 = 25$
$x^2 + 6x + 9 + x^2 + 4x + 4 = 25$
$2x^2 + 10x - 12 = 0$
$x^2 + 5x - 6 = 0$
$(x-1)(x+6) = 0$
$x = 1 \vee x = -6$

Bladzijde 21

28 a $x^2 + 8x = 20$
$x(x+8) = 20$
$(x+4)^2 = 20 + 4^2$
$(x+4)^2 = 36$
$x + 4 = 6$
$x = 2$
$x^2 + 18x = 20$
$x(x+18) = 20$
$(x+9)^2 = 20 + 9^2$
$(x+9)^2 = 101$
$x + 9 \approx \frac{1}{2}\left(10 + \dfrac{101}{10}\right)$
$x + 9 \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{201}{10}$
$x \approx \frac{201}{20} - 9 = 10\frac{1}{20} - 9 = 1\frac{1}{20}$

b $x^2 + bx = c$
$x(x+b) = c$
$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2$
$x + \frac{1}{2}b = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2}$
$x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2} - \frac{1}{2}b$

c $x^2 + bx = c$
$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = c$
$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2$
$x + \frac{1}{2}b = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2}$
$x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2} - \frac{1}{2}b$

29 a $p = -1$ geeft $x^2 - x - 6 = 0$
$(x+2)(x-3) = 0$
$x = -2 \vee x = 3$

b $p = 2$ geeft $x^2 + 2x - 6 = 0$
$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = 28$
$D > 0$, dus de vergelijking $x^2 + 2x - 6 = 0$ heeft twee oplossingen.

c $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = p^2 + 24$
Omdat $D = p^2 + 24$ groter is dan nul voor elke waarde van p, heeft de vergelijking $x^2 + px - 6 = 0$ voor elke p twee oplossingen.

Bladzijde 22

30 a $\left.\begin{array}{l} D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 49 - 4p \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\}$ $49 - 4p > 0$
$-4p > -49$
$p < 12\frac{1}{4}$

1

b $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -p = 25 + 8p$
twee oplossingen als $D > 0$
$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \begin{aligned} 25 + 8p &> 0 \\ 8p &> -25 \\ p &> -3\tfrac{1}{8} \end{aligned}$

c $D = 4^2 - 4 \cdot -3 \cdot -p = 16 - 12p$
twee oplossingen als $D > 0$
$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \begin{aligned} 16 - 12p &> 0 \\ -12p &> -16 \\ p &< 1\tfrac{1}{3} \end{aligned}$

d $D = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot p = 9 - p$
twee oplossingen als $D > 0$
$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \begin{aligned} 9 - p &> 0 \\ -p &> -9 \\ p &< 9 \end{aligned}$

Bladzijde 23

31 **a** $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = p^2 - 100$
twee oplossingen als $D > 0$
$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \begin{aligned} p^2 - 100 &> 0 \\ p^2 &> 100 \\ p < -10 &\vee p > 10 \end{aligned}$

b $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = p^2 - 16$
geen oplossingen als $D < 0$
$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \begin{aligned} p^2 - 16 &< 0 \\ p^2 &< 16 \\ -4 < p &< 4 \end{aligned}$

c $D = p^2 - 4 \cdot -2 \cdot 3 = p^2 + 24$
twee oplossingen als $D > 0$
$\}$ $p^2 + 24 > 0$ voor elke p.
De vergelijking heeft dus twee oplossingen voor elke p.

32 **a** $x = 1$ invullen geeft $1^2 + 2 \cdot 1 + p = 0$
$$\begin{aligned} 1 + 2 + p &= 0 \\ p &= -3 \end{aligned}$$
$p = -3$ geeft $x^2 + 2x - 3 = 0$
$$\begin{aligned} (x-1)(x+3) &= 0 \\ x = 1 &\vee x = -3 \end{aligned}$$
Dus $p = -3$ en de andere oplossing is $x = -3$.

b $x = 2$ invullen geeft $p \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 10 = 0$
$$\begin{aligned} 4p - 22 + 10 &= 0 \\ 4p &= 12 \\ p &= 3 \end{aligned}$$
$p = 3$ geeft $3x^2 - 11x + 10 = 0$
$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 1$$
$$x = \frac{11 - 1}{6} = 1\tfrac{2}{3} \vee x = \frac{11 + 1}{6} = 2$$
Dus $p = 3$ en de andere oplosing is $x = 1\tfrac{2}{3}$.

33 **a** $-3 < p < 0 \vee p > 0$
b $-4 < p < 0 \vee 0 < p < 4$

34 **a** $p = 0$ geeft $3x + 1 = 0$
Dit is een lineaire vergelijking, dus de vergelijking heeft één oplossing.

b De discriminant geldt alleen voor het bepalen van het aantal oplossingen van een kwadratische vergelijking. Er is alleen sprake van een kwadratische vergelijking onder de voorwaarde dat $p \neq 0$.

c Voor $p \neq 0$ is $D = 3^2 - 4 \cdot p \cdot 1 = 9 - 4p$
twee oplossingen als $D > 0$
$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \begin{aligned} 9 - 4p &> 0 \\ -4p &> -9 \\ p &< 2\tfrac{1}{4} \end{aligned}$

Voor $p = 0$ heeft de vergelijking één oplossing.
Dus de vergelijking heeft twee oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < 2\tfrac{1}{4}$.

35 **a** $p = 0$ geeft $5x + 2 = 0$, dus één oplossing voor $p = 0$.
Voor $p \neq 0$ is $D = 5^2 - 4 \cdot p \cdot 2 = 25 - 8p$
twee oplossingen als $D > 0$

$$\left.\begin{matrix} D = 25 - 8p \\ D > 0 \end{matrix}\right\} \begin{aligned} 25 - 8p &> 0 \\ -8p &> -25 \\ p &< 3\tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

Dus de vergelijking heeft twee oplossingen voor $p < 0 \ \vee \ 0 < p < 3\frac{1}{8}$.

b $p = 0$ geeft $-3x - 4 = 0$, dus één oplossing voor $p = 0$.
Voor $p \neq 0$ is $D = (-3)^2 - 4 \cdot p \cdot -4 = 9 + 16p$
twee oplossingen als $D > 0$

$$\begin{aligned} 9 + 16p &> 0 \\ 16p &> -9 \\ p &> -\tfrac{9}{16} \end{aligned}$$

Dus de vergelijking heeft twee oplossingen voor $-\frac{9}{16} < p < 0 \vee p > 0$.

36 **a** $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 1 - 8p$
geen oplossingen als $D < 0$

$$\begin{aligned} 1 - 8p &< 0 \\ -8p &< -1 \\ p &> \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

b $p = 0$ geeft $x = 0$, dus één oplossing voor $p = 0$.
Voor $p \neq 0$ is $D = 1^2 - 4 \cdot p \cdot p = 1 - 4p^2$
twee oplossingen als $D > 0$

$$\begin{aligned} 1 - 4p^2 &> 0 \\ -4p^2 &> -1 \\ p^2 &< \tfrac{1}{4} \\ -\tfrac{1}{2} < p &< \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus de vergelijking heeft twee oplossingen voor $-\frac{1}{2} < p < 0 \ \vee \ 0 < p < \frac{1}{2}$.

c $D = p^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = p^2 - 8$
twee oplossingen als $D > 0$

$$\begin{aligned} &p^2 - 8 > 0 \\ &p^2 > 8 \\ &p < -\sqrt{8} \ \vee \ p > \sqrt{8} \\ &p < -2\sqrt{2} \ \vee \ p > 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

37 **a** $p = 0$ geeft $6x + 9 = 0$
$6x = -9$
$x = -1\frac{1}{2}$

Voor $p \neq 0$ is $D = 6^2 - 4 \cdot p \cdot 9 = 36 - 36p$
één oplossing als $D = 0$

$$\begin{aligned} 36 - 36p &= 0 \\ -36p &= -36 \\ p &= 1 \end{aligned}$$

$p = 1$ geeft $x^2 + 6x + 9 = 0$
$(x + 3)(x + 3) = 0$
$x = -3$

Voor $p = 0$ is de oplossing $x = -1\frac{1}{2}$ en voor $p = 1$ is de oplossing $x = -3$.

b $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = p^2 - 4$
één oplossing als $D = 0$

$$\begin{aligned} &p^2 - 4 = 0 \\ &p^2 = 4 \\ &p = 2 \vee p = -2 \end{aligned}$$

$p = 2$ geeft $x^2 + 2x + 1 = 0$
$(x + 1)(x + 1) = 0$
$x = -1$

$p = -2$ geeft $x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x - 1)(x - 1) = 0$
$x = 1$

Voor $p = 2$ is de oplossing $x = -1$ en voor $p = -2$ is de oplossing $x = 1$.

38 Stel de vergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$.
Er moet gelden dat
- de vergelijking geen twee oplossingen heeft voor $p = 0$
- voor $p \neq 0$ er twee oplossingen zijn voor $p > -4$.

Voor $a = p$ zijn er geen twee oplossingen voor $p = 0$, dus $px^2 + bx + c = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Voor } p \neq 0 \text{ is } D = b^2 - 4 \cdot p \cdot c = b^2 - 4pc \\ \text{twee oplossingen als } D > 0\end{array}\right\} \begin{array}{l} b^2 - 4pc > 0 \\ pc < \frac{1}{4}b^2\end{array}$$

Neem bijvoorbeeld $b = 4$ en $c = -1$, dan is $p \cdot -1 < \frac{1}{4} \cdot 4^2$
$$-p < 4$$
$$p > -4$$
Dit geeft de tweedegraadsvergelijking $px^2 + 4x - 1 = 0$.

1.3 Extreme waarden en inverse functies

Bladzijde 25

39 **a** $f(x) = 0$ geeft $ax^2 + bx = 0$
$$x(ax + b) = 0$$
$$x = 0 \vee ax + b = 0$$
$$x = 0 \vee ax = -b$$
$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$
$x_{\text{top}} =$ is het gemiddelde van 0 en $-\frac{b}{a}$.

Dus $x_{\text{top}} = \dfrac{0 + -\frac{b}{a}}{2} = -\dfrac{b}{2a}$.

b De parabool $y = ax^2 + bx + c$ ontstaat uit de grafiek van f door de verschuiving c omhoog.
Bij deze verschuiving verandert de x_{top} niet.

Bladzijde 26

40 max. is $g(1) = 4$
min. is $h(2) = 1$

41 **a** $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ geeft $y_{\text{top}} = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$
$1 > 0$, dus dalparabool en min. is $f(2) = -3$.

b $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot 2} = -1\frac{1}{2}$ geeft $y_{\text{top}} = g\left(-1\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot -1\frac{1}{2} + 3 = -1\frac{1}{2}$
$2 > 0$, dus dalparabool en min. is $g\left(-1\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{2}$.

c $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot -0{,}3} = 10$ geeft $y_{\text{top}} = h(10) = -0{,}3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 - 2 = 28$
$-0{,}3 < 0$ dus bergparabool en max. is $h(10) = 28$.

d $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{14}{2 \cdot 4} = -1\frac{3}{4}$ geeft $y_{\text{top}} = k\left(-1\frac{3}{4}\right) = 4 \cdot \left(-1\frac{3}{4}\right)^2 + 14 \cdot -1\frac{3}{4} = -12\frac{1}{4}$
$4 > 0$ dus dalparabool en min. is $k\left(-1\frac{3}{4}\right) = -12\frac{1}{4}$.

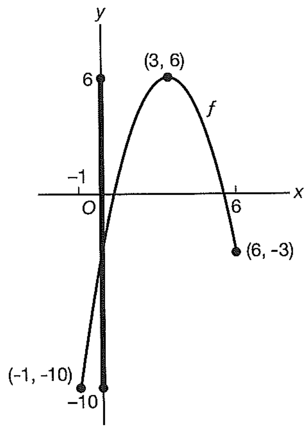
42 **a** $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0{,}4}{2 \cdot -0{,}01} = 20$ geeft $h_{\text{top}} = -0{,}01 \cdot 20^2 + 0{,}4 \cdot 20 + 5 = 9$
$-0{,}01 < 0$, dus bergparabool.
Dus de bal komt maximaal 9 meter hoog.

b $h = 0$ geeft $-0{,}01x^2 + 0{,}4x + 5 = 0$
$$x^2 - 40x - 500 = 0$$
$$(x + 10)(x - 50) = 0$$
$$x = -10 \vee x = 50$$
De bal komt 50 meter verderop op de grond.

Bladzijde 28

43 **a** $f(-1) = -(-1)^2 + 6 \cdot -1 - 3 = -10$ en $f(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 3 = -3$

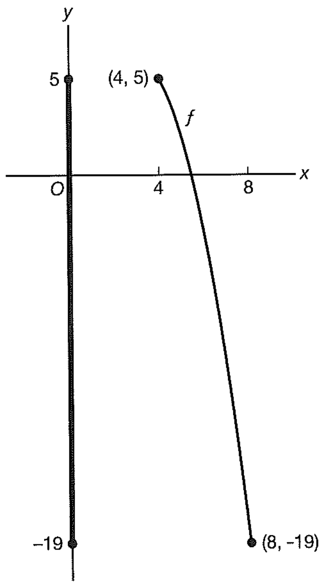
$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot -1} = 3$ en $y_{top} = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 3 = 6$



Dus $B_f = [-10, 6]$.

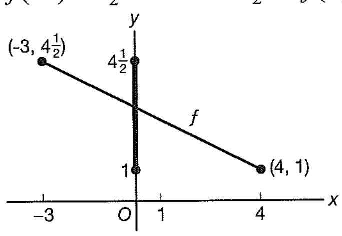
b $f(4) = -4^2 + 6 \cdot 4 - 3 = 5$ en $f(8) = -8^2 + 6 \cdot 8 - 3 = -19$

$x_{top} = 3$ (zie vraag a)



Dus $B_f = [-19, 5]$.

44 $f(-3) = -\frac{1}{2} \cdot -3 + 3 = 4\frac{1}{2}$ en $f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 1$



Dus $B_f = [1, 4\frac{1}{2}]$.

45 **a** $\left.\begin{array}{l} h = -0{,}004x^2 + 0{,}62x \\ h = 3 \end{array}\right\}$ $-0{,}004x^2 + 0{,}62x = 3$

$-0{,}004x^2 + 0{,}62x - 3 = 0$

$x^2 - 155x + 750 = 0$

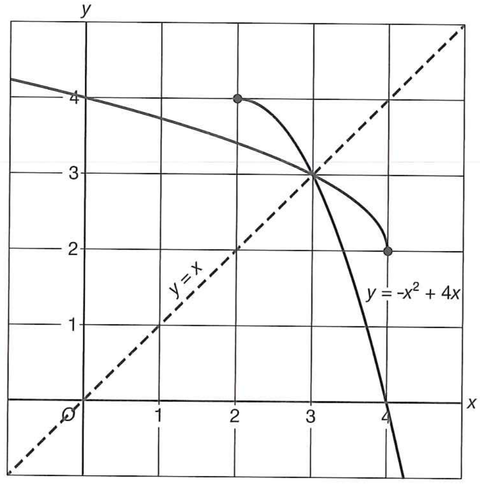
$(x - 150)(x - 5) = 0$

$x = 150 \ \vee \ x = 5$

De golfbal komt neer na 150 m, dus $D_{golfbal} = [0, 150]$.

b $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,62}{2 \cdot -0,004} = 77,5$ en $h_{top} = -0,004 \cdot 77,5^2 + 0,62 \cdot 77,5 = 24,025$
De golfbal komt 24,025 m hoog, dus $B_{golfbal} = [0; 24,025]$.

46

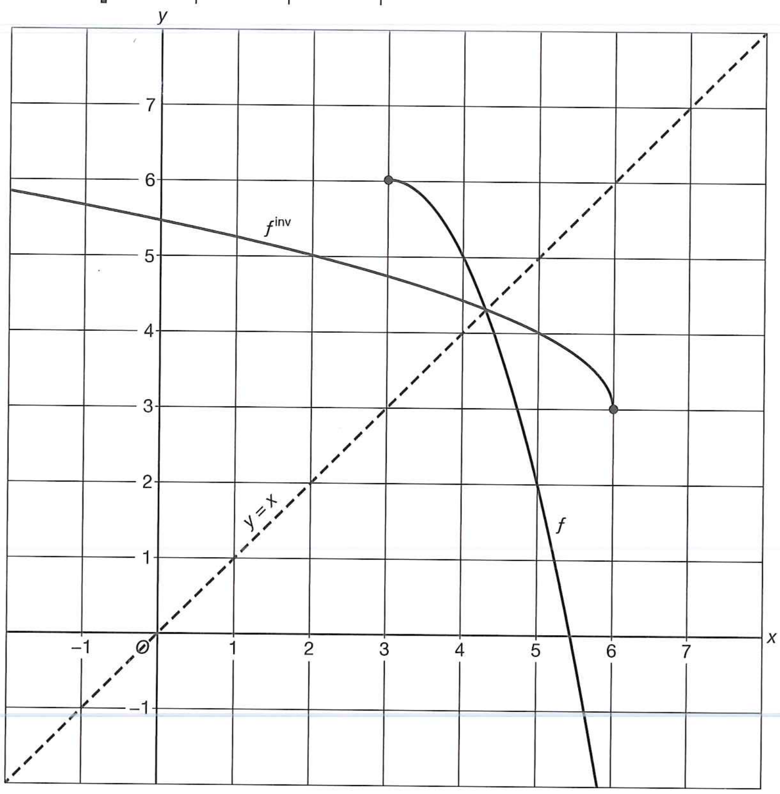


Bladzijde 30

47 $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot -1} = 3$, dus $a = 3$.

x	3	4	5	6
$f(x)$	6	5	2	-3

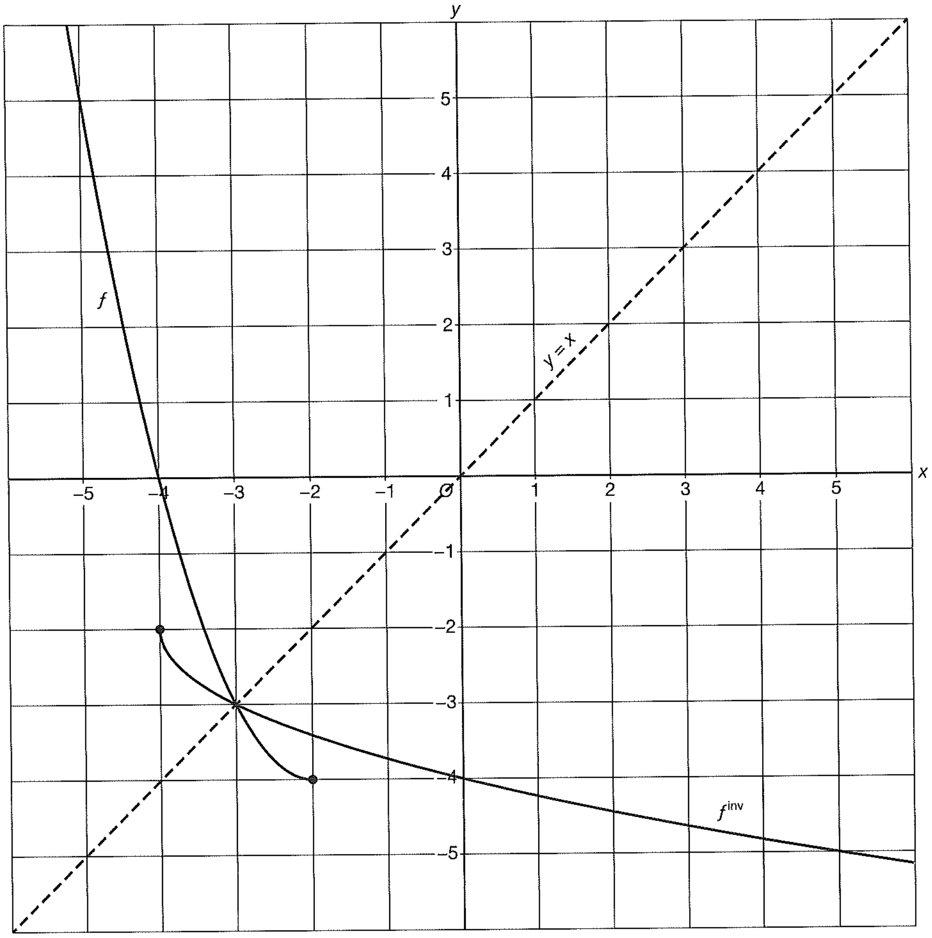
x	6	5	2	-3
$f^{inv}(x)$	3	4	5	6



48 **a**

x	-5	-4	-3	-2
$f(x)$	5	0	-3	-4

x	5	0	-3	-4
$f^{\text{inv}}(x)$	-5	-4	-3	-2



b $f^{\text{inv}}(5)$ betekent $f(x) = 5$, dus $x^2 + 4x = 5$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

$x = -5 \ \vee \ x = 1$

vold. niet vold.

Dus $f^{\text{inv}}(5) = 1$.

c Voor elke f en f^{inv} geldt vanwege symmetrie dat de gemeenschappelijke punten op de lijn $y = x$ liggen.

$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + 4x \\ y = x \end{array}\right\} \ x^2 + 4x = x$

$x^2 + 3x = 0$

$x(x + 3) = 0$

$x = 0 \ \vee \ x = -3$

vold. vold. niet

Voor f geldt dat alleen het punt (0, 0) op de lijn $y = x$ ligt. Er is dus precies één gemeenschappelijk punt.

d Op $D_f = \langle \leftarrow, a]$ bestaat f^{inv} alleen voor $a \leq -2$.

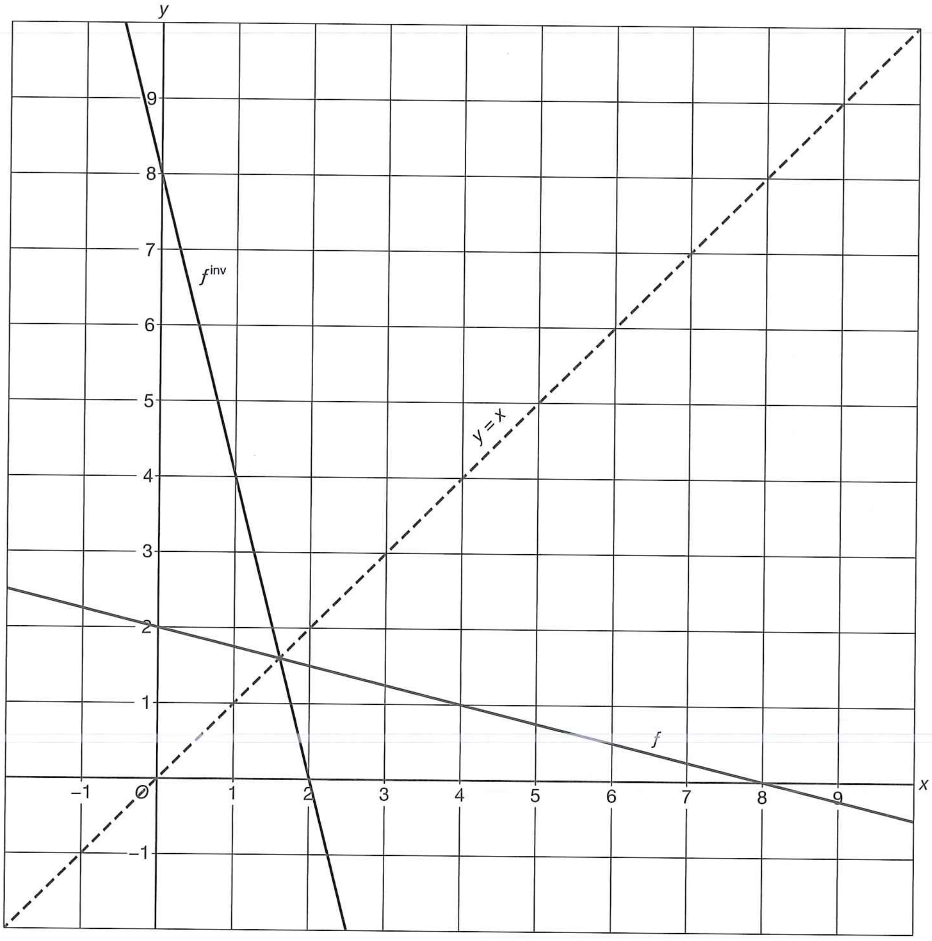
Het gemeenschappelijke punt op $D_f = \langle \leftarrow, -2]$ is $(-3, -3)$.

Dus $-3 \leq a \leq -2$.

49 a

x	0	8
$f(x)$	2	0

x	2	0
$f^{\text{inv}}(x)$	0	8



Stel $f^{\text{inv}}(x) = ax + b$.
Door (0, 8), dus $b = 8$.

$$\left.\begin{array}{l} f^{\text{inv}}(x) = ax + 8 \\ \text{Door } (2, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 2 + 8 = 0 \\ 2a = -8 \\ a = -4 \end{array}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = -4x + 8$

Alternatieve oplossing

Elk punt $P(x_P, y_P)$ van de grafiek van f is na spiegeling in de lijn $y = x$ het punt (y_P, x_P) op de grafiek van f^{inv}.

f wordt gegeven door de formule $y = -\frac{1}{4}x + 2$.

f^{inv} wordt dus gegeven door de formule $x = -\frac{1}{4}y + 2$.

Vrijmaken van y geeft $x = -\frac{1}{4}y + 2$

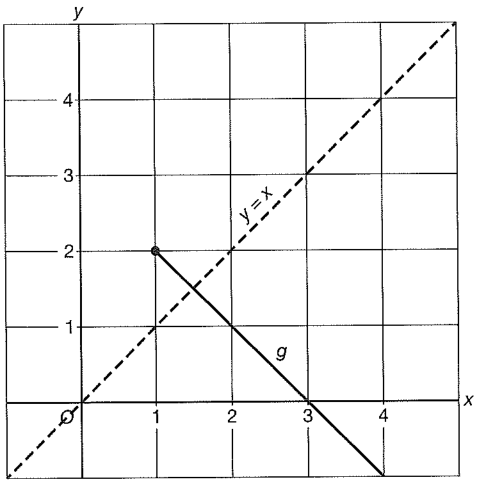
$$\frac{1}{4}y = -x + 2$$
$$y = -4x + 8$$

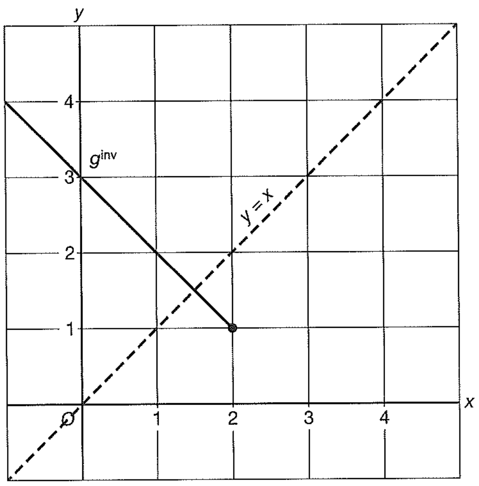
Dus $f^{\text{inv}}(x) = -4x + 8$.

b

x	1	3
$g(x)$	2	0

x	2	0
$g^{\text{inv}}(x)$	1	3





Dus $g_{inv}(x) = 3 - x$ met $D_{g_{inv}} = \langle \leftarrow, 2]$.

Alternatieve oplossing

$g(1) = 3 - 1 = 2$, dus $B_g = \langle \leftarrow, 2]$.
Vanwege symmetrie geldt dat $B_{g^{inv}} = D_g$ en $D_{g^{inv}} = B_g$, dus $D_{g^{inv}} = \langle \leftarrow, 2]$.
g wordt gegeven door de formule $y = 3 - x$.
g^{inv} wordt dus gegeven door de formule $x = 3 - y$.
Vrijmaken van y geeft $x = 3 - y$
$y = 3 - x$
Dus $g^{inv}(x) = 3 - x$ met $D_{g^{inv}} = \langle \leftarrow, 2]$.

1.4 Tweedegraadsfuncties met een parameter

Bladzijde 32

50 **a** $p = 1$ geeft $f(x) = -x^2 + 6x + 1$

$x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot -1} = 3$ en $y_{top} = -3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = 10$

De top is dus (3, 10).

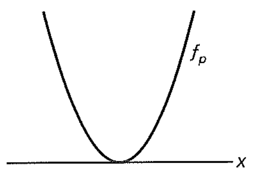
b De top ligt op de x-as als de vergelijking $-x^2 + 6x + p = 0$ precies één oplossing heeft.

$\left.\begin{array}{l} D = 6^2 - 4 \cdot -1 \cdot p = 36 + 4p \\ \text{één oplossing als } D = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 36 + 4p = 0 \\ 4p = -36 \\ p = -9 \end{array}$

De top ligt op de x-as voor $p = -9$.

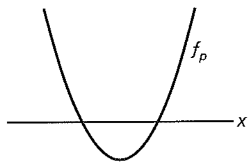
Bladzijde 33

51 **a**



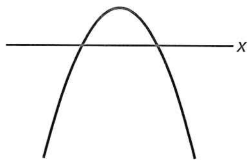
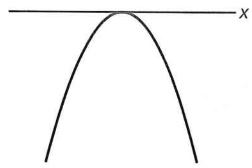
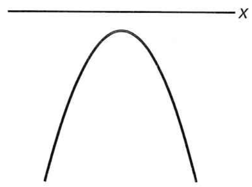
$\left.\begin{array}{l} D = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 36 - 8p \\ \text{Er moet gelden } D = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 36 - 8p = 0 \\ -8p = -36 \\ p = 4\frac{1}{2} \end{array}$

b

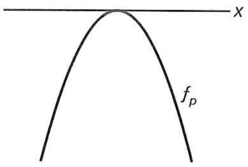


$\left.\begin{array}{l} D = 36 - 8p \\ \text{Er moet gelden } D > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 36 - 8p > 0 \\ -8p > -36 \\ p < 4\frac{1}{2} \end{array}$

52

De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ met $a < 0$		
		
twee snijpunten met de x-as $D > 0$	één snijpunt (raakpunt) met de x-as $D = 0$	geen snijpunt met de x-as $D < 0$

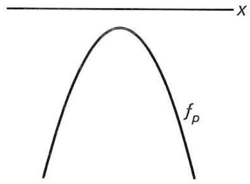
53 **a**



$D = (-5)^2 - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot p = 25 + 2p$
Er moet gelden $D = 0$

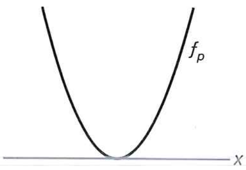
$$\left.\begin{array}{l} D = (-5)^2 - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot p = 25 + 2p \\ \text{Er moet gelden } D = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 25 + 2p = 0 \\ 2p = -25 \\ p = -12\frac{1}{2} \end{array}$$

b



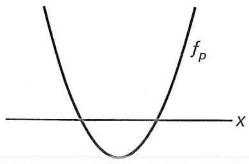
$$\left.\begin{array}{l} D = 25 + 2p \\ \text{Er moet gelden } D < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 25 + 2p < 0 \\ 2p < -25 \\ p < -12\frac{1}{2} \end{array}$$

54 **a**



$$\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = p^2 - 36 \\ \text{Er moet gelden } D = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p^2 - 36 = 0 \\ p^2 = 36 \\ p = 6 \vee p = -6 \end{array}$$

b



$$\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 36 \\ \text{Er moet gelden } D > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p^2 - 36 > 0 \\ p^2 > 36 \\ p < -6 \vee p > 6 \end{array}$$

55 $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{8}p$

$y_{\text{top}} = f_p\left(-\frac{1}{8}p\right) = 4\left(-\frac{1}{8}p\right)^2 + p \cdot -\frac{1}{8}p + 5 = \frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{8}p^2 + 5 = -\frac{1}{16}p^2 + 5$

Bladzijde 34

56 $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot -2} = \frac{1}{4}p$

$y_{\text{top}} = f\left(\frac{1}{4}p\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{4}p\right)^2 + p \cdot \frac{1}{4}p + 1 = -\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p^2 + 1 = \frac{1}{8}p^2 + 1$

Het maximum is 9 geeft $\frac{1}{8}p^2 + 1 = 9$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{8}p^2 = 8 \\ p^2 = 64 \\ p = 8 \vee p = -8 \end{array}$$

57 $x_{top} = -\frac{p}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}p$

$y_{top} = f(-\frac{1}{2}p) = (-\frac{1}{2}p)^2 + p \cdot (-\frac{1}{2}p) + 3 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p^2 + 3 = -\frac{1}{4}p^2 + 3$

De top $(-\frac{1}{2}p, -\frac{1}{4}p^2 + 3)$ invullen in $y = x + 1$ geeft $-\frac{1}{4}p^2 + 3 = -\frac{1}{2}p + 1$

$$-\tfrac{1}{4}p^2 + \tfrac{1}{2}p + 2 = 0$$
$$p^2 - 2p - 8 = 0$$
$$(p-4)(p+2) = 0$$
$$p = 4 \vee p = -2$$

58 **a** $x_{top} = -\frac{6}{2 \cdot p} = -\frac{3}{p}$

$y_{top} = f\left(-\frac{3}{p}\right) = p \cdot \left(-\frac{3}{p}\right)^2 + 6 \cdot -\frac{3}{p} + 1 = \frac{9}{p} - \frac{18}{p} + 1 = -\frac{9}{p} + 1$

De extreme waarde is -2 geeft $-\frac{9}{p} + 1 = -2$

$$-\frac{9}{p} = -3$$
$$-3p = -9$$
$$p = 3$$

b $p = 3$ geeft $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$
De grafiek is een dalparabool, dus de extreme waarde is een minimum.

59 **a** $x_{top} = -\frac{p}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -p$

$y_{top} = f(-p) = \frac{1}{2} \cdot (-p)^2 + p \cdot -p + q = \frac{1}{2}p^2 - p^2 + q = -\frac{1}{2}p^2 + q$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + x + 1 \\ \text{top } (-p, -\frac{1}{2}p^2 + q) \end{array}\right\} -\tfrac{1}{2}p^2 + q = (-p)^2 + -p + 1$$
$$-\tfrac{1}{2}p^2 + q = p^2 - p + 1$$
$$q = 1\tfrac{1}{2}p^2 - p + 1$$

b $x_{top} = -p = 2$, dus $p = -2$ en $q = 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - -2 + 1 = 9$.

Bladzijde 35

60 **a** $x_{top} = -\frac{p}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}p$, dus $x_{top} = -\frac{1}{2}p$

$$-\tfrac{1}{2}p = x_{top}$$
$$p = -2x_{top}$$

b $x_{top} = -\frac{p}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}p$, dus $x_{top} = -\frac{1}{4}p$

$$-\tfrac{1}{4}p = x_{top}$$
$$p = -4x_{top}$$

c $x_{top} = -\frac{4p}{2 \cdot -3} = \frac{2}{3}p$, dus $x_{top} = \frac{2}{3}p$

$$\tfrac{2}{3}p = x_{top}$$
$$p = 1\tfrac{1}{2}x_{top}$$

d $x_{top} = -\frac{6}{2 \cdot p} = -\frac{3}{p}$, dus $x_{top} = -\frac{3}{p}$

$$px_{top} = -3$$
$$p = \frac{-3}{x_{top}}$$

e $x_{top} = -\frac{4p}{2 \cdot p^2} = -\frac{2}{p}$, dus $x_{top} = -\frac{2}{p}$

$$px_{top} = -2$$
$$p = \frac{-2}{x_{top}}$$

Bladzijde 36

61 **a** $x_{top} = -\frac{p}{2 \cdot -\frac{1}{8}} = 4p$, dus $p = \frac{1}{4}x_{top}$.

$$\left.\begin{array}{l} y_{top} = -\frac{1}{8}{x_{top}}^2 + px_{top} - 6 \\ p = \frac{1}{4}x_{top} \end{array}\right\} y_{top} = -\tfrac{1}{8}{x_{top}}^2 + \tfrac{1}{4}x_{top} \cdot x_{top} - 6$$
$$y_{top} = -\tfrac{1}{8}{x_{top}}^2 + \tfrac{1}{4}{x_{top}}^2 - 6$$
$$y_{top} = \tfrac{1}{8}{x_{top}}^2 - 6$$

Dus de formule van de kromme is $y = \frac{1}{8}x^2 - 6$.

b $x_{top} = -\dfrac{6}{2 \cdot p} = -\dfrac{3}{p}$, dus $p = -\dfrac{3}{x_{top}}$.

$$\left.\begin{array}{l} y_{top} = px_{top}^2 + 6x_{top} + p \\ p = -\dfrac{3}{x_{top}} \end{array}\right\} y_{top} = -\dfrac{3}{x_{top}} \cdot x_{top}^2 + 6x_{top} + -\dfrac{3}{x_{top}}$$

$$y_{top} = -3x_{top} + 6x_{top} - \dfrac{3}{x_{top}}$$

$$y_{top} = 3x_{top} - \dfrac{3}{x_{top}}$$

Dus de formule van de kromme is $y = 3x - \dfrac{3}{x}$ voor $p \neq 0$.

c $x_{top} = -\dfrac{-2p}{2 \cdot p^2} = \dfrac{1}{p}$, dus $p = \dfrac{1}{x_{top}}$.

$$\left.\begin{array}{l} y_{top} = p^2x_{top}^2 - 2px_{top} + 3 \\ p = \dfrac{1}{x_{top}} \end{array}\right\} y_{top} = \left(\dfrac{1}{x_{top}}\right)^2 \cdot x_{top}^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{x_{top}} \cdot x_{top} + 3$$

$$y_{top} = 1 - 2 + 3$$

$$y_{top} = 2$$

Dus de formule van de kromme is $y = 2$ voor $p \neq 0$.

d $x_{top} = -\dfrac{-p}{2 \cdot p} = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} y_{top} = px_{top}^2 - px_{top} + 1 \\ x_{top} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} y_{top} = p \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - p \cdot \tfrac{1}{2} + 1$$

$$y_{top} = \tfrac{1}{4}p - \tfrac{1}{2}p + 1$$

$$y_{top} = -\tfrac{1}{4}p + 1$$

Dus de coördinaten van de toppen van f_q zijn $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}p + 1\right)$.
De formule van de kromme is $x = \frac{1}{2}$ voor $p \neq 0$.

62 **a** $x_{top} = -\dfrac{p}{2 \cdot -1} = \frac{1}{2}p$, dus $p = 2x_{top}$.

$$\left.\begin{array}{l} y_{top} = -x_{top}^2 + px_{top} + 2p \\ p = 2x_{top} \end{array}\right\} y_{top} = -x_{top}^2 + 2x_{top} \cdot x_{top} + 2 \cdot 2x_{top}$$

$$y_{top} = -x_{top}^2 + 2x_{top}^2 + 4x_{top}$$

$$y_{top} = x_{top}^2 + 4x_{top}$$

De formule van de kromme is $y = x^2 + 4x$.

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

Bladzijde 38

63 **a** $x = -1, x = 1, x = 2$ en $x = 3$

b $x = -1$ geeft $(-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot -1 - 6 = 0$ klopt
$x = 1$ geeft $1^4 - 5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0$ klopt
$x = 2$ geeft $2^4 - 5 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 = 0$ klopt
$x = 3$ geeft $3^4 - 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 6 = 0$ klopt

64 **a** $x = -2, x = 2$ en $x = 4$

b $x = -2 \lor x = 2 \lor x = 4$

Bladzijde 40

65 **a** Voer in $y_1 = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 4$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx -4{,}33 \lor x \approx -0{,}77 \lor x \approx 3{,}60$.

b De optie minimum geeft $x \approx -2{,}79$ en $y \approx -6{,}60$.
De optie maximum geeft $x \approx 1{,}79$ en $y \approx 9{,}44$.
Dus min. is $f(-2{,}79) \approx -6{,}60$ en max. is $f(1{,}79) \approx 9{,}44$.

c Voer in $y_2 = -x + 3$.
Intersect geeft $x \approx -4{,}99 \lor x \approx -0{,}16 \lor x \approx 3{,}65$.

66 **a** Voer in $y_1 = x^3 - 4x^2 + 3$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx -0{,}79 \vee x = 1 \vee x \approx 3{,}79$.
b Voer in $y_1 = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x - 1$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx -0{,}58 \vee x \approx 3{,}34$.
c Voer in $y_1 = 0{,}4x^3 + 2x^2 + x - 2$ en $y_2 = x + 2$.
Intersect geeft $x \approx -4{,}51 \vee x \approx -1{,}76 \vee x \approx 1{,}26$.
d Voer in $y_1 = 0{,}2x^5 - x^4 + 4x^2$ en $y_2 = 0{,}2x + 3$.
Intersect geeft $x \approx -1{,}45 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x \approx 3{,}45$.

67 **a** Voer in $y_1 = 0{,}2x^4 - x^3 - x^2 + 8x + 2$.
De optie optie minimum geeft $x \approx -1{,}62$ en $y \approx -7{,}96$ en geeft $x \approx 3{,}69$ en $y \approx 4{,}74$.
De optie optie maximum geeft $x \approx 1{,}67$ en $y \approx 9{,}47$.
Dus min. is $f(-1{,}62) \approx -7{,}96$, max. is $f(1{,}67) \approx 9{,}47$ en min. is $f(3{,}69) \approx 4{,}74$.
b Voer in $y_1 = -1\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 40x - 28$.
De optie minimum geeft $x \approx -2{,}50$ en $y \approx -88{,}42$.
De optie maximum geeft $x \approx 4{,}00$ en $y \approx 94{,}67$.
Dus min. is $f(-2{,}50) \approx -88{,}42$ en max. is $f(4{,}00) \approx 94{,}67$.

68 **a** Voer in $y_1 = |x^3 - 9x|$ en $y_2 = 5$.
Intersect geeft $x \approx -3{,}25 \vee x \approx -2{,}67 \vee x \approx -0{,}58 \vee x \approx 0{,}58 \vee x \approx 2{,}67 \vee x \approx 3{,}25$.
b Voer in $y_3 = x + 5$.
Intersect met y_1 geeft $x \approx -3{,}10 \vee x \approx -2{,}87 \vee x \approx -0{,}51 \vee x \approx 0{,}66 \vee x \approx 2{,}44 \vee x \approx 3{,}39$.

69 **a** Voer in $y_1 = 0{,}5x^3 - 5x^2 + 20$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx -1{,}84 \vee x \approx 2{,}28 \vee x \approx 9{,}56$.
b Voer in $y_1 = 0{,}1x^4 + 0{,}1x^3 - 12x^2 + 50$ en $y_2 = 25x$.
Intersect geeft $x = -10 \vee x \approx -3{,}53 \vee x \approx 1{,}26 \vee x \approx 11{,}27$.
c Voer in $y_1 = |x^4 - x^3 + x - 5|$ en $y_2 = x + 3$.
Intersect geeft $x \approx -1{,}48 \vee x \approx -1{,}26 \vee x = 1 \vee x = 2$.
d Voer in $y_1 = |x^3 - 5x^2 - 2x + 24|$ en $y_2 = 20$.
Intersect geeft $x \approx -2{,}55 \vee x = -1 \vee x \approx 0{,}76 \vee x \approx 5{,}24$.

70 $x_{\text{top}} = -\dfrac{p^2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}p^2$ en
$y_{\text{top}} = f_p(-\frac{1}{4}p^2) = 2(-\frac{1}{4}p^2)^2 + p^2 \cdot -\frac{1}{4}p^2 + p = \frac{1}{8}p^4 - \frac{1}{4}p^4 + p = -\frac{1}{8}p^4 + p$

$$\left.\begin{array}{l}(-\frac{1}{4}p^2, -\frac{1}{8}p^4 + p)\\ y = 8x + 4\end{array}\right\} \; 8 \cdot -\tfrac{1}{4}p^2 + 4 = -\tfrac{1}{8}p^4 + p$$

$-2p^2 + 4 = -\frac{1}{8}p^4 + p$

$\frac{1}{8}p^4 - 2p^2 - p + 4 = 0$

Voer in $y_1 = \frac{1}{8}x^4 - 2x^2 - x + 4$.

Optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx -3{,}236 \vee x = -2 \vee x \approx 1{,}236 \vee x = 4$,
dus $p \approx -3{,}236 \vee p = -2 \vee p \approx 1{,}236 \vee p = 4$.

Voor $p = -3{,}236$ is $x_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot (-3{,}236)^2 \approx -2{,}618$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{8} \cdot (-3{,}236)^4 + -3{,}236 \approx -16{,}943$,

$a > 0$, dus f_p is een dalparabool, dus min. is $f_{-3{,}236}(-2{,}618) = -16{,}943$.

Voor $p = -2$ is $x_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^2 = -1$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{8} \cdot (-2)^4 + -2 = -4$, dus min. is $f_{-2}(-1) = -4$.

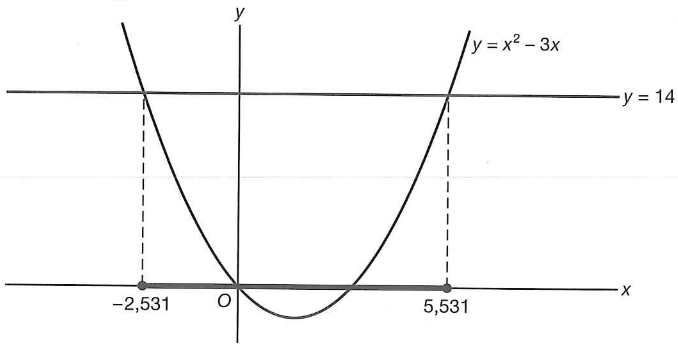
Voor $p = 1{,}236$ is $x_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot 1{,}236^2 = -0{,}382$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{8} \cdot 1{,}236^4 + 1{,}236 = 0{,}944$, dus min. is $f_{1{,}236}(-0{,}382) = 0{,}944$.

Voor $p = 4$ is $x_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot 4^2 = -4$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{8} \cdot 4^4 + 4 = -28$, dus min. is $f_4(-4) = -28$.

71 **a** Voer in $y_1 = -x^2 + 6x$ en $y_2 = x + 4$.
Intersect geeft $x = 1 \vee x = 4$.
b Voor $1 < x < 4$.

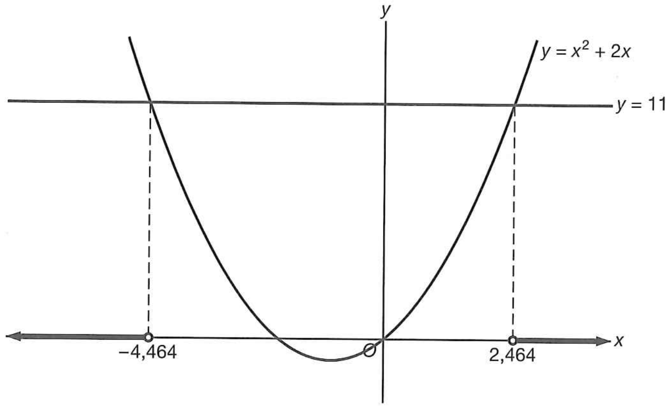
Bladzijde 42

72 **a** Voer in $y_1 = x^2 - 3x$ en $y_2 = 14$.
Intersect geeft $x \approx -2{,}531$ en $x \approx 5{,}531$.



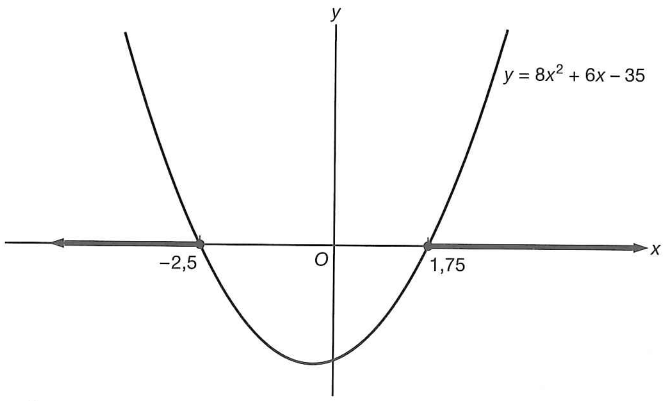
$x^2 - 3x \leq 14$ geeft $-2{,}531 \leq x \leq 5{,}531$

b Voer in $y_1 = x^2 + 2x$ en $y_2 = 11$.
Intersect geeft $x \approx -4{,}464$ en $x \approx 2{,}464$.



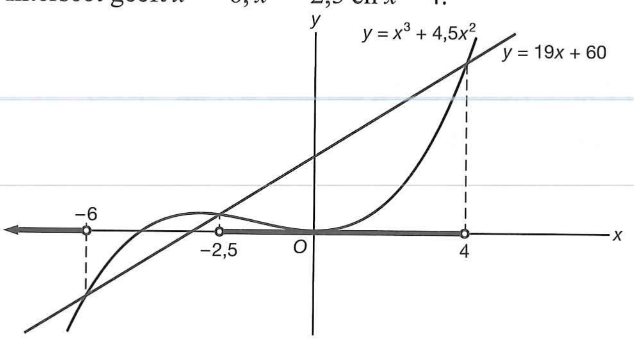
$x^2 + 2x > 11$ geeft $x < -4{,}464 \vee x > 2{,}464$

c Voer in $y_1 = 8x^2 + 6x - 35$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = -2{,}5$ en $x = 1{,}75$.



$8x^2 + 6x - 35 \geq 0$ geeft $x \leq -2{,}5 \vee x \geq 1{,}75$

d Voer in $y_1 = x^3 + 4{,}5x^2$ en $y_2 = 19x + 60$.
Intersect geeft $x = -6$, $x = -2{,}5$ en $x = 4$.

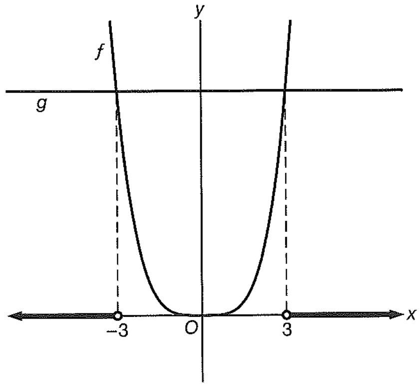


$x^3 + 4{,}5x^2 < 19x + 60$ geeft $x < -6 \vee -2{,}5 < x < 4$

73 **a** $\underbrace{x^4}_{f(x)} > \underbrace{81}_{g(x)}$

$x^4 = 81$

$x = \sqrt[4]{81} = 3 \vee x = -\sqrt[4]{81} = -3$

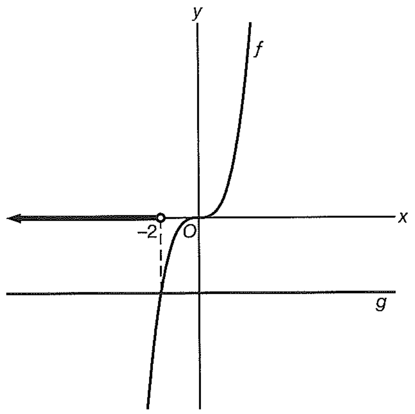


$x^4 > 81$ geeft $x < -3 \vee x > 3$

b $\underbrace{x^3}_{f(x)} < \underbrace{-8}_{g(x)}$

$x^3 = -8$

$x = \sqrt[3]{-8} = -2$



$x^3 < -8$ geeft $x < -2$

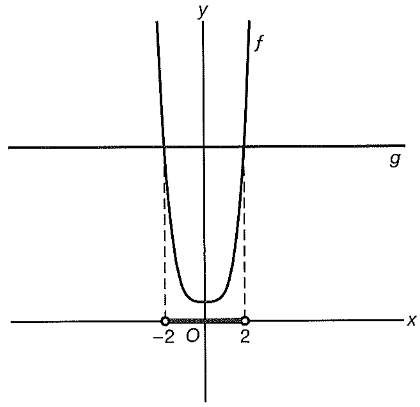
c $\underbrace{\frac{1}{2}x^4 + 1}_{f(x)} < \underbrace{9}_{g(x)}$

$\frac{1}{2}x^4 + 1 = 9$

$\frac{1}{2}x^4 = 8$

$x^4 = 16$

$x = \sqrt[4]{16} = 2 \vee x = -\sqrt[4]{16} = -2$



$\frac{1}{2}x^4 + 1 < 9$ geeft $-2 < x < 2$

d $\underbrace{\frac{1}{3}(x-1)^3}_{f(x)} > \underbrace{9}_{g(x)}$

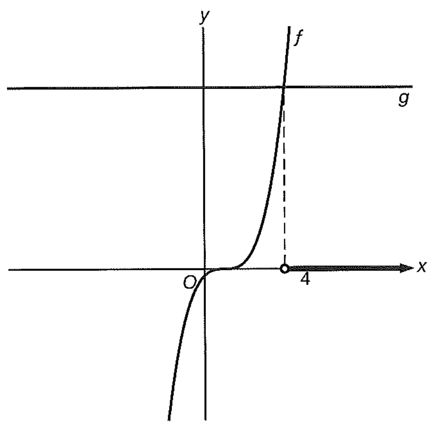
$\frac{1}{3}(x-1)^3 = 9$

$(x-1)^3 = 27$

$x - 1 = \sqrt[3]{27}$

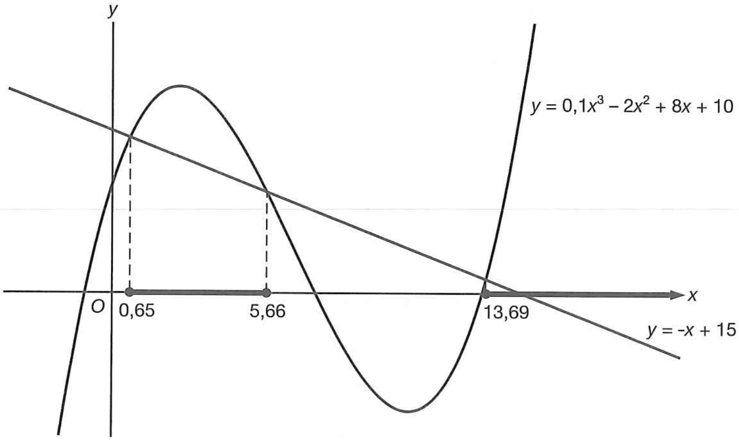
$x - 1 = 3$

$x = 4$



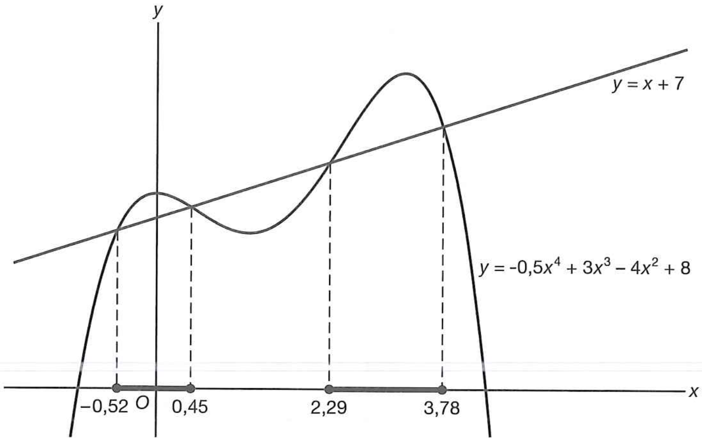
$\frac{1}{3}(x-1)^3 > 9$ geeft $x > 4$

74 **a** Voer in $y_1 = 0{,}1x^3 - 2x^2 + 8x + 10$ en $y_2 = -x + 15$.
Intersect geeft $x \approx 0{,}65$, $x \approx 5{,}66$ en $x \approx 13{,}69$.



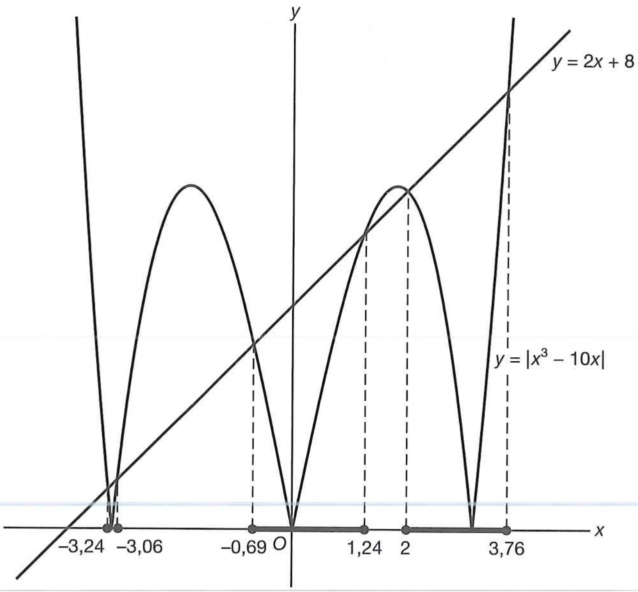
$0{,}1x^3 - 2x^2 + 8x + 10 \geq -x + 15$ geeft $0{,}65 \leq x \leq 5{,}66 \vee x \geq 13{,}69$

b Voer in $y_1 = -0{,}5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 8$ en $y_2 = x + 7$.
Intersect geeft $x \approx -0{,}52$, $x \approx 0{,}45$, $x \approx 2{,}29$ en $x \approx 3{,}78$.



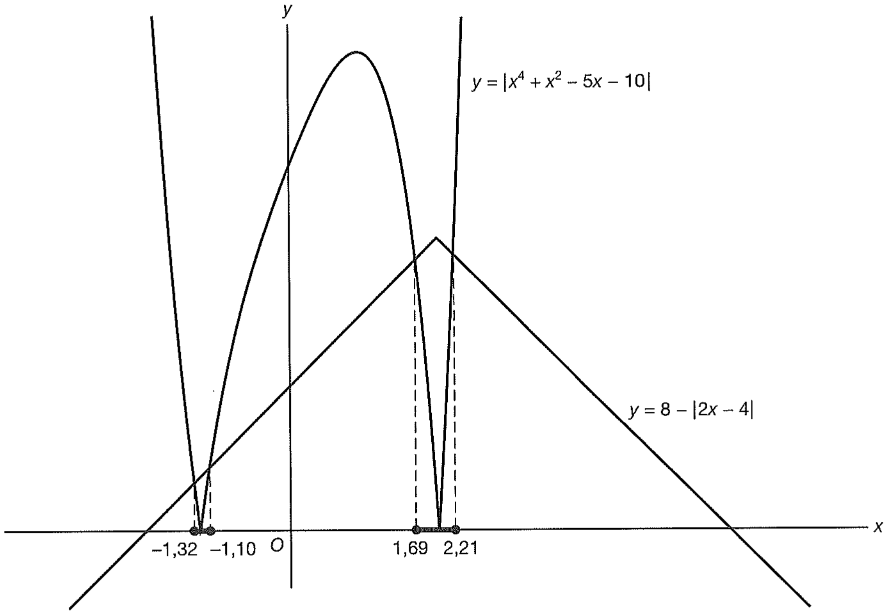
$-0{,}5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 8 \geq x + 7$ geeft $-0{,}52 \leq x \leq 0{,}45 \vee 2{,}29 \leq x \leq 3{,}78$

c Voer in $y_1 = |x^3 - 10x|$ en $y_2 = 2x + 8$.
Intersect geeft $x \approx -3{,}24$, $x \approx -3{,}06$, $x \approx -0{,}69$, $x \approx 1{,}24$, $x = 2$ en $x \approx 3{,}76$.



$|x^3 - 10x| \leq 2x + 8$ geeft $-3{,}24 \leq x \leq -3{,}06 \vee -0{,}69 \leq x \leq 1{,}24 \vee 2 \leq x \leq 3{,}76$

d Voer in $y_1 = |x^4 + x^2 - 5x - 10|$ en $y_2 = 8 - |2x - 4|$.
Intersect geeft $x \approx -1{,}32$, $x \approx -1{,}10$, $x \approx 1{,}69$ en $x \approx 2{,}21$.



$|x^4 + x^2 - 5x - 10| \leq 8 - |2x - 4|$ geeft $-1{,}32 \leq x \leq -1{,}10 \vee 1{,}69 \leq x \leq 2{,}21$

Diagnostische toets

Bladzijde 44

1 **a** Stel k: $y = ax + b$ met $a = \text{rc}_k = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } A(-1, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -1 + b = 6 \\ -2 + b = 6 \\ b = 8 \end{array}$$

Dus k: $y = 2x + 8$.

b Stel l: $y = ax + b$.
$l \,//\, m$, dus $a = \text{rc}_m = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(9, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 9 + b = 3 \\ -4\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus l: $y = -\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}$.

c $$\left.\begin{array}{l} n: y = ax + 5 \\ \text{door } (-10, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot -10 + 5 = 0 \\ -10a + 5 = 0 \\ -10a = -5 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}$$

2 **a** Stel k: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2 - 2}{3 - -5} = \dfrac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(-5, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -5 + b = 2 \\ 2\frac{1}{2} + b = 2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus k: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

b Stel l: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{135 - 60}{65 - 40} = \dfrac{75}{25} = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } P(40, 60) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 40 + b = 60 \\ 120 + b = 60 \\ b = -60 \end{array}$$

Dus l: $y = 3x - 60$.

3 **a** Stel $W = at + b$.

$$\left.\begin{array}{l} t = 4 \text{ en } W = 500 \\ t = 12 \text{ en } W = 2900 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{2900 - 500}{12 - 4} = 300$$

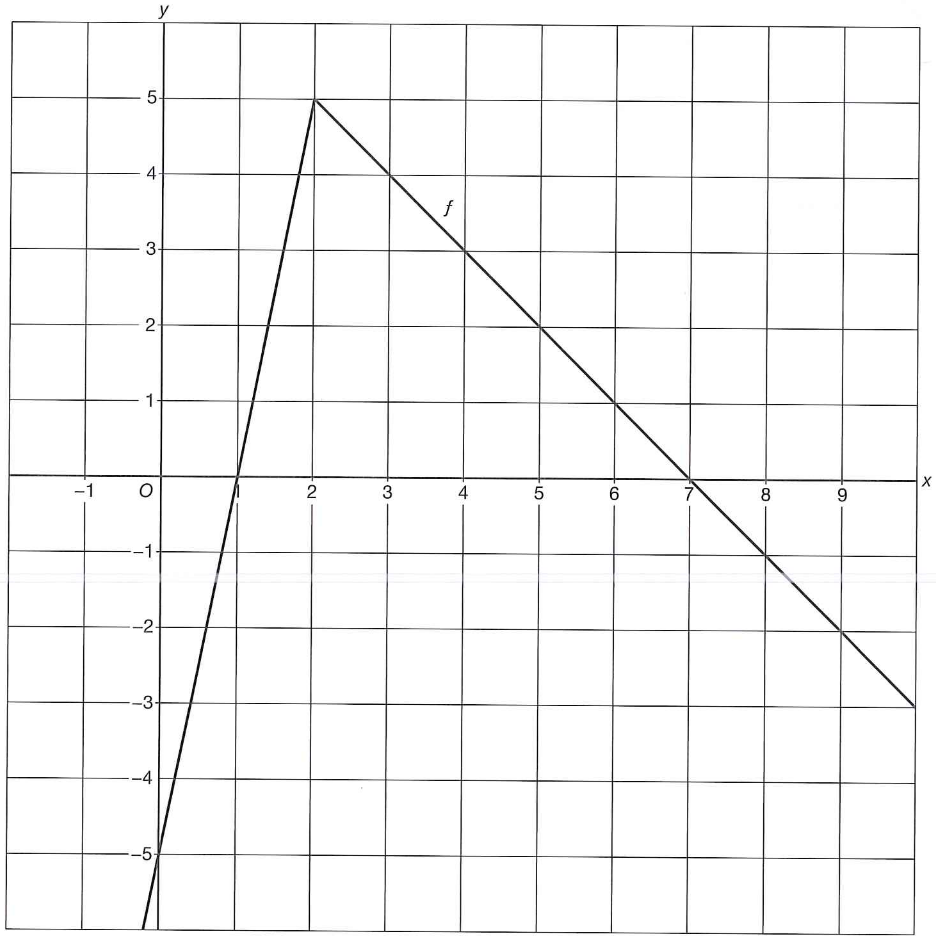
$$\left.\begin{array}{l} W = 300t + b \\ t = 4 \text{ en } W = 500 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 300 \cdot 4 + b = 500 \\ 1200 + b = 500 \\ b = -700 \end{array}$$

Dus $W = 300t - 700$.

b $t = 5{,}2$ geeft $W = 300 \cdot 5{,}2 - 700 = 860$.

4 **a** $f(x) = 2x + 1 - |3x - 6| = -x + 7$ als $3x - 6 \geq 0$, dus als $x \geq 2$.

$f(x) = 2x + 1 - |3x - 6| = 5x - 5$ als $3x - 6 < 0$, dus als $x < 2$.



b oppervlakte vlakdeel is $\frac{1}{2} \cdot (7 - 1) \cdot 5 = 15$

5 **a** $3x^2 - x = 0$
$x(3x-1) = 0$
$x = 0 \vee 3x = 1$
$x = 0 \vee x = \frac{1}{3}$

b $3x^2 - 9x = 12$
$3x^2 - 9x - 12 = 0$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$(x+1)(x-4) = 0$
$x = -1 \vee x = 4$

c $3x^2 - x = 2$
$3x^2 - x - 2 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 25$
$x = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3} \vee x = \frac{1+5}{6} = 1$

d $x^2 + 14 = 16$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

e $(2x-3)^2 = 81$
$2x - 3 = 9 \vee 2x - 3 = -9$
$2x = 12 \vee 2x = -6$
$x = 6 \vee x = -3$

f $(3x+2)(x-1) = 0$
$3x + 2 = 0 \vee x - 1 = 0$
$3x = -2 \vee x = 1$
$x = -\frac{2}{3} \vee x = 1$

g $x^2 = 7x + 13$
$x^2 - 7x - 13 = 0$
$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -13 = 101$
$x = \frac{7-\sqrt{101}}{2} \vee x = \frac{7+\sqrt{101}}{2}$
$x = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{101} \vee x = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{101}$

h $(3x+2)(x-1) = x(x+5)$
$3x^2 - 3x + 2x - 2 = x^2 + 5x$
$2x^2 - 6x - 2 = 0$
$x^2 - 3x - 1 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 13$
$x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
$x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$

i $(x+2)^2 = 3x + 7$
$x^2 + 4x + 4 = 3x + 7$
$x^2 + x - 3 = 0$
$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3 = 0$
$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 3\frac{1}{4}$
$x + \frac{1}{2} = \sqrt{3\frac{1}{4}} \vee x + \frac{1}{2} = -\sqrt{3\frac{1}{4}}$
$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \vee x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$
$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$

j $(x-3)^2 - (x+1)^2 = (x-4)^2$
$x^2 - 6x + 9 - x^2 - 2x - 1 = x^2 - 8x + 16$
$-x^2 = 8$
$x^2 = -8$
geen oplossingen

6 **a** $\left.\begin{array}{l} D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 16 - 8p \\ \text{geen oplossingen als } D < 0 \end{array}\right\}$ $16 - 8p < 0$
$-8p < -16$
$p > 2$

b $\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 17 = p^2 - 204 \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\}$ $p^2 - 204 > 0$
$p^2 > 204$
$p < -\sqrt{204} \vee p > \sqrt{204}$
$p < -2\sqrt{51} \vee p > 2\sqrt{51}$

c $p = 0$ geeft $2x + 5 = 0$, dus één oplossing.
$\left.\begin{array}{l} \text{Voor } p \neq 0 \text{ is } D = 2^2 - 4 \cdot p \cdot 5 = 4 - 20p \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\}$ $4 - 20p > 0$
$-20p > -4$
$p < \frac{1}{5}$
De vergelijking heeft twee oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < \frac{1}{5}$.

7 $p = 0$ geeft $-6x + 12 = 0$
$-6x = -12$
$x = 2$
$\left.\begin{array}{l} \text{Voor } p \neq 0 \text{ is } D = (-6)^2 - 4 \cdot p \cdot 12 = 36 - 48p \\ \text{één oplossing als } D = 0 \end{array}\right\}$ $36 - 48p = 0$
$-48p = -36$
$p = \frac{3}{4}$

$p = \frac{3}{4}$ geeft $\frac{3}{4}x^2 - 6x + 12 = 0$
$x^2 - 8x + 16 = 0$
$(x-4)^2 = 0$
$x = 4$
Voor $p = 0$ is de oplossing $x = 2$ en voor $p = \frac{3}{4}$ is de oplossing $x = 4$.

1

Bladzijde 45

8 **a** $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2$ geeft $y_{top} = f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot -2 + 5 = -3$

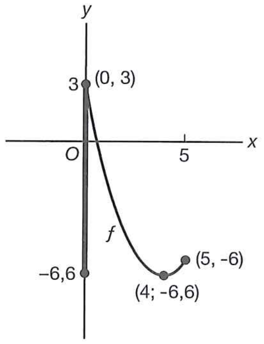
$2 > 0$, dus dalparabool en min. is $f(-2) = -3$.

b $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot -0{,}4} = 5$ geeft $y_{top} = g(5) = -0{,}4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 - 3 = 7$

$-0{,}4 < 0$, dus bergparabool en max. is $f(5) = 7$.

9 **a** $f(0) = 3$ en $f(5) = 0{,}6 \cdot 5^2 - 4{,}8 \cdot 5 + 3 = -6$

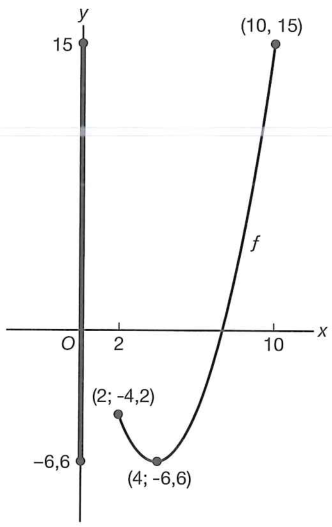
$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4{,}8}{2 \cdot 0{,}6} = 4$ en $y_{top} = f(4) = 0{,}6 \cdot 4^2 - 4{,}8 \cdot 4 + 3 = -6{,}6$



Dus $B_f = [-6{,}6; 3]$.

b $f(2) = 0{,}6 \cdot 2^2 - 4{,}8 \cdot 2 + 3 = -4{,}2$ en $f(10) = 0{,}6 \cdot 10^2 - 4{,}8 \cdot 10 + 3 = 15$

$x_{top} = 4$ en $y_{top} = -6{,}6$ (zie vraag a)

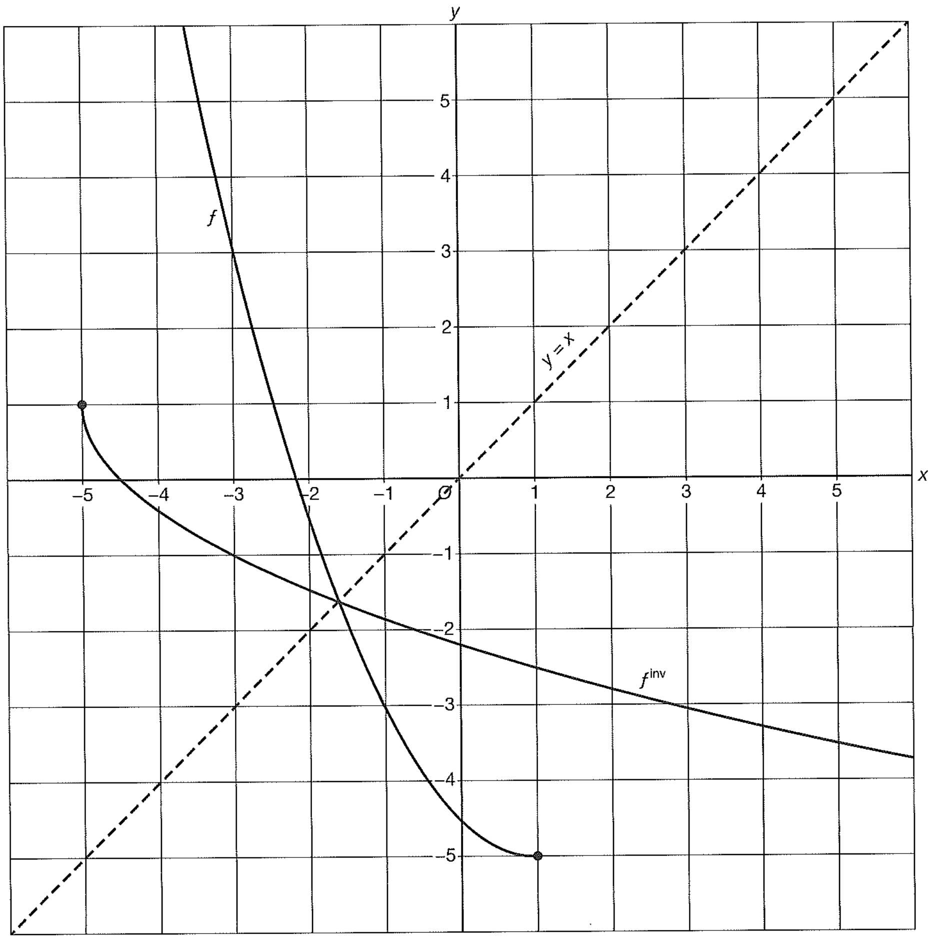


Dus $B_f = [-6{,}6; 15]$.

10 $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$, dus $a = 1$.

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	-0,5	-3	-4,5	-5

x	3	-0,5	-3	-4,5	-5
$f^{inv}(x)$	-3	-2	-1	0	1



11 **a** $D = p^2 - 4 \cdot -1 \cdot -3 = p^2 - 12$
x-as raken, dus $D = 0$

$$\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot -1 \cdot -3 = p^2 - 12 \\ x\text{-as raken, dus } D = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p^2 - 12 = 0 \\ p^2 = 12 \\ p = \sqrt{12} \vee p = -\sqrt{12} \\ p = 2\sqrt{3} \ \vee \ p = -2\sqrt{3} \end{array}$$

b positief maximum betekent twee snijpunten met de x-as, dus $D > 0$
$D = p^2 - 12$

$$\begin{array}{l} p^2 - 12 > 0 \\ p^2 > 12 \\ p < -2\sqrt{3} \vee p > 2\sqrt{3} \end{array}$$

12 **a** $x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{p}{2 \cdot 1} = -\tfrac{1}{2}p$

$y_{top} = f_p(-\tfrac{1}{2}p) = (-\tfrac{1}{2}p)^2 + p \cdot -\tfrac{1}{2}p + 6p = \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + 6p = -\tfrac{1}{4}p^2 + 6p$

Extreme waarde is −13 geeft $-\tfrac{1}{4}p^2 + 6p = -13$

$$\begin{array}{l} -\tfrac{1}{4}p^2 + 6p + 13 = 0 \\ p^2 - 24p - 52 = 0 \\ (p + 2)(p - 26) = 0 \\ p = -2 \ \vee \ p = 26 \end{array}$$

b
$$\left.\begin{array}{l} (-\tfrac{1}{2}p, -\tfrac{1}{4}p^2 + 6p) \\ y = -5x + 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -5 \cdot -\tfrac{1}{2}p + 10 = -\tfrac{1}{4}p^2 + 6p \\ 2\tfrac{1}{2}p + 10 = -\tfrac{1}{4}p^2 + 6p \\ \tfrac{1}{4}p^2 - 3\tfrac{1}{2}p + 10 = 0 \\ p^2 - 14p + 40 = 0 \\ (p - 10)(p - 4) = 0 \\ p = 10 \ \vee \ p = 4 \end{array}$$

1

13 $x_{top} = -\dfrac{2p}{2 \cdot 1} = -p$, dus $p = -x_{top}$.

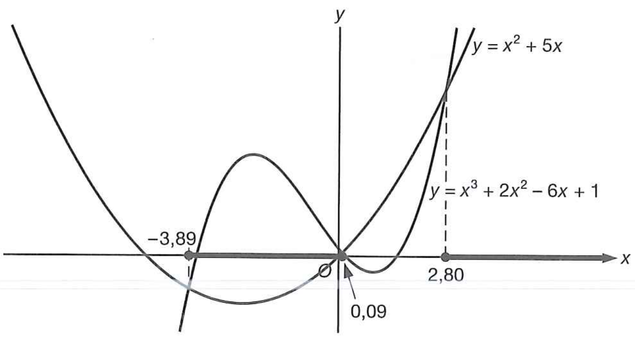
$$\left.\begin{array}{l} y_{top} = x_{top}^{\ 2} + 2px_{top} + p \\ p = -x_{top} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_{top} = x_{top}^{\ 2} + 2 \cdot -x_{top} \cdot x_{top} + -x_{top} \\ y_{top} = x_{top}^{\ 2} - 2x_{top}^{\ 2} - x_{top} \\ y_{top} = -x_{top}^{\ 2} - x_{top} \end{array}$$

Dus de formule van de kromme is $y = -x^2 - x$.

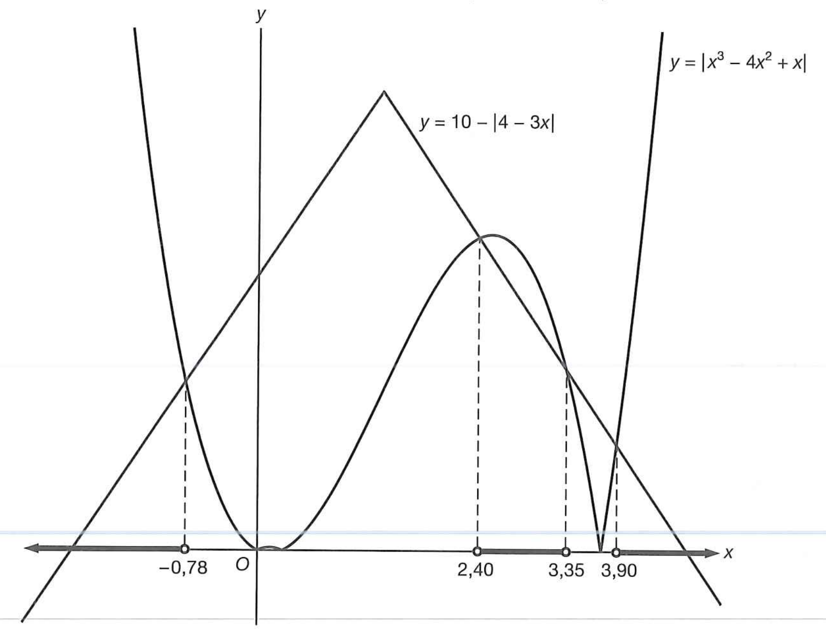
14 Voer in $y_1 = -\frac{1}{5}x^3 + x^2 + 2x - 5$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx -2{,}59 \vee x \approx 1{,}62 \vee x \approx 5{,}97$.
De optie minimum geeft $x \approx -0{,}81$ en $y \approx -5{,}86$.
De optie maximum geeft $x \approx 4{,}14$ en $y \approx 6{,}23$.
Dus min. is $f(-0{,}81) \approx -5{,}86$ en max. is $f(4{,}14) \approx 6{,}23$.

15 **a** Voer in $y_1 = x^4 - 4x^2$ en $y_2 = 0{,}5x - 2$.
Intersect geeft $x \approx -1{,}75 \vee x \approx -0{,}86 \vee x \approx 0{,}69 \vee x \approx 1{,}93$.
b Voer in $y_1 = |x^3 - 3x|$ en $y_2 = -\frac{1}{2}x + 2$.
Intersect geeft $x \approx -2{,}11 \vee x \approx 0{,}65 \vee x \approx 1{,}46 \vee x \approx 1{,}89$.

16 **a** Voer in $y_1 = x^2 + 5x$ en $y_2 = x^3 + 2x^2 - 6x + 1$.
Intersect geeft $x \approx -3{,}89$, $x \approx 0{,}09$ en $x \approx 2{,}80$.



$x^2 + 5x \leq x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ geeft $-3{,}89 \leq x \leq 0{,}09 \vee x \geq 2{,}80$
b Voer in $y_1 = 10 - |4 - 3x|$ en $y_2 = |x^3 - 4x^2 + x|$.
Intersect geeft $x \approx -0{,}78$, $x \approx 2{,}40$, $x \approx 3{,}35$ en $x \approx 3{,}90$.



$10 - |4 - 3x| < |x^3 - 4x^2 + x|$ geeft $x < -0{,}78 \vee 2{,}40 < x < 3{,}35 \vee x > 3{,}90$

2 De afgeleide functie

Voorkennis Herleiden

Bladzijde 48

1 **a** $(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

b $(3+h)^2 = h^2 + 6h + 9$

c $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

d $$\begin{aligned} 2(3x-2)^2 + 3(2x-1)^2 &= 2(9x^2 - 12x + 4) + 3(4x^2 - 4x + 1) \\ &= 18x^2 - 24x + 8 + 12x^2 - 12x + 3 \\ &= 30x^2 - 36x + 11 \end{aligned}$$

e $$\begin{aligned} (3x+2)^2 - (2x-6)^2 &= 9x^2 + 12x + 4 - (4x^2 - 24x + 36) \\ &= 9x^2 + 12x + 4 - 4x^2 + 24x - 36 \\ &= 5x^2 + 36x - 32 \end{aligned}$$

f $$\begin{aligned} (6x-5)^2 - \tfrac{1}{2}(2x-4)^2 &= (36x^2 - 60x + 25) - \tfrac{1}{2}(4x^2 - 16x + 16) \\ &= 36x^2 - 60x + 25 - 2x^2 + 8x - 8 \\ &= 34x^2 - 52x + 17 \end{aligned}$$

Bladzijde 49

2 **a** $f(2x) = \frac{1}{4} \cdot (2x)^2 - 2x + 2 = \frac{1}{4} \cdot 4x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 2$

b $$\begin{aligned} f(x+5) &= \tfrac{1}{4}(x+5)^2 - (x+5) + 2 \\ &= \tfrac{1}{4}(x^2 + 10x + 25) - x - 5 + 2 \\ &= \tfrac{1}{4}x^2 + 2\tfrac{1}{2}x + 6\tfrac{1}{4} - x - 3 \\ &= \tfrac{1}{4}x^2 + 1\tfrac{1}{2}x + 3\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

c $$\begin{aligned} f(3x+1) &= \tfrac{1}{4}(3x+1)^2 - (3x+1) + 2 \\ &= \tfrac{1}{4}(9x^2 + 6x + 1) - 3x - 1 + 2 \\ &= 2\tfrac{1}{4}x^2 + 1\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} - 3x + 1 \\ &= 2\tfrac{1}{4}x^2 - 1\tfrac{1}{2}x + 1\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

d $$\begin{aligned} f(x+h) &= \tfrac{1}{4}(x+h)^2 - (x+h) + 2 \\ &= \tfrac{1}{4}(x^2 + 2xh + h^2) - x - h + 2 \\ &= \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}xh + \tfrac{1}{4}h^2 - x - h + 2 \end{aligned}$$

3 **a** $y = \dfrac{3xh + 2h^2}{h} = \dfrac{h(3x+2h)}{h} = 3x + 2h$, mits $h \neq 0$

b $y = \dfrac{axh + bh^2}{h} = \dfrac{h(ax+bh)}{h} = ax + bh$, mits $h \neq 0$

c $$y = \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \frac{a(x^2 + 2xh + h^2) - ax^2}{h} = \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 - ax^2}{h} = \frac{2axh + ah^2}{h}$$

$$= \frac{h(2ax + ah)}{h} = 2ax + ah, \text{ mits } h \neq 0$$

2.1 Snelheden

Bladzijde 50

1 Tussen A en C neemt de daling steeds meer toe, tussen C en B neemt de daling steeds meer af.

2 Afnemend dalend op $\langle\leftarrow, 1\rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 1, 2\rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 2, 3\rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 3, \rightarrow\rangle$.

Bladzijde 51

3 Afnemend dalend op $\langle\leftarrow, -4\rangle$ en op $\langle 3, 5\rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle -4, -2\rangle$ en op $\langle 5, \rightarrow\rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle -2, 1\rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 1, 3\rangle$.

4 **a** Constant stijgend op $\langle 0, 3\rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 3, 4\rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 4, 5\rangle$.
Afnemend dalend op $\langle 5, 7\rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 7, 10\rangle$.
b Bij de steilste klim is de snelheid het laagst. Dus na 7 minuten.

5 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{90 - 0}{5 - 0} = 18$
Dus de gemiddelde snelheid gedurende de eerste vijf seconden is 18 m/s.

Bladzijde 52

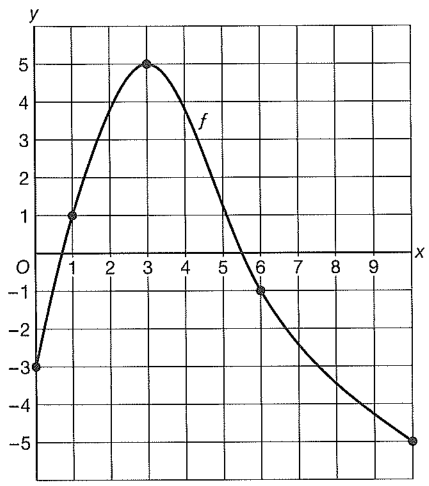
6 **a** $[20, 40]$: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{12{,}5 - 5}{40 - 20} = \frac{7{,}5}{20} = 0{,}375$ km/minuut $= 22{,}5$ km/uur
$[30, 60]$: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{15 - 10}{60 - 30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ km/minuut $= 10$ km/uur
b De grafiek is niet overal even steil.
c Trek de lijn door de punten $(0, 0)$ en $(20, 5)$ door totdat hij de grafiek weer snijdt.
Dat is in het punt $(60, 15)$. Dus voor $p = 60$.

7 De gemiddelde snelheid op $[0, t]$ wordt steeds kleiner als je t steeds groter neemt.

Bladzijde 53

8 **a** Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$.
b Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{6 - 2} = \frac{-5}{4} = -1\frac{1}{4}$.
c Trek de lijn k met rc $= \frac{3}{5}$ door het punt $(0, 1)$.
k snijdt de grafiek in $(5, 3)$, dus $p = 5$.
d Trek de halve lijn met beginpunt $(1, 4)$ en rc $= \frac{1}{4}$. De lijn snijdt de grafiek voor $x > 1$ in drie punten. Er zijn dus drie waarden voor q.

9 $f(0) = -3$
Op $[0, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$, dus $f(1) = -3 + 4 = 1$.
Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$, dus $f(3) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$.
Op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$, dus $f(6) = 5 + 3 \cdot -2 = -1$.
Op $[6, 10]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, dus $f(10) = -1 + 4 \cdot -1 = -5$.



Er zijn meerdere mogelijkheden, omdat alleen de punten (0, -3), (1, 1), (3, 5), (6, -1) en (10, -5) vastliggen.

Bladzijde 54

10 **a** $f(0) = -4$

Op $[0,1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = -1\frac{1}{2}$, dus $f(1) = -4 - 1\frac{1}{2} = -5\frac{1}{2}$

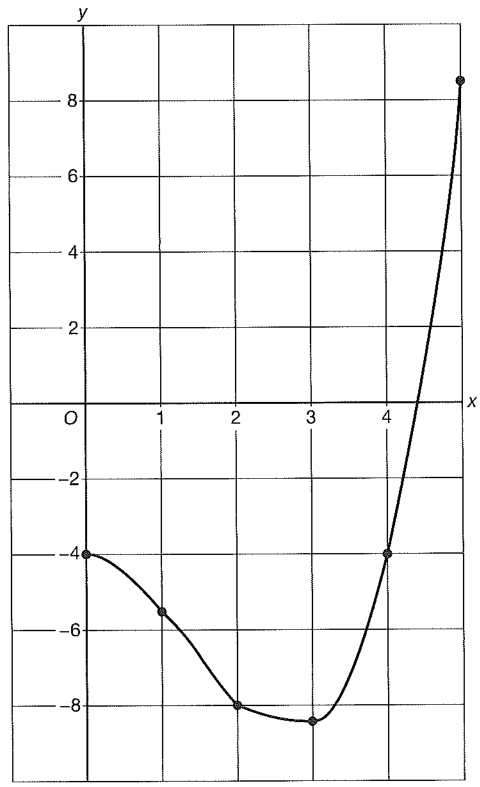
Op $[0,2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -2$, dus $f(2) = -4 + 2 \cdot -2 = -8$

Op $[0,3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = -1\frac{1}{2}$, dus $f(3) = -4 + 3 \cdot -1\frac{1}{2} = -8\frac{1}{2}$

Op $[0,4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 = 0$, dus $f(4) = -4 + 4 \cdot 0 = -4$

Op $[0,5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$, dus $f(5) = -4 + 5 \cdot 2\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$

Een mogelijke grafiek is



b Op $[-3, 0]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 0 + 1 = 1$ en de grafiek gaat door (0, 1), dus $f(-3) = 1 - 3 \cdot 1 = -2$.

Op $[-3, -2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + -2 + 1 = -3$, dus $f(-2) = -2 + -3 = -5$

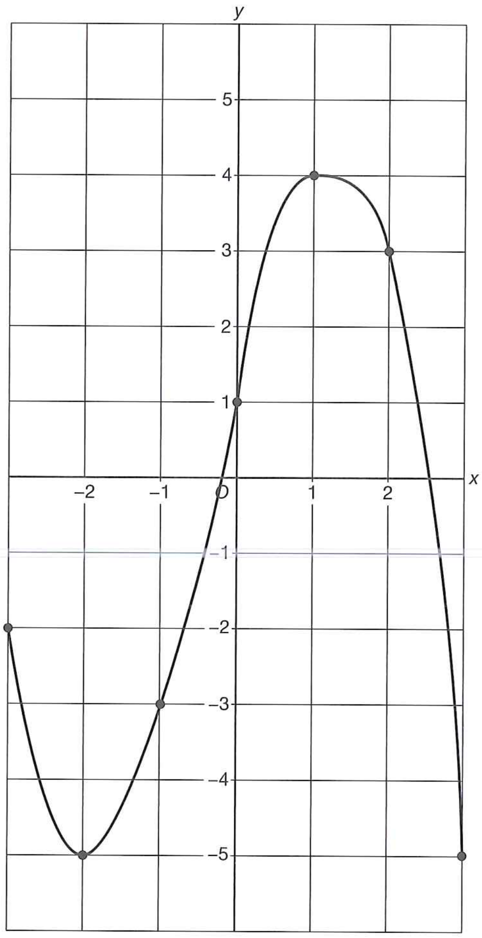
Op $[-3, -1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + -1 + 1 = -\frac{1}{2}$, dus $f(-1) = -2 + 2 \cdot -\frac{1}{2} = -3$

Op $[-3, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1\frac{1}{2}$, dus $f(1) = -2 + 4 \cdot 1\frac{1}{2} = 4$

Op $[-3, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 + 1 = 1$, dus $f(2) = -2 + 5 \cdot 1 = 3$

Op $[-3, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 + 1 = -\frac{1}{2}$, dus $f(3) = -2 + 6 \cdot -\frac{1}{2} = -5$

Een mogelijke grafiek is



11 **a** $y_A = f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = -2$
$y_B = f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 6$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - -2}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$

Bladzijde 55

12 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - -1} = \frac{-6 - 6}{4} = -3$

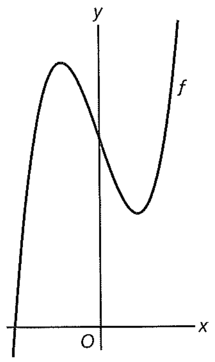
b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - -4}{3} = 0$

c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-5)}{1 - -5} = \frac{-4 - 50}{6} = -9$

d $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-5)}{4 - -5} = \frac{-4 - 50}{9} = -6$

13 Bij een lineaire functie is ieder differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt.

14 **a**



b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{23 - 3}{2} = 10$

c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - -2} = \frac{57 - 3}{6} = 9$

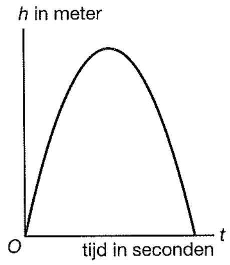
d Stel l: $y = ax + b$.

$f(-3) = -13$, dus $A(-3, -13)$ en $f(1) = 3$, dus $B(1, 3)$, dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - -13}{1 - -3} = 4$.

$\left.\begin{array}{l} y = 4x + b \\ \text{door } B(1,3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = -1 \end{array}$

Dus l: $y = 4x - 1$.

15 **a** Voer in $y_1 = -4{,}9x^2 + 44{,}1x$.



b De optie maximum geeft $x \approx 4{,}5$ en $y = 99{,}225$.

Dus na 4,5 seconden.

c De derde seconde is van $t = 2$ tot $t = 3$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Op } t = 2 \text{ is } h = 68{,}6 \\ \text{Op } t = 3 \text{ is } h = 88{,}2 \end{array}\right\}$ De steen stijgt $88{,}2 - 68{,}6 = 19{,}6$ m.

d Op $t = 2$ is $h = 68{,}6$, dus gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{68{,}6 - 0}{2 - 0} = 34{,}3$ m/s.

e De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 0$ en $x = 9$.

Op $t = 8{,}5$ is $h = 20{,}825$.

Op $[8{,}5; 9]$ is $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{0 - 20{,}825}{9 - 8{,}5} = -41{,}65$ m/s.

Dus de gemiddelde snelheid gedurende de laatste seconde is 41,65 m/s.

16 **a** De gemiddelde snelheid op het interval $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(3^3 + 3) - (2^3 + 2)}{3 - 2} = \frac{30 - 10}{1} = 20$ m/s.

b Op $[2; 2{,}1]$ is de gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2{,}1^3 + 2{,}1) - (2^3 + 2)}{2{,}1 - 2} = 13{,}61$ m/s.

Op $[2; 2{,}01]$ is de gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2{,}01^3 + 2{,}01) - (2^3 + 2)}{2{,}01 - 2} = 13{,}0601$ m/s.

Op $[2; 2{,}001]$ is de gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2{,}001^3 + 2{,}001) - (2^3 + 2)}{2{,}001 - 2} = 13{,}006001$ m/s.

c Op een kleiner wordend interval komt de gemiddelde snelheid steeds dichter bij 13 m/s.
De gemiddelde snelheid op het interval $[2; 20001]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2{,}0001^3 + 2{,}0001) - (2^3 + 2)}{2{,}0001 - 2} = \frac{10{,}00130006 - 10}{0{,}0001} \approx 13{,}0006 \text{ m/s.}$$

d Voor $\Delta t = 0$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0}$. Dit is niet gedefinieerd.

Bladzijde 57

17 a Op $[2; 2{,}01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{4 \cdot 2{,}01 + 1} - 10) - (10\sqrt{4 \cdot 2 + 1} - 10)}{0{,}01} \approx 6{,}66$.
De snelheid op $t = 2$ is bij benadering 6,66 m/s.

Op $[20; 20{,}01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{4 \cdot 20{,}01 + 1} - 10) - (10\sqrt{4 \cdot 20 + 1} - 10)}{0{,}01} \approx 2{,}22$.
De snelheid op $t = 20$ is bij benadering 2,22 m/s.

b De gemiddelde snelheid van de snelheden op $t = 2$ en $t = 20$ is $\frac{6{,}66 + 2{,}22}{2} = 4{,}44$ m/s.

Op $[11; 11{,}01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{4 \cdot 11{,}01 + 1} - 10) - (10\sqrt{4 \cdot 11 + 1} - 10)}{0{,}01} \approx 2{,}98$.
De snelheid op $t = 11$ is bij benadering 2,98 m/s.
Dus de snelheid op $t = 11$ is niet gelijk aan het gemiddelde van de snelheden op $t = 2$ en $t = 20$.

18 Op $[3; 3{,}01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}4 \cdot 3{,}01^2 - 0{,}4 \cdot 3^2}{0{,}01} = 2{,}404$.
De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 2,40 m/s.
Op $[5; 5{,}01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}4 \cdot 5{,}01^2 - 0{,}4 \cdot 5^2}{0{,}01} = 4{,}004$.
De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 4,00 m/s.

19 Op $[1; 1{,}01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{1{,}01 + 2}\right) - \left(8 - \frac{5}{1 + 2}\right)}{0{,}01} \approx 0{,}55$.
De snelheid op $t = 1$ is bij benadering 0,55 m/s.

Op $[2; 2{,}01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{2{,}01 + 2}\right) - \left(8 - \frac{5}{2 + 2}\right)}{0{,}01} \approx 0{,}31$.
De snelheid op $t = 2$ is bij benadering 0,31 m/s.

20 Op $[3; 3{,}001]$ is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1{,}20 \cdot 1{,}15^{3{,}001} - 1{,}20 \cdot 1{,}15^3}{0{,}001} \approx 0{,}26$.
De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 0,26 m^2/dag.

21 De gemiddelde snelheid op $[2\frac{1}{2}, 16]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{75\sqrt{32 + 4} - 150 - (75\sqrt{5 + 4} - 150)}{13\frac{1}{2}} = \frac{450 - 150 - 225 + 150}{13\frac{1}{2}} = \frac{225}{13\frac{1}{2}} = 16\tfrac{2}{3} \text{ m/s.}$$

De snelheid op $t = 8$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{75\sqrt{16{,}02 + 4} - 150 - (75\sqrt{16 + 4} - 150)}{0{,}01} \approx 16{,}8$ m/s.

De snelheid op $t = 9$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{75\sqrt{18{,}02 + 4} - 150 - (75\sqrt{18 + 4} - 150)}{0{,}01} \approx 16{,}0$ m/s.
Omdat $16{,}0 < 16\frac{2}{3} < 16{,}8$ moet er op $[8, 9]$ een tijdstip zijn waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[2\frac{1}{2}, 16]$.

2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

Bladzijde 59

22 **a** De gemiddelde snelheid op het interval $[2, 5]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-5^2 + 10 \cdot 5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{3} = 3 \text{ m/s}.$$

De gemiddelde snelheid op het interval $[2, 4]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-4^2 + 10 \cdot 4) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{2} = 4 \text{ m/s}.$$

De gemiddelde snelheid op het interval $[2, 3]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-3^2 + 10 \cdot 3) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{1} = 5 \text{ m/s}.$$

De gemiddelde snelheid op het interval $[2; 2{,}5]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-2{,}5^2 + 10 \cdot 2{,}5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{2{,}5 - 2} = \frac{18{,}75 - 16}{0{,}5} = 5{,}5 \text{ m/s}.$$

b Van de vier lijnen komt de lijn AB_4 het dichtst bij de lijn die de grafiek in A raakt.

Bladzijde 60

23 Voer in $y_1 = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$ en $y_2 = \sqrt{9x - 2}$.

Intersect geeft $x = 3$ en $y = 5$, dus $S(3, 5)$.

Stel k: $y = ax + b$.

De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=3} = -1{,}5$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -1{,}5x + b \\ \text{door } (3, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1{,}5 \cdot 3 + b = 5 \\ -4{,}5 + b = 5 \\ b = 9{,}5 \end{array}$$

Dus k: $y = -1{,}5x + 9{,}5$.

Stel l: $y = ax + b$.

De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 0{,}9$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}9x + b \\ \text{door } (3, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}9 \cdot 3 + b = 5 \\ 2{,}7 + b = 5 \\ b = 2{,}3 \end{array}$$

Dus l: $y = 0{,}9x + 2{,}3$.

Bladzijde 61

24 **a** Stel k: $y = ax + b$.

Voer in $y_1 = x^2 + x - 2$.

De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=-1} = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + b \\ f(-1) = -2, \text{ dus } A(-1, -2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} --1 + b = -2 \\ 1 + b = -2 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus k: $y = -x - 3$.

b Stel l: $y = ax + b$.

Voer in $y_1 = \dfrac{2}{x - 1} + 3$.

De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=3} = -0{,}5$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -0{,}5x + b \\ f(3) = 4, \text{ dus } A(3, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}5 \cdot 3 + b = 4 \\ -1{,}5 + b = 4 \\ b = 5{,}5 \end{array}$$

Dus l: $y = -0{,}5x + 5{,}5$.

25 Voer in $y_1 = 1 + \frac{5x^2}{x^2+1}$.

Stel k: $y = ax + b$.

De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $a = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=-2} = -0{,}8$.

$$\left.\begin{aligned} &y = -0{,}8x + b \\ &f(-2) = 5, \text{ dus } A(-2, 5) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} -0{,}8 \cdot -2 + b &= 5 \\ 1{,}6 + b &= 5 \\ b &= 3{,}4 \end{aligned}$$

Dus k: $y = -0{,}8x + 3{,}4$.

Stel l: $y = ax + b$.

De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $a = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=1} = 2{,}5$.

$$\left.\begin{aligned} &y = 2{,}5x + b \\ &f(1) = 3{,}5, \text{ dus } B(1; 3{,}5) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 2{,}5 \cdot 1 + b &= 3{,}5 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Dus l: $y = 2{,}5x + 1$.

Snijpunt S van k en l volgt uit

$-0{,}8x + 3{,}4 = 2{,}5x + 1$

$-3{,}3x = -2{,}4$

$$\left.\begin{aligned} &x = 0{,}727\ldots \\ &y = 2{,}5x + 1 \end{aligned}\right\} y = 2{,}818\ldots$$

Dus $S(0{,}73; 2{,}82)$.

26 **a** Voer in $y_1 = 0{,}6x^2$. Gebruik de optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio).

De snelheid op $t = 3$ is $\left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=3} = 3{,}6$ m/s.

De snelheid op $t = 5$ is $\left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=5} = 6$ m/s.

b Na 5 seconden is er $0{,}6 \cdot 5^2 = 15$ m afgelegd.

Tussen $t = 5$ en $t = 10$ wordt $5 \cdot 6 = 30$ m afgelegd.

Dus na 10 seconden is $15 + 30 = 45$ m afgelegd.

27 **a** Voer in $y_1 = 37 + \frac{3}{2x+1}$.

De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right]_{t=2} = -0{,}24$.

Dus op $t = 2$ is de snelheid $-0{,}24$ °C/uur.

b De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right]_{t=3} \approx -0{,}12$.

Op $t = 3$ is de lichaamstemperatuur $T = 37{,}43$ °C.

Het duurt dan nog $\frac{0{,}43}{0{,}12} \approx 3{,}5$ uur voordat de temperatuur van 37 °C is bereikt. Dus op $t \approx 6{,}5$.

Bladzijde 62

28 **a** Voer in $y_1 = \frac{600x}{4^x}$.

De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right]_{t=1} \approx -57{,}9$.

Dus op $t = 1$ is de snelheid $-57{,}9$ mg/uur.

b De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right]_{t=2} = -66{,}47\ldots$

Op $t = 2$ is de hoeveelheid verdovend middel $H = 75$ mg

Het duurt dan nog $\frac{75}{66{,}47\ldots} \approx 1{,}1$ uur voordat het verdovend middel uit het lichaam verdwenen is. Dus op $t \approx 3{,}1$.

29 **a** Voer in $y_1 = \dfrac{200x^2 + 1200x + 450}{4x^2 + 9}$.

De optie maximum geeft $x = 1{,}5$ en $y = 150$.
De inspanning duurde 1,5 minuut en de maximale hartslagfrequentie is 150 slagen per minuut.

b Voer in $y_2 = 120$.
Intersect geeft $x = 3{,}67...$
Het duurt $3{,}67 - 1{,}5 = 2{,}17$ minuten ≈ 130 seconden vanaf het moment van beëindigen van de inspanning.
De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right]_{t=3{,}67...} \approx -13{,}6$.
Op dat moment neemt de hartslag af met ongeveer 14 slagen per minuut.

c Voer in $y_1 = \dfrac{240x^2 + 1440x + 540}{4x^2 + 9}$.
De optie maximum geeft $x = 1{,}5$ en $y = 180$.
Dus de maximale hartslag van een wielrenner is 180 slagen per minuut.
De maximale hartslag van een hardloper is 150 slagen per minuut.
$k = \dfrac{180}{150} = 1{,}2$

d $120k = 120 \cdot 1{,}2 = 144$ slagen per minuut
Voer in $y_2 = 144$.
Intersect geeft $x = 3{,}67...$
De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right]_{t=3{,}67...} = -16{,}3$

$\dfrac{-16{,}3}{-13{,}6} \approx 1{,}2$, dus de snelheid waarmee de hartslag van de wielrenner afneemt is k keer zo groot als de snelheid waarmee de hartslag van een hardloper afneemt.

Bladzijde 64

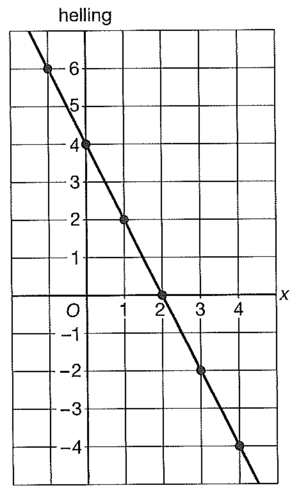
30 **a** positief
negatief

b In de top is de helling nul.

c Voer in $y_1 = -x^2 + 4x$ en gebruik de optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio).

x-coördinaat	−1	0	1	2	3	4
helling	6	4	2	0	−2	−4

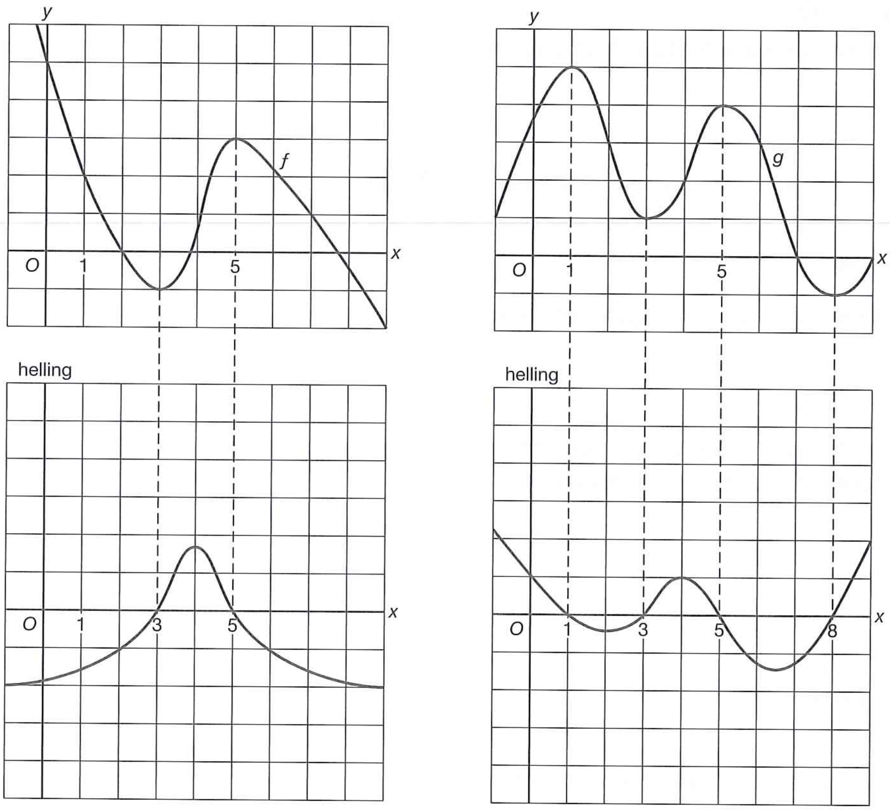
d



e De lijn geeft voor elke x de helling van de grafiek van f.

Bladzijde 65

20



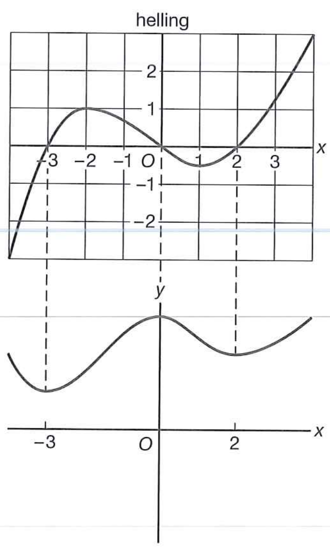
Bladzijde 66

32 **a** De hellinggrafiek ligt op het interval $\langle a,b \rangle$ boven de x-as en is daar stijgend.
b De hellinggrafiek ligt op het interval $\langle c,d \rangle$ onder de x-as en is daar stijgend.
c De hellinggrafiek snijdt de x-as in $(p,0)$ en gaat daar over van stijgend (boven de x-as) naar dalend (onder de x-as).
d De hellinggrafiek heeft een negatief minimum bij $x = q$.

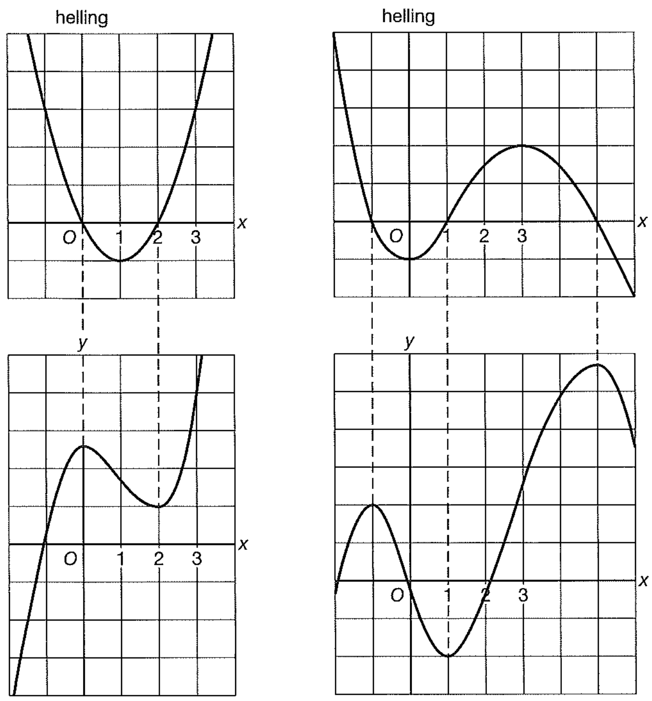
33 **a**

	hellinggrafiek van f	**grafiek van f**
$\langle -4,-3 \rangle$	onder de x-as	dalend
$x = -3$	snijdt de x-as	top
$\langle -3,0 \rangle$	boven de x-as	stijgend
$x = 0$	snijdt de x-as	top
$\langle 0,2 \rangle$	onder de x-as	dalend
$x = 2$	snijdt de x-as	top
$\langle 2,4 \rangle$	boven de x-as	stijgend

b



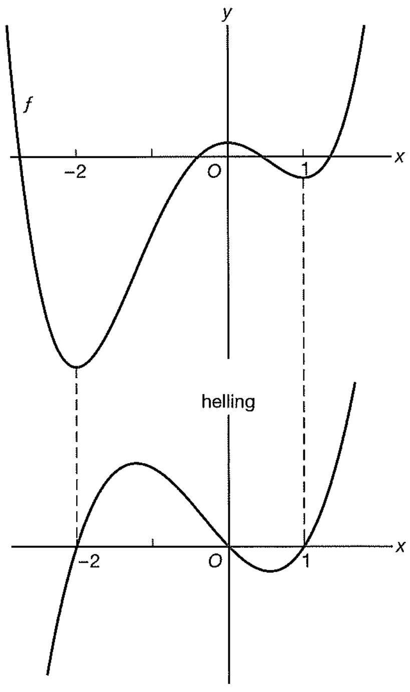
34



Bladzijde 67

35 **a** Voer in $y_1 = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$.
De optie minimum geeft $x = -2$ en $y = -30$ en $x = 1$ en $y = -3$.
De optie maximum geeft $x = 0$ en $y = 2$.
De toppen zijn $(-2,-30)$, $(0, 2)$ en $(1,-3)$.

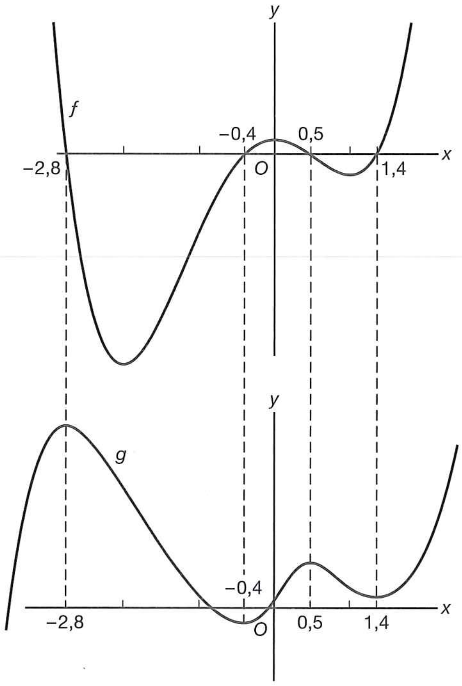
b



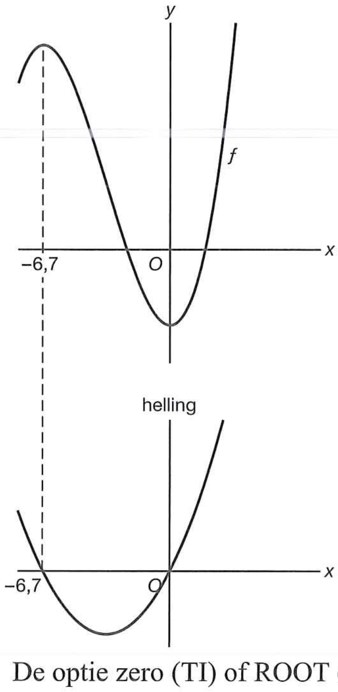
c De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=-1} = 24$.

d De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft
$x \approx -2{,}8 \vee x \approx -0{,}4 \vee x \approx 0{,}5 \vee x \approx 1{,}4$.

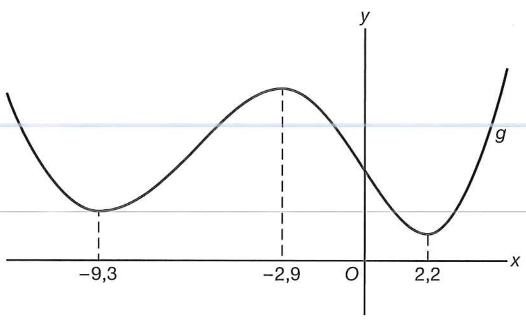
e



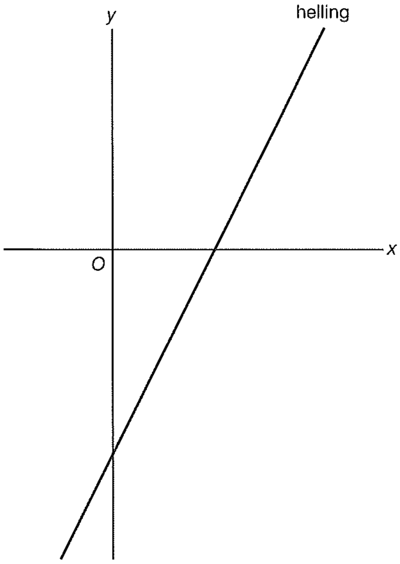
36 **a** Voer in $y_1 = 0{,}1x^3 + x^2 - 6$.
De optie maximum geeft $x \approx -6{,}7$ en $y \approx 8{,}8$.
De optie minimum geeft $x = 0$ en $y = -6$.



b De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx -9{,}3$, $x \approx -2{,}9$ en $x \approx 2{,}2$.



37 **a**



De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door een verticale verschuiving. Dus hebben f en g voor elke waarde van x dezelfde helling. De hellinggrafieken van f en g vallen dus samen.

b Stel $h(x) = x^2 - 4x + c$ door $(3, 4)$ $\Big\}$ $3^2 - 4 \cdot 3 + c = 4$

$9 - 12 + c = 4$

$-3 + c = 4$

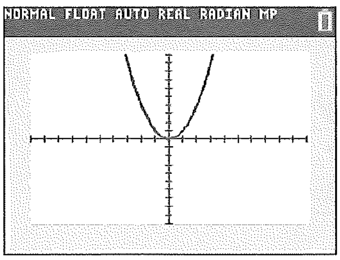
$c = 7$

Dus $h(x) = x^2 - 4x + 7$.

2.3 Limiet en afgeleide

Bladzijde 69

38 **a**



b $f(1) = 1$, $f(1{,}9) = 3{,}61$, $f(1{,}99) = 3{,}9601$, $f(2{,}01) = 4{,}0401$

c $f(2) = \dfrac{2^3 - 2 \cdot 2^2}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$ en dat is onbepaald.

39 **a** $\dfrac{6(x+2)}{x(x+2)} = \dfrac{6}{x}$ mits $x \neq -2$

b $\dfrac{(x+2)(x+3)}{2(x+3)} = \dfrac{x+2}{2} = \frac{1}{2}x + 1$ mits $x \neq -3$

c $\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-1} = x - 4$ mits $x \neq 1$

d $\dfrac{x^2 - x}{x - 1} = \dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$ mits $x \neq 1$

Bladzijde 71

40 **a** $f(2) = \dfrac{2^2 + 2 - 6}{2 - 3} = \dfrac{0}{-1} = 0$, dus de functie f is continu in 2 en heeft dus geen perforatie.

b $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2} = x + 3$ mits $x \neq 2$.

De grafiek van g heeft een perforatie voor $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 3) = 5$

De perforatie is dus $(2, 5)$.

41 **a** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-4}=\dfrac{2^2-5\cdot 2+6}{2-4}=\dfrac{0}{-2}=0$

b $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1$

c $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)=8$

d $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-10x+25}{x-5}=\dfrac{1^2-10\cdot 1+25}{1-5}=\dfrac{16}{-4}=-4$

42 **a** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$

b $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2x-1)}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{3}=-\frac{1}{3}$

c $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(3x+a)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(3x+a)=a$

d $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4h^2+2ah}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(4h+2a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(4h+2a)=2a$

43 **a** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$
De perforatie is dus $(1, 2)$.

b $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

De perforatie is dus $\left(2, \frac{1}{4}\right)$.

c $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+1)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+1)=5$
De perforatie is dus $(4, 5)$.

d $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{(x-4)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-4}=-\frac{1}{5}$

De perforatie is dus $\left(-1, -\frac{1}{5}\right)$.

44 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x+a)=2a$
De perforatie is dus $(a, 2a)$.

$$\left.\begin{array}{l} y=x-1 \\ (a,2a) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2a-1=a \\ a=1 \end{array}$$

Dus voor $a=1$ ligt de perforatie op $y=x-1$.

Bladzijde 72

45 **a** Voor elke x is de helling gelijk aan 3, omdat de grafiek een rechte lijn is, dus de helling is de lijn $y=3$.
b De formule van de helling is $y=0$.

Bladzijde 73

46 **a**
$$\begin{aligned} f'(4)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1\frac{1}{2}(4+h)^2-1\frac{1}{2}\cdot 4^2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1\frac{1}{2}(16+8h+h^2)-1\frac{1}{2}\cdot 16}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{24+12h+1\frac{1}{2}h^2-24}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{12h+1\frac{1}{2}h^2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left(12+1\tfrac{1}{2}h\right)=12 \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1\frac{1}{2}(x+h)^2-1\frac{1}{2}x^2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1\frac{1}{2}(x^2+2xh+h^2)-1\frac{1}{2}x^2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1\frac{1}{2}x^2+3xh+1\frac{1}{2}h^2-1\frac{1}{2}x^2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{3xh+1\frac{1}{2}h^2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left(3x+1\tfrac{1}{2}h\right)=3x \end{aligned}$$

47 **a**
$$\begin{aligned} f'(3)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-4(3+h)-(3^2-4\cdot 3)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-12-4h--3}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}(2+h)=2 \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-4(x+h)-(x^2-4x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-4x-4h-x^2+4x}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-4h}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}(2x+h-4)=2x-4 \end{aligned}$$

Bladzijde 74

48 **a** $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x+h) - ax}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ax + ah - ax}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ah}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0}(a) = a$

b $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a - a}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0}(0) = 0$

49 **a** $(x+h)^3 = (x+h)(x+h)^2$
$= (x+h)(x^2 + 2xh + h^2)$
$= x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3$
$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

b $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x+h)^3 - ax^3}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - ax^3}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 - ax^3}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3ax^2h + 3axh^2 + ah^3}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0}(3ax^2 + 3axh + ah^2) = 3ax^2$

c $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x^2 + 2xh + h^2) + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2axh + ah^2 + bh}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0}(2ax + ah + b) = 2ax + b$

50 **a** $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c \cdot (g(x+h) - g(x))}{h}$
$= c \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = c \cdot g'(x)$

b $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft
$s'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$

Bladzijde 75

51 **a** $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x - 7$ geeft $f'(x) = 30x^5 - 15x^4 + 2$
b $g(x) = -2x^8 - 4x^4 + 7{,}2$ geeft $g'(x) = -16x^7 - 16x^3$
c $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ geeft $h'(x) = -x^2 - x - 1$
d $k(q) = 1 + 3q - 3q^2 - 5q^7$ geeft $k'(q) = 3 - 6q - 35q^6$

Bladzijde 76

52 **a** $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$ geeft $f'(x) = -30x - 1$
b $g(x) = (3x + 6)^2 - 8x = 9x^2 + 36x + 36 - 8x = 9x^2 + 28x + 36$ geeft $g'(x) = 18x + 28$
c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(2x - 1) = 5(x^2 - 6x + 9) + 10x - 5 = 5x^2 - 30x + 45 + 10x - 5 = 5x^2 - 20x + 40$
geeft $h'(x) = 10x - 20$
d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 9x) - 8(x - 7) = -3(5x - 9x^2 - 5 + 9x) - 8x + 56$
$= -3(-9x^2 + 14x - 5) - 8x + 56 = 27x^2 - 42x + 15 - 8x + 56 = 27x^2 - 50x + 71$
geeft $k'(x) = 54x - 50$

53 a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x$ geeft $f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$
b $g(x) = (3x^3 - 1)^2 = 9x^6 - 6x^3 + 1$ geeft $g'(x) = 54x^5 - 18x^2$
c $h(x) = (5x^5 - 3)(3x - 2) = 15x^6 - 10x^5 - 9x + 6$ geeft $h'(x) = 90x^5 - 50x^4 - 9$
d $k(x) = 5 - 3(x^4 - x)(x + 1) = 5 - 3(x^5 + x^4 - x^2 - x) = 5 - 3x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 3x$
geeft $k'(x) = -15x^4 - 12x^3 + 6x + 3$
e $l(t) = (5t^3 - t)(3t^5 + t) = 15t^8 + 5t^4 - 3t^6 - t^2 = 15t^8 - 3t^6 + 5t^4 - t^2$
geeft $l'(t) = 120t^7 - 18t^5 + 20t^3 - 2t$
f $m(q) = 1 - (3q^2 - 2)^2 = 1 - (9q^4 - 12q^2 + 4) = 1 - 9q^4 + 12q^2 - 4 = -9q^4 + 12q^2 - 3$
geeft $m'(q) = -36q^3 + 24q$

54 a Een tweedegraadsfunctie is van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$.
Differentiëren geeft $f'(x) = 2ax + b$. Dit is een lineaire functie.
b Stel $h(x) = ax^2 + bx + c$.
Differentiëren geeft $h'(x) = 2ax + b$.
$$\left.\begin{array}{l} h'(x) = 2ax + b \\ g(x) = 6x + 12 \end{array}\right\} b = 12 \text{ en } a = 3$$
Dus $h(x) = 3x^2 + 12x + c$.
$$x_{\text{top}} = -\frac{12}{2 \cdot 3} = -2$$
$$\left.\begin{array}{l} h(x) = 3x^2 + 12x + c \\ h(-2) = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot -2 + c = -7 \\ 12 - 24 + c = -7 \\ -12 + c = -7 \\ c = 5 \end{array}$$
Dus $h(x) = 3x^2 + 12x + 5$.

2.4 Toepassingen van de afgeleide

Bladzijde 78

55 a $p(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot (3x - 7) = 3x^3 - 7x^2$ geeft $p'(x) = 9x^2 - 14x$
$f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$
$g(x) = 3x - 7$ geeft $g'(x) = 3$
b $$\left.\begin{array}{l} p'(x) = 9x^2 - 14x \\ f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3 = 6x \end{array}\right\} \text{is niet gelijk, dus } p'(x) \text{ is niet } f'(x).\ g'(x)$$
c $p'(x) = 9x^2 - 14x$
$$\begin{aligned} f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) &= 2x(3x - 7) + x^2 \cdot 3 \\ &= 6x^2 - 14x + 3x^2 \\ &= 9x^2 - 14x \end{aligned}$$
Dus $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Bladzijde 79

56 a $f(x) = (2 - 3x^2)(2 + 7x)$ geeft
$f'(x) = [2 - 3x^2]' \cdot (2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot [2 + 7x]' = -6x \cdot (2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot 7$
b $g(x) = (2x - 5)^2 = (2x - 5)(2x - 5)$ geeft
$g'(x) = [2x - 5]' \cdot (2x - 5) + (2x - 5) \cdot [2x - 5]' = 2 \cdot (2x - 5) + (2x - 5) \cdot 2 = 4(2x - 5)$
c $h(x) = (x^2 - 3x)(x^3 + x^2 + x)$ geeft
$$\begin{aligned} h'(x) &= [x^2 - 3x]' \cdot (x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x) \cdot [x^3 + x^2 + x]' \\ &= (2x - 3) \cdot (x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x) \cdot (3x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$
d $j(x) = (3x^2 - 4)^2 = (3x^2 - 4)(3x^2 - 4)$ geeft
$j'(x) = [3x^2 - 4]' \cdot (3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot [3x^2 - 4]' = 6x \cdot (3x^2 - 4) + (3x^4 - 4) \cdot 6x = 12x(3x^4 - 4)$

57 $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$
$[\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}]' = [x]'$ Neem van het linker- en rechterlid de afgeleide.
$[\sqrt{x}]' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$
$2\sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$ $:2\sqrt{x}$
$[\sqrt{x}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Dus $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

58 **a** $p = fgh = fg \cdot h = jh$ geeft $p' = j'h + jh'$
$j = fg$ geeft $j' = f'g + fg'$
Dus $p' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$
b $p = fghj$ geeft
$p' = [fgh]' \cdot j + fgh \cdot [j]'$
$= (f'gh + fg'h + fgh') \cdot j + fgh \cdot j'$
$= f'ghj + fg'hj + fgh'j + fghj'$

59 **a** $q(x) \cdot n(x) = t(x)$
Differentiëren van beide leden geeft $q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$.
b $q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$
$q'(x) \cdot n(x) = t'(x) - q(x) \cdot n'(x)$
$$q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$$
c Invullen van $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ in $q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \frac{t'(x) - \frac{t(x)}{n(x)} \cdot n'(x)}{n(x)}$

Teller en noemer vermenigvuldigen met $n(x)$geeft $q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$.

Bladzijde 81

60 **a** $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$ geeft $f'(x) = \frac{(x+5) \cdot 1 - (x-2) \cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{x+5-x+2}{(x+5)^2} = \frac{7}{(x+5)^2}$

b $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 0 - 2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$

c $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x^2+1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 3x^2 - 4x^4}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 3x^2}{(2x^2+1)^2}$

d $f(x) = \frac{x-2}{3-x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{(3-x^2) \cdot 1 - (x-2) \cdot -2x}{(3-x^2)^2} = \frac{3 - x^2 + 2x^2 - 4x}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(3-x^2)^2}$

e $f(x) = \frac{3-x^2}{x-2} + x^3$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x-2) \cdot -2x - (3-x^2) \cdot 1}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-2x^2 + 4x - 3 + x^2}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2} + 3x^2$$

f $f(x) = x - \frac{2}{x+4}$ geeft $f'(x) = 1 - \frac{(x+4) \cdot 0 - 2 \cdot 1}{(x+4)^2} = 1 - \frac{-2}{(x+4)^2} = 1 + \frac{2}{(x+4)^2}$

61 **a** $f(x) = x^2 - 3x - 1$ geeft $f'(x) = 2x - 3$
$f'(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$
$f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 3$
b $y_A = f(4)$
c De helling in A is $f'(4)$.

Bladzijde 82

62 **a** $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 6x + 5$ geeft $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 6$
Snijden met y-as, dus $x = 0$ geeft $f(0) = 5$, dus $A(0, 5)$.
Stel k: $y = ax + b$.
$a = f'(0) = \frac{3}{4} \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 6 = 6$
$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = 6x + b \\ \text{door } A(0,5) \end{array}\right\} b = 5$$
Dus k: $y = 6x + 5$.

b $g(x) = \frac{1}{3}x^2(x^2 - 9) + 4 = \frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 4$ geeft $g'(x) = 1\frac{1}{3}x^3 - 6x$

Stel l: $y = ax + b$.

$a = g'(2) = 1\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = -1\frac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} y = -1\frac{1}{3}x + b \\ g(2) = -2\frac{2}{3}\text{, dus } B\left(2, -2\frac{2}{3}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 2 + b = -2\frac{2}{3} \\ -2\frac{2}{3} + b = -2\frac{2}{3} \\ b = 0 \end{array}$$

Dus l: $y = -1\frac{1}{3}x$.

c $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 + 1}$ geeft

$$h'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot (2x + 4) - (x^2 + 4x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 4 - 2x^3 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 2x + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

Snijden met de x-as dus $h(x) = 0$ geeft $\dfrac{x^2 + 4x}{x^2 + 1} = 0$

$x^2 + 4x = 0$

$x(x + 4) = 0$

$x = 0 \vee x = -4$

vold. vold.

Stel m: $y = ax + b$.

$a = h'(0) = \dfrac{-4 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 4}{(0^2 + 1)^2} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x + b \\ \text{door } O(0, 0) \end{array}\right\} b = 0$$

Dus m: $y = 4x$.

Stel n: $y = ax + b$.

$a = h'(-4) = \dfrac{-4 \cdot (-4)^2 + 2 \cdot -4 + 4}{((-4)^2 + 1)^2} = -\frac{4}{17}$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{4}{17}x + b \\ \text{door } C(-4, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{4}{17} \cdot -4 + b = 0 \\ \frac{16}{17} + b = 0 \\ b = -\frac{16}{17} \end{array}$$

Dus n: $y = -\frac{4}{17}x - \frac{16}{17}$.

63 **a** $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4x$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(4) = 1\frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 = 8$

$$\left.\begin{array}{l} y = 8x + b \\ f(4) = 2\text{, dus } A(4, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 2 \\ 32 + b = 2 \\ b = -30 \end{array}$$

Dus k: $y = 8x - 30$.

b Stel m: $y = ax + b$.

$a = f'(-2) = 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 4 \cdot -2 = 14$

$$\left.\begin{array}{l} y = 14x + b \\ f(-2) = -10\text{, dus } B(-2, -10) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 14 \cdot -2 + b = -10 \\ -28 + b = -10 \\ b = 18 \end{array}$$

Dus m: $y = 14x + 18$.

64 **a** $g(x) = 2x^2 - 6x$ geeft $g'(x) = 4x - 6$

Stel l: $y = ax + b$.

$a = g'(-3) = 4 \cdot -3 - 6 = -18$

$$\left.\begin{array}{l} y = -18x + b \\ g(-3) = 36\text{, dus } A(-3, 36) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -18 \cdot -3 + b = 36 \\ 54 + b = 36 \\ b = -18 \end{array}$$

Dus l: $y = -18x - 18$.

b $g(x) = 0$ geeft $2x^2 - 6x = 0$

$x(2x - 6) = 0$

$x = 0 \vee x = 3$

Dus $P(3, 0)$.

Stel n: $y = ax + b$.

$a = g'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 6$

$\left.\begin{array}{l} y = 6x + b \\ \text{door } P(3,0) \end{array}\right\}$ $6 \cdot 3 + b = 0$

$18 + b = 0$

$b = -18$

Dus n: $y = 6x - 18$.

Bladzijde 83

65 **a** $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 5}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x+5) \cdot 2x - (x^2 - 4) \cdot 2}{(2x+5)^2} = \frac{4x^2 + 10x - 2x^2 + 8}{(2x+5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 8}{(2x+5)^2}$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(-2) = \frac{2 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot -2 + 8}{(2 \cdot -2 + 5)^2} = -4$

$\left.\begin{array}{l} y = -4x + b \\ A(-2, 0) \end{array}\right\}$ $-4 \cdot -2 + b = 0$

$8 + b = 0$

$b = -8$

Dus k: $y = -4x - 8$.

Stel l: $y = ax + b$.

$a = f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 8}{(2 \cdot 2 + 5)^2} = \frac{4}{9}$

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{4}{9}x + b \\ B(2, 0) \end{array}\right\}$ $\frac{4}{9} \cdot 2 + b = 0$

$b = -\frac{8}{9}$

Dus l: $y = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}$.

b $\left.\begin{array}{l} f(0) = -\frac{4}{5} \text{ dus } C\left(0, -\frac{4}{5}\right) \\ f'(0) = \frac{8}{25} \end{array}\right\}$ m: $y = \frac{8}{25}x - \frac{4}{5}$

Bladzijde 84

66 $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 4}$ geeft

$f'(x) = \frac{(x^2 - 4) \cdot 2 - (2x - 5) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8 - 4x^2 + 10x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{(x^2 - 4)^2}$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(0) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(0) = 1\frac{1}{4} \text{ dus } A\left(0, 1\frac{1}{4}\right) \end{array}\right\}$ $b = 1\frac{1}{4}$

Dus k: $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}$.

$y_B = 0$ geeft $\frac{2x - 5}{x^2 - 4} = 0$

$2x - 5 = 0$

$2x = 5$

$x = 2\frac{1}{2}$

voldoet

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} \\ \left(2\frac{1}{2}, 0\right) \end{array}\right\}$ $-\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 0$

klopt!

Hieruit volgt dat B ook op de lijn k ligt, dus de bewering is waar.

67 **a** $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot -3 - 4 = 17$

$$\left.\begin{array}{l} y = 17x + b \\ f(-3) = -10\text{, dus } A(-3, -10) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 17 \cdot -3 + b = -10 \\ -51 + b = -10 \\ b = 41 \end{array}$$

Dus k: $y = 17x + 41$.

b B is het snijpunt met de y-as, dus $x_B = 0$.

Stel l: $y = ax + b$.

$a = f'(0) = -4$

$$\left.\begin{array}{l} y = -4x + b \\ f(0) = -4\text{, dus } B(0, -4) \end{array}\right\} b = -4$$

Dus l: $y = -4x - 4$.

c $f(x) = 0$ geeft $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \vee x + 1 = 0$

$x^2 = 4 \vee x = -1$

$x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$

Dus $C(2, 0)$.

Stel m: $y = ax + b$.

$a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 12$

$$\left.\begin{array}{l} y = 12x + b \\ \text{door } C(2, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 12 \cdot 2 + b = 0 \\ 24 + b = 0 \\ b = -24 \end{array}$$

Dus m: $y = 12x - 24$.

68 $f(x) = x^3 + ax^2 + a^2x$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2$

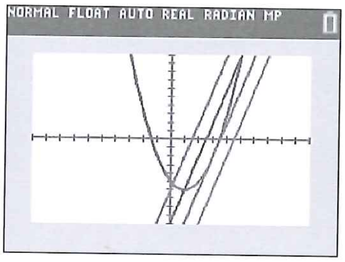
Stel k: $y = mx + n$.

$m = f'(a) = 3 \cdot a^2 + 2a \cdot a + a^2 = 6a^2$

$$\left.\begin{array}{l} y = 6a^2x + n \\ f(a) = 3a^3\text{, dus } A(a, 3a^3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6a^2 \cdot a + n = 3a^3 \\ 6a^3 + n = 3a^3 \\ n = -3a^3 \end{array}$$

Dus k: $y = 6a^2x - 3a^3$.

69 **a**



b De lijn $y = 4x - 14$ raakt de grafiek van f.

c Er geldt $f'(x_R) = 4$.

Bladzijde 85

70 **a** $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ geeft $f'(x) = -2x + 2$

$f'(x) = 4$ geeft $-2x + 2 = 4$

$-2x = 2$

$x = -1$

$x_A = -1$ en $y_A = f(-1) = 0$, dus $A(-1, 0)$.

b k is evenwijdig met l, dus $\text{rc}_k = \text{rc}_l = -6$ en $f'(x_B) = \text{rc}_k = \text{rc}_l = -6$.

$f'(x_B) = -6$ geeft $-2x + 2 = -6$

$-2x = -8$

$x = 4$

$x_B = 4$ en $y_B = f(4) = -5$, dus $B(4, -5)$.

71 **a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x + 6$ geeft $f'(x) = x^2 + x - 10$

$f'(x) = 2$ geeft $x^2 + x - 10 = 2$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x + 4)(x - 3) = 0$

$x = -4 \vee x = 3$

$x_A = -4$ en $y_A = f(-4) = 32\frac{2}{3}$, dus $A\left(-4, 32\frac{2}{3}\right)$.

$x_B = 3$ en $y_B = f(3) = -10\frac{1}{2}$, dus $B\left(3, -10\frac{1}{2}\right)$.

b raaklijn is evenwijdig met k, dus $f'(x_C) = f'(x_D) = \text{rc}_k = 10$.

$f'(x) = 10$ geeft $x^2 + x - 10 = 10$

$x^2 + x - 20 = 0$

$(x + 5)(x - 4) = 0$

$x = -5 \vee x = 4$

Dus $x_C = -5$ en $x_D = 4$.

72 **a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

$$\left.\begin{array}{l} y = 8x + b \\ f(4) = 4\frac{1}{3}, \text{ dus } P\left(4, 4\frac{1}{3}\right) \end{array}\right\} 8 \cdot 4 + b = 4\frac{1}{3}$$

$32 + b = 4\frac{1}{3}$

$b = -27\frac{2}{3}$

Dus k: $y = 8x - 27\frac{2}{3}$.

b $f'(x) = 3$ geeft $x^2 - 2x = 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \vee x = 3$

$x_Q = -1$ en $y_Q = f(-1) = -2\frac{1}{3}$, dus $Q\left(-1, -2\frac{1}{3}\right)$.

$x_R = 3$ en $y_R = f(3) = -1$, dus $R(3, -1)$.

73 $f_p = x^3 + px^2 + 2x - 3$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px + 2$

$f_p'(x) = -1$ geeft $3x^2 + 2px + 2 = -1$

$3x^2 + 2px + 3 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Twee raaklijnen betekent twee oplossingen, dus } D > 0 \\ D = (2p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4p^2 - 36 \end{array}\right\} 4p^2 - 36 > 0$$

$4p^2 > 36$

$p^2 > 9$

$p < -3 \vee p > 3$

Bladzijde 86

74 **a** $h = -5t^2 + 25t$ geeft $v = -10t + 25$

$t = 0$ geeft $v = 25$ m/s

b $t = 3$ geeft $v = -10 \cdot 3 + 25 = -5$, dus de snelheid is 5 m/s omlaag.

c Op het hoogste punt is de snelheid nul.

$v = 0$ geeft $-10t + 25 = 0$

$-10t = -25$

$t = 2{,}5$

Dat is na 2,5 seconden het geval.

d $h = 0$ geeft $-5t^2 + 25t = 0$

$-5t(t - 5) = 0$

$t = 0 \vee t = 5$

Dus na 5 seconden is de bal weer op de grond.

$t = 5$ geeft $v = -10 \cdot 5 + 25 = -25$

De bal komt met een snelheid van 25 m/s weer op de grond.

75 **a** $s = 0{,}8t^2$ geeft $v = 1{,}6t$

Op $t = 3$ is $v = 1{,}6 \cdot 3 = 4{,}8$ m/s.

Op $t = 6$ is $v = 1{,}6 \cdot 6 = 9{,}6$ m/s.

b $30 \text{ km/uur} = \frac{30}{3{,}6} \text{ m/s}$

$v = \frac{30}{3{,}6}$ geeft $1{,}6t = \frac{30}{3{,}6}$

$t \approx 5{,}21$

Dus na 5,21 seconden.

c In de eerste zes seconden legt de auto $0{,}8 \cdot 6^2 = 28{,}8$ m af.
Tussen $t = 6$ en $t = 10$ legt de auto $4 \cdot 9{,}6 = 38{,}4$ m af.
Dus in de eerste tien seconden $28{,}8 + 38{,}4 = 67{,}2$ m.

2.5 Hellingen en raaklijnen met GeoGebra

Bladzijde 88

76 **a** *
b *
c *
d *

Bladzijde 89

77 **a** *
b $P(1, -5)$
c *
d Het differentiequotiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van lijn l.
e $l: y = -2x - 2$ en $B(2, -6)$.
f *
g $l: y = 4x - 18$

78 **a** $l: y = 4x + 1$
b De hellingen zijn 6, 2, 0, -2, -4.
c In (6, 0) is de helling -6.
In (7,-7) is de helling -8.

Bladzijde 90

79 **a** *
b *
c $y = 2x - 6$
d $\left(5, 4\frac{1}{2}\right)$
e Door de punten die boven de parabool liggen gaat geen raaklijn.

80 **a** *
b *
c $y = -x + 4$
d Ja, het antwoord klopt.

Bladzijde 91

81 **a** formule hellinggrafiek is $y = 2x - 2$
b formule hellinggrafiek is $y = x^2 - 2$
c De hellinggrafiek heeft twee toppen.

82 **a** *
b in (2, 2) en in (-2,-2).
c (0, 0)
d Door (5, 0) gaan twee raaklijnen.
e Door (1, 0) gaat één raaklijn.

83 **a** $f'(x) = x - 6$
b $g'(x) = -x + 4$
c $h'(x) = -x + 4$

84 De grafieken van g en h hebben dezelfde helling. Dit is geen toeval omdat de grafiek van h ontstaat uit de grafiek van g door deze 4 omhoog te verschuiven. De hellingen van de beide grafieken zijn dus gelijk.

Diagnostische toets

Bladzijde 92

1 **a** Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 1\rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 1, 2\frac{1}{2}\rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 2\frac{1}{2}, 4\rangle$.
Toenemend dalend $\langle 4, 6\rangle$.
Afnemend dalend $\langle 6, 7\frac{1}{2}\rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 7\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$.

b Op$[1,4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - -5\frac{1}{2}}{4-1} = \frac{9\frac{1}{2}}{3} = 3\frac{1}{6}$

c Op$[2,6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - -2}{6-2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

d Trek de halve lijn met beginpunt $O(0,0)$ en rc $= 1$. Deze lijn gaat ook door (4, 4) en (8, 8).
De lijn snijdt de grafiek in drie punten, dus er zijn drie waarden van p.

2 **a** Op$[1,4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{8 - -2\frac{1}{2}}{3} = 3\frac{1}{2}$.

b Op$[-1,1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1--1} = \frac{-2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} = -1\frac{1}{2}$.

c Stel l: $y = ax + b$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(-2)}{3--2} = \frac{-1\frac{1}{2} - -4}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(-2,-4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot -2 + b = -4 \\ -1 + b = -4 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus l: $y = \frac{1}{2}x - 3$.

3 **a** Op $[1,9]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9-5}{9-1} = \frac{4}{8} = 0{,}5$ km/minuut $= 30$ km/uur

b De gemiddelde snelheid op [0, 9] is de richtingcoëfficiënt van de lijn door (0, 0) en (9, 9), dus rc = 1.
De halve lijn met beginpunt (1, 5) en rc = 1 snijdt de grafiek in (4, 8), dus $p = 4$.

c Op $[1; 1{,}01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(10 - \frac{10}{1{,}01+1}\right) - \left(10 - \frac{10}{1+1}\right)}{0{,}01} = 2{,}48\ldots$ km/min
De snelheid op $t = 1$ is bij benadering $2{,}48\ldots \cdot 60 \approx 149$ km/uur.

4 **a** Voer in $y_1 = \sqrt{2x-3}$.
De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft helling $= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 1$.

b De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft snelheid $= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

c Stel k: $y = ax + b$.
De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=6} = \frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ f(6) = 3, \text{ dus } B(6,3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 6 + b = 3 \\ 2 + b = 3 \\ b = 1 \end{array}$$

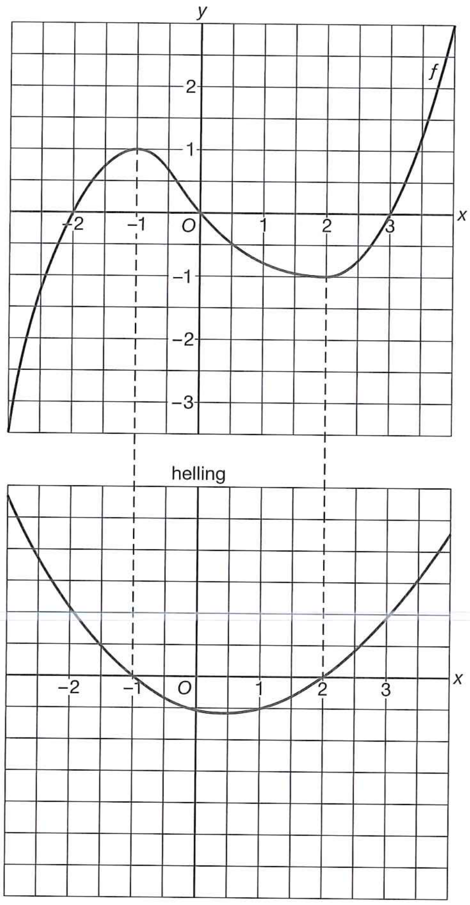
Dus k: $y = \frac{1}{3}x + 1$.

5 **a** Voer in $y_1 = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2$.
Gebruik de optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio).
De snelheid op $t = 2$ is $\left[\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=2} = 9$ m/s.

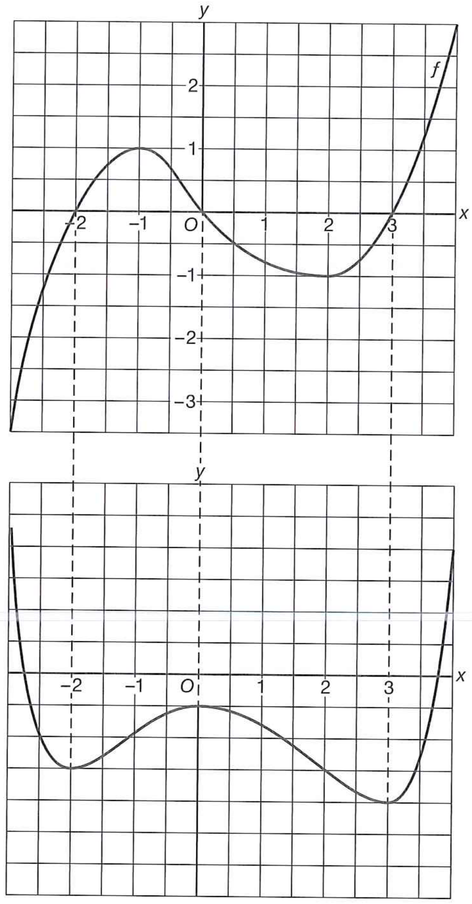
b $t = 6$ geeft $s = 54$
De snelheid op $t = 6$ is $\left[\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=6} = 9$ m/s.
Tussen $t = 6$ en $t = 10$ wordt $4 \cdot 9 = 36$ m afgelegd.
Dus na 10 seconden is $54 + 36 = 90$ m afgelegd.

Bladzijde 93

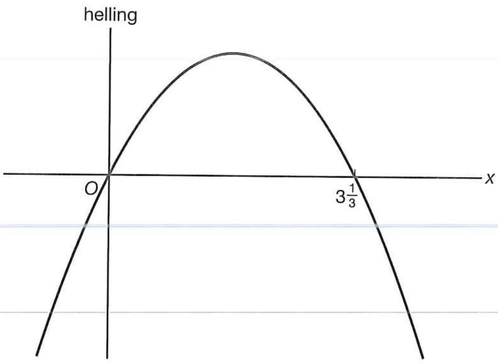
6 **a**



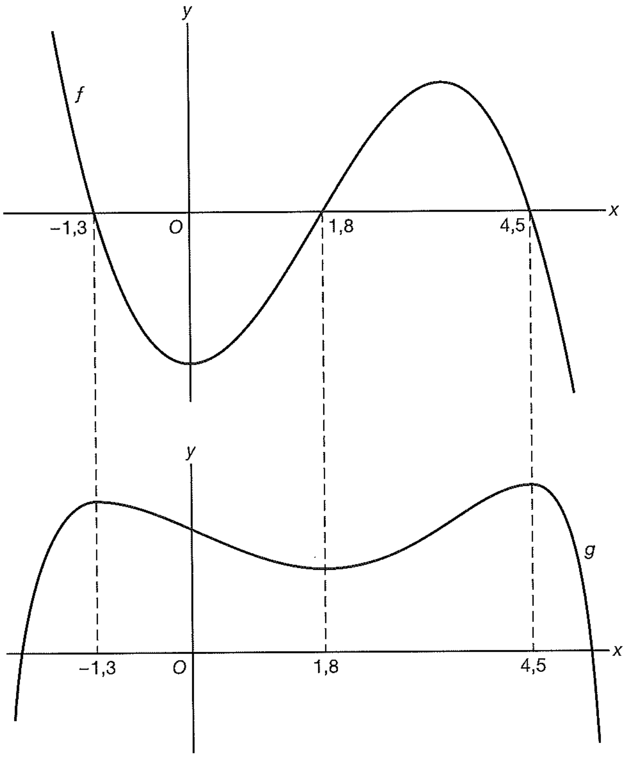
b



7 **a** Voer in $y_1 = -0{,}2x^3 + x^2 - 2$.
De optie minimum geeft $x = 0$.
De optie maximum geeft $x = 3\frac{1}{3}$.



b De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx -1{,}3$, $x \approx 1{,}8$ en $x \approx 4{,}5$.



8 **a** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 2} = \dfrac{(-2)^2 - 2 \cdot -2 - 8}{-2 - 2} = \dfrac{0}{-4} = 0$

b $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 4)(x - 2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 4) = 6$

c $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 4$

9 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 + 6x + 5} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{(x + 1)(x + 5)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x + 5} = \frac{1}{4}$

De perforatie is dus $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$.

10 **a**
$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{5(3 + h)^2 + 4 - (5 \cdot 3^2 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{5(9 + 6h + h^2) + 4 - 49}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{45 + 30h + 5h^2 + 4 - 49}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{30h + 5h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}(30 + 5h) = 30 \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{5(x + h)^2 + 4 - (5x^2 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{5(x^2 + 2xh + h^2) + 4 - 5x^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 4 - 5x^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{10xh + 5h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}(10x + 5h) = 10x \end{aligned}$$

11 **a** $f(x) = 0{,}6x^3 - 1{,}3x^2 + 7$ geeft $f'(x) = 1{,}8x^2 - 2{,}6x$
b $g(p) = 4p^3 + p^2 - 11p + 20$ geeft $g'(p) = 12p^2 + 2p - 11$

12 **a** $f(x) = (3 - x)(5 + 2x) = 15 + 6x - 5x - 2x^2 = -2x^2 + x + 15$ geeft $f'(x) = -4x + 1$
b $g(x) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$ geeft $g'(x) = 18x + 6$
c $h(x) = x(2x - 1)^2 = x(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x$ geeft $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$
d $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2(x - 4) + 6 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^3 - 8x^2 + 6 = 2\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 6$ geeft $k'(x) = 7x^2 - 16x$

13 **a** $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x-1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(3x-1)\cdot 2 - (2x-3)\cdot 3}{(3x-1)^2} = \dfrac{6x-2-6x+9}{(3x-1)^2} = \dfrac{7}{(3x-1)^2}$

b $g(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ geeft $g'(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot 4x^3 - x^4\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x^5+4x^3-2x^5}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^5+4x^3}{(x^2+1)^2}$

c $h(x) = x^2 - \dfrac{3}{x+1}$ geeft $h'(x) = 2x - \dfrac{(x+1)\cdot 0 - 3\cdot 1}{(x+1)^2} = 2x - \dfrac{-3}{(x+1)^2} = 2x + \dfrac{3}{(x+1)^2}$

14 **a** $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(2) = -\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2 + 4 = 4$

$\left.\begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(2) = 9\frac{2}{3}\text{, dus } A\left(2, 9\frac{2}{3}\right) \end{array}\right\}\; 4\cdot 2 + b = 9\frac{2}{3}$

$8 + b = 9\frac{2}{3}$

$b = 1\frac{2}{3}$

Dus k: $y = 4x + 1\frac{2}{3}$.

b Stel l: $y = ax + b$.

C is het snijpunt met de y-as, dus $x_C = 0$.

$a = f'(0) = 4$

$\left.\begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(0) = 1\text{, dus } C(0, 1) \end{array}\right\}\; b = 1$

Dus l: $y = 4x + 1$.

15 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x - 1$

Raaklijn evenwijdig met k, dus $f'(x_A) = f'(x_B) = \text{rc}_k = 2$.

$f'(x) = 2$ geeft $x^2 - 2x - 1 = 2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1 \lor x = 3$

$x_A = -1$ en $y_A = f(-1) = 1\frac{2}{3}$, dus $A\left(-1, 1\frac{2}{3}\right)$.

$x_B = 3$ en $y_B = f(3) = -1$, dus $B(3, -1)$.

3 Vergelijkingen en herleidingen

Voorkennis Stelsels lineaire vergelijkingen en kwadratische ongelijkheden

Bladzijde 96

1 **a**

l:

x	0	2
y	-6	0

m:

x	0	1
y	1	0

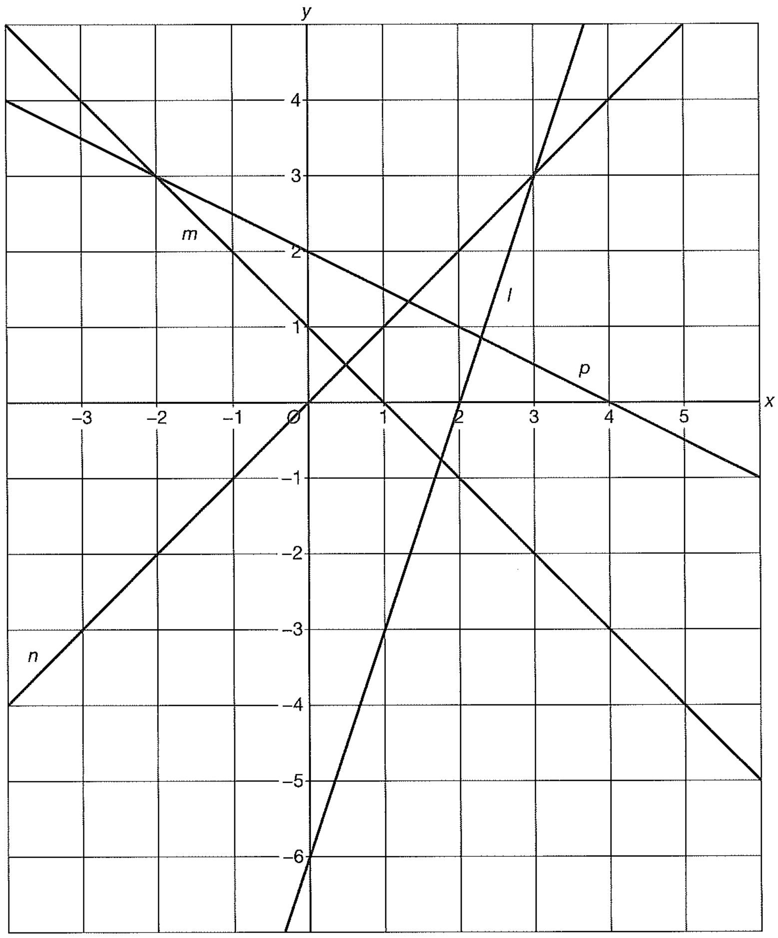
n:

x	0	3
y	0	3

p:

x	0	4
y	2	0

of
l: $3x - y = 6$ geeft l: $y = 3x - 6$, dus $rc_l = 3$ en l snijdt de x-as in $(0, -6)$.
m: $x + y = 1$ geeft m: $y = -x + 1$, dus $rc_m = -1$ en m snijdt de x-as in $(0, 1)$.
n: $x - y = 0$ geeft n: $y = x$, dus $rc_n = 1$ en n snijdt de x-as in $(0, 0)$.
p: $x + 2y = 4$ geeft l: $y = -\frac{1}{2}x + 2$, dus $rc_p = -\frac{1}{2}$ en p snijdt de x-as in $(0, 2)$.



b $rc_l = 3, rc_m = -1, rc_n = 1$ en $rc_p = -\frac{1}{2}$.

2 **a** Snijpunt met de x-as, dus $y = 0$ geeft
$$4x - 3 \cdot 0 = 24$$
$$4x = 24$$
$$x = 6$$
Dus het snijpunt met de x-as is $(6, 0)$.
Snijpunt met de y-as, dus $x = 0$ geeft
$$4 \cdot 0 - 3y = 24$$
$$-3y = 24$$
$$y = -8$$
Dus het snijpunt met de y-as is $(0, -8)$.

b Invullen van $A(8, 3)$ geeft $4 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 24$
$32 - 9 = 24$
$23 = 24$
Dit klopt niet, dus A ligt niet op l.

Invullen van $B(18, 16)$ geeft $4 \cdot 18 - 3 \cdot 16 = 24$
$72 - 48 = 24$
$24 = 24$
Dit klopt, dus B ligt op l.

Invullen van $C(-30, -48)$ geeft $4 \cdot -30 - 3 \cdot -48 = 24$
$-120 + 144 = 24$
$24 = 24$
Dit klopt, dus C ligt op l.

3

c $\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 24 \\ (16, p) \end{array}\right\}$ $4 \cdot 16 - 3 \cdot p = 24$
$64 - 3p = 24$
$-3p = -40$
$p = \dfrac{-40}{-3} = 13\frac{1}{3}$

d $\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 24 \\ (q, 48) \end{array}\right\}$ $4 \cdot q - 3 \cdot 48 = 24$
$4q - 144 = 24$
$4q = 168$
$q = 42$

Bladzijde 97

3 **a** Uit $3x + y = 7$ volgt $y = -3x + 7$.
$y = -3x + 7$ en $x - 4y = 11$ geeft $x - 4(-3x + 7) = 11$
$x + 12x - 28 = 11$
$13x = 39$
$x = 3$
$x = 3$ en $y = -3x + 7$ geeft $y = -3 \cdot 3 + 7 = -2$.
De oplossing is $(x, y) = (3, -2)$.

b Uit $x + 2y = -3$ volgt $y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.
$y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$ en $4x - 3y = 10$ geeft $4x - 3\left(-\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}\right) = 10$
$4x + 1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 10$
$5\frac{1}{2}x = 5\frac{1}{2}$
$x = 1$
$x = 1$ en $y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 1 - 1\frac{1}{2} = -2$.
De oplossing is $(x, y) = (1, -2)$.

c Uit $5x + 4y = 56$ volgt $y = -1\frac{1}{4}x + 14$.
$y = -1\frac{1}{4}x + 14$ en $x - 6y = 1$ geeft $x - 6\left(-1\frac{1}{4}x + 14\right) = 1$
$x + 7\frac{1}{2}x - 84 = 1$
$8\frac{1}{2}x = 85$
$x = 10$
$x = 10$ en $y = -1\frac{1}{4}x + 14$ geeft $y = -1\frac{1}{4} \cdot 10 + 14 = 1\frac{1}{2}$.
De oplossing is $(x, y) = \left(10, 1\frac{1}{2}\right)$.

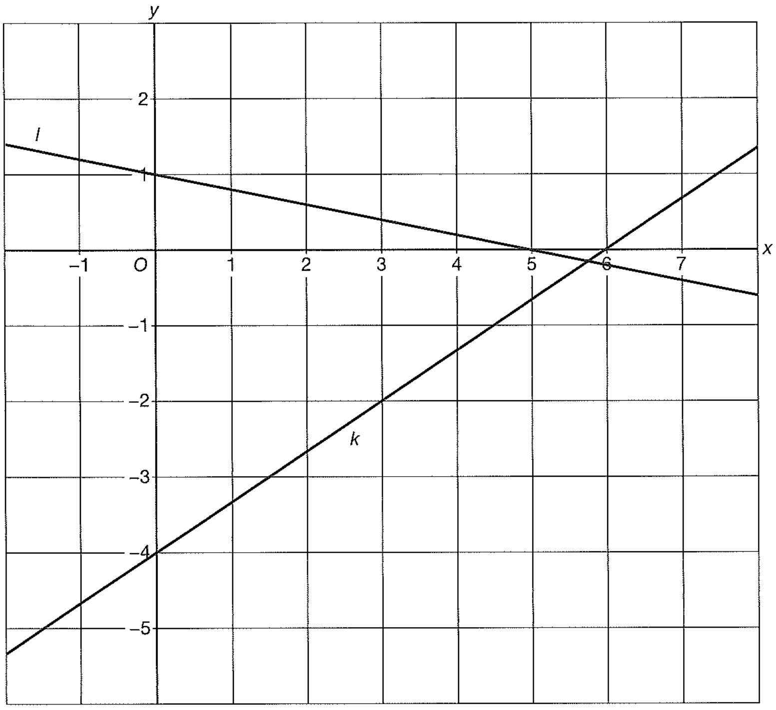
4 **a** k:

x	0	6
y	-4	0

l:

x	0	5
y	1	0

of
k: $2x - 3y = 12$ geeft k: $y = \frac{2}{3}x - 4$, dus $rc_k = \frac{2}{3}$ en k snijdt de x-as in (0, -4).
l: $x + 5y = 5$ geeft l: $y = -\frac{1}{5}x + 1$, dus $rc_l = -\frac{1}{5}$ en l snijdt de x-as in (0, 1).



b Uit $x + 5y = 5$ volgt $y = -\frac{1}{5}x + 1$.

$y = -\frac{1}{5}x + 1$ en $2x - 3y = 12$ geeft $2x - 3\left(-\frac{1}{5}x + 1\right) = 12$

$$2x + \tfrac{3}{5}x - 3 = 12$$

$$2\tfrac{3}{5}x = 15$$

$$x = 5\tfrac{10}{13}$$

$x = 5\frac{10}{13}$ en $y = -\frac{1}{5}x + 1$ geeft $y = -\frac{1}{5} \cdot 5\frac{10}{13} + 1 = -\frac{2}{13}$.

De oplossing is $(x, y) = \left(5\frac{10}{13}, -\frac{2}{13}\right)$.

Bladzijde 98

5 **a** Voor geen enkele x.
b Voor elke x.
c Voor $x \neq 1\frac{1}{2}$.

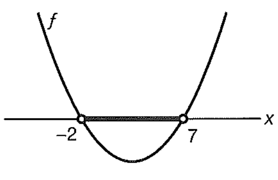
6 **a** $\underbrace{x^2 - 5x - 14}_{f(x)} < 0$

$f(x) = 0$ geeft $x^2 - 5x - 14 = 0$

$$(x - 7)(x + 2) = 0$$

$$x - 7 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$x = 7 \vee x = -2$$



$f(x) < 0$ geeft $-2 < x < 7$

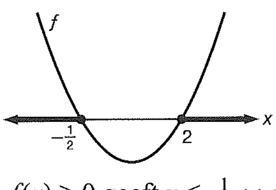
b $\underbrace{2x^2 - 3x - 2}_{f(x)} \geq 0$

$f(x) = 0$ geeft $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$x = \frac{3 - 5}{4} \vee x = \frac{3 + 5}{4}$$

$$x = -\tfrac{1}{2} \vee x = 2$$



$f(x) \geq 0$ geeft $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 2$

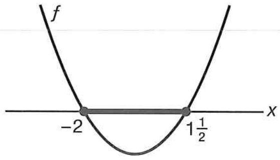
c $\underbrace{2x^2 + x - 6}_{f(x)} \leq 0$

$f(x) = 0$ geeft $2x^2 + x - 6 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot -6 = 49$

$x = \frac{-1-7}{4} \vee x = \frac{-1+7}{4}$

$x = -2 \vee x = 1\frac{1}{2}$



$f(x) \leq 0$ geeft $-2 \leq x \leq 1\frac{1}{2}$

d $(x-1)^2 + 3x + 14 - 5(x-2)^2 \geq 0$

$x^2 - 2x + 1 + 3x + 14 - 5(x^2 - 4x + 4) \geq 0$

$x^2 + x + 15 - 5x^2 + 20x - 20 \geq 0$

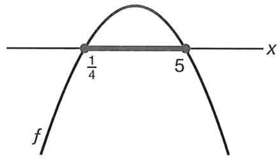
$\underbrace{-4x^2 + 21x - 5}_{f(x)} \geq 0$

$f(x) = 0$ geeft $-4x^2 + 21x - 5 = 0$

$D = 441 - 4 \cdot -4 \cdot -5 = 361$

$x = \frac{-21-19}{-8} \vee x = \frac{-21+19}{-8}$

$x = 5 \vee x = \frac{1}{4}$



$f(x) \geq 0$ geeft $\frac{1}{4} \leq x \leq 5$

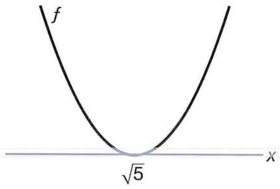
7 **a** $\underbrace{x^2 - 2x\sqrt{5} + 5}_{f(x)} > 0$

$f(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x\sqrt{5} + 5 = 0$

$(x - \sqrt{5})^2 = 0$

$x - \sqrt{5} = 0$

$x = \sqrt{5}$



$f(x) > 0$ geeft $x < \sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$
ofwel $x \neq \sqrt{5}$.

b $x^2 - 40 \leq 0$

$x^2 \leq 40$ geeft $-\sqrt{40} \leq x \leq \sqrt{40}$,
ofwel $-2\sqrt{10} \leq x \leq 2\sqrt{10}$.

c $\underbrace{9x^2 - 24x + 16}_{f(x)} \leq 0$

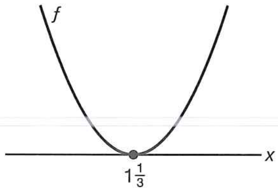
$f(x) = 0$ geeft $9x^2 - 24x + 16 = 0$

$(3x-4)^2 = 0$

$3x - 4 = 0$

$3x = 4$

$x = 1\frac{1}{3}$



$f(x) \leq 0$ geeft $x = 1\frac{1}{3}$

d $(2x-5)^2 - (x-7)^2 - 2x(x-3) \geq 0$

$4x^2 - 20x + 25 - (x^2 - 14x + 49) - 2x^2 + 6x \geq 0$

$4x^2 - 20x + 25 - x^2 + 14x - 49 - 2x^2 + 6x \geq 0$

$x^2 - 24 \geq 0$

$x^2 \geq 24$ geeft $x \leq -\sqrt{24} \vee x \geq \sqrt{24}$

$x \leq -2\sqrt{6} \vee x \geq 2\sqrt{6}$

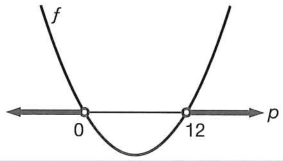
Bladzijde 99

8 **a** $\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3p = p^2 - 12p \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\} \underbrace{p^2 - 12p}_{f(p)} > 0$

$f(p) = 0$ geeft $p^2 - 12p = 0$

$p(p - 12) = 0$

$p = 0 \vee p = 12$



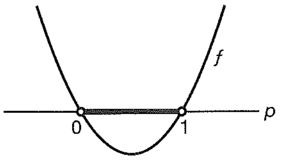
De vergelijking heeft twee oplossingen voor $p < 0 \vee p > 12$.

b $\left.\begin{array}{l} D = (\text{-}2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 4p^2 - 4p \\ \text{geen oplossingen als } D < 0 \end{array}\right\} \underbrace{4p^2 - 4p}_{f(p)} < 0$

$f(p) = 0$ geeft $4p^2 - 4p = 0$

$4p(p - 1) = 0$

$p = 0 \vee p = 1$



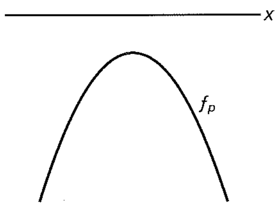
De vergelijking heeft geen oplossingen voor $0 < p < 1$.

c $\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot \text{-}3 = p^2 + 12 \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\} p^2 + 12 > 0$

Voor elke waarde van p is $p^2 + 12 > 0$.

De vergelijking heeft twee oplossingen voor elke waarde van p.

9 **a**

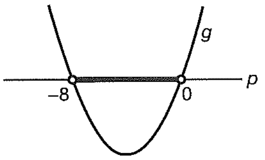


$\left.\begin{array}{l} \text{Er moet gelden } D < 0 \\ D = p^2 - 4 \cdot \text{-}1 \cdot 2p = p^2 + 8p \end{array}\right\} \underbrace{p^2 + 8p}_{g(p)} < 0$

$g(p) = 0$ geeft $p^2 + 8p = 0$

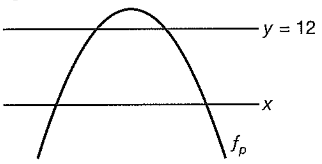
$p(p + 8) = 0$

$p = 0 \vee p = \text{-}8$



f_p heeft een negatief maximum voor $\text{-}8 < p < 0$.

b



Er moet gelden, dat de vergelijking $f_p(x) = 12$ twee oplossingen heeft.

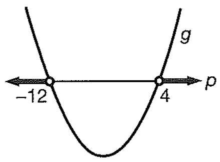
$f_p(x) = 12$ geeft $\text{-}x^2 + px + 2p - 12 = 0$

$\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot \text{-}1 \cdot (2p - 12) = p^2 + 8p - 48 \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\} \underbrace{p^2 + 8p - 48}_{g(p)} > 0$

$g(p) = 0$ geeft $p^2 + 8p - 48 = 0$

$(p + 12)(p - 4) = 0$

$p = \text{-}12 \vee p = 4$



Het maximum van f_p is groter dan 12 voor $p < \text{-}12 \vee p > 4$.

3

3.1 Hogeregraadsvergelijkingen

Bladzijde 100

1 **a** $x^3 = 10$ heeft één oplossing, omdat de grafiek van f en de lijn $y = 10$ één snijpunt hebben.
$x^3 = -10$ heeft één oplossing, omdat de grafiek van f en de lijn $y = -10$ één snijpunt hebben.

b $x^4 = 10$ heeft twee oplossingen, omdat de grafiek van g en de lijn $y = 10$ twee snijpunten hebben.
$x^4 = -10$ heeft geen oplossingen, omdat de grafiek van g en de lijn $y = -10$ geen snijpunten hebben.

Bladzijde 101

2 **a**

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	
5	25	125	625		
6	36	216			

b *

Bladzijde 102

3 **a** $\frac{1}{4}x^3 + 60 = 6$
$\frac{1}{4}x^3 = -54$
$x^3 = -216$
$x = -6$

b $100 - 3x^4 = 55$
$-3x^4 = -45$
$x^4 = 15$
$x = \sqrt[4]{15} \vee x = -\sqrt[4]{15}$

c $\frac{1}{2}(4x - 1)^5 + 3 = 19$
$\frac{1}{2}(4x - 1)^5 = 16$
$(4x - 1)^5 = 32$
$4x - 1 = 2$
$4x = 3$
$x = \frac{3}{4}$

d $2\frac{1}{2}(1 - 2x)^6 - 6 = 14$
$2\frac{1}{2}(1 - 2x)^6 = 20$
$(1 - 2x)^6 = 8$
$1 - 2x = \sqrt[6]{8} \vee 1 - 2x = -\sqrt[6]{8}$
$-2x = -1 + \sqrt[6]{8} \vee -2x = -1 - \sqrt[6]{8}$
$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{8} \vee x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{8}$

4 **a** $x^6 = 20$
$x = \sqrt[6]{20} \vee x = -\sqrt[6]{20}$

b $5x^3 = 135$
$x^3 = 27$
$x = 3$

c $1 - 3x^5 = 97$
$-3x^5 = 96$
$x^5 = -32$
$x = -2$

d $\frac{1}{4}x^8 + 3 = 10$
$\frac{1}{4}x^8 = 7$
$x^8 = 28$
$x = \sqrt[8]{28} \vee x = -\sqrt[8]{28}$

5 **a** $5x^4 - 1 = 4$
$5x^4 = 5$
$x^4 = 1$
$x = 1 \vee x = -1$

b $5x^3 - 1 = 9$
$5x^3 = 10$
$x^3 = 2$
$x = \sqrt[3]{2}$

c $8x^3 + 2 = 1$
$8x^3 = -1$
$x^3 = -\frac{1}{8}$
$x = -\frac{1}{2}$

d $5x^6 + 7 = 97$
$5x^6 = 90$
$x^6 = 18$
$x = \sqrt[6]{18} \vee x = -\sqrt[6]{18}$

6 **a** $3(x-2)^4 + 7 = 37$
$3(x-2)^4 = 30$
$(x-2)^4 = 10$
$x - 2 = \sqrt[4]{10} \vee x - 2 = -\sqrt[4]{10}$
$x = 2 + \sqrt[4]{10} \vee x = 2 - \sqrt[4]{10}$

b $100 - \frac{1}{3}(4x-3)^5 = 19$
$-\frac{1}{3}(4x-3)^5 = -81$
$(4x-3)^5 = 243$
$4x - 3 = 3$
$4x = 6$
$x = 1\frac{1}{2}$

c $\frac{1}{2}(3x-1)^4 = 8$
$(3x-1)^4 = 16$
$3x - 1 = 2 \vee 3x - 1 = -2$
$3x = 3 \vee 3x = -1$
$x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$

d $6 - (2x-1)^3 = 1$
$-(2x-1)^3 = -5$
$(2x-1)^3 = 5$
$2x - 1 = \sqrt[3]{5}$
$2x = 1 + \sqrt[3]{5}$
$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{5}$

7 **a** $5x^4 - 3 = 17$
$5x^4 = 20$
$x^4 = 4$
$x = \sqrt[4]{4} \vee x = -\sqrt[4]{4}$

b $4x^3 - 5 = 1367$
$4x^3 = 1372$
$x^3 = 343$
$x = 7$

c $3(4x-5)^3 = 15$
$(4x-5)^3 = 5$
$4x - 5 = \sqrt[3]{5}$
$4x = 5 + \sqrt[3]{5}$
$x = 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d $17 - 2(1-3x)^4 = 5$
$-2(1-3x)^4 = -12$
$(1-3x)^4 = 6$
$1 - 3x = \sqrt[4]{6} \vee 1 - 3x = -\sqrt[4]{6}$
$-3x = -1 + \sqrt[4]{6} \vee -3x = -1 - \sqrt[4]{6}$
$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{6} \vee x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{6}$

8 **a** $x^3 - x^2 - 2x = 0$
$x(x^2 - x - 2) = 0$

b $x(x^2 - x - 2) = 0$
$x(x+1)(x-2) = 0$
$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$

Bladzijde 103

9 **a** $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
$x(x^2 - 5x + 6) = 0$
$x(x-2)(x-3) = 0$
$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$

b $x^3 - 5x^2 = 6x$
$x^3 - 5x^2 - 6x = 0$
$x(x^2 - 5x - 6) = 0$
$x(x+1)(x-6) = 0$
$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 6$

c $x^3 = 4x^2 + 12x$
$x^3 - 4x^2 - 12x = 0$
$x(x^2 - 4x - 12) = 0$
$x(x+2)(x-6) = 0$
$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 6$

d $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 13u + 36 = 0$
$(u-4)(u-9) = 0$
$u = 4 \vee u = 9$
$x^2 = 4 \vee x^2 = 9$
$x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = -3$

10 **a** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 10u + 9 = 0$
$(u-1)(u-9) = 0$
$u = 1 \vee u = 9$
$x^2 = 1 \vee x^2 = 9$
$x = 1 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = -3$

b $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 8u - 9 = 0$
$(u-9)(u+1) = 0$
$u = 9 \vee u = -1$
$x^2 = 9 \vee x^2 = -1$
$x = 3 \vee x = -3$

c $x^4 + 16 = 10x^2$
$x^4 - 10x^2 + 16 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 10u + 16 = 0$
$(u-2)(u-8) = 0$
$u = 2 \vee u = 8$
$x^2 = 2 \vee x^2 = 8$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$

d $x^3 + 25x = 10x^2$
$x^3 - 10x^2 + 25x = 0$
$x(x^2 - 10x + 25) = 0$
$x(x-5)^2 = 0$
$x = 0 \vee x = 5$

3

11 $f(x) = \dfrac{-10x}{x^2+2}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2+2)\cdot -10 - -10x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-10x^2 - 20 + 20x^2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{10x^2-20}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \frac{5}{9}$ geeft $\dfrac{10x^2-20}{(x^2+2)^2} = \dfrac{5}{9}$
$9(10x^2 - 20) = 5(x^2+2)^2$
$90x^2 - 180 = 5(x^4 + 4x^2 + 4)$
$90x^2 - 180 = 5x^4 + 20x^2 + 20$
$5x^4 - 70x^2 + 200 = 0$
$x^4 - 14x^2 + 40 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 14u + 40 = 0$
$(u-10)(u-4) = 0$
$u = 10 \vee u = 4$
$x^2 = 10 \vee x^2 = 4$
$x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10} \vee x = 2 \vee x = -2$

12 **a** $2x^4 - 11x^2 + 12 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$2u^2 - 11u + 12 = 0$
$D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$
$u = \dfrac{11-5}{4} = 1\frac{1}{2} \vee u = \dfrac{11+5}{4} = 4$

b $2x^4 - 11x^2 + 12 = 0$
$x^2 = 1\frac{1}{2} \vee x^2 = 4$
$x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = 2 \vee x = -2$

13 **a** $6x^4 + 2 = 7x^2$
$6x^4 - 7x^2 + 2 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$6u^2 - 7u + 2 = 0$
$D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1$
$u = \dfrac{7-1}{12} = \frac{1}{2} \vee u = \dfrac{7+1}{12} = \frac{2}{3}$
$x^2 = \frac{1}{2} \vee x^2 = \frac{2}{3}$
$x = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = \sqrt{\frac{2}{3}} \vee x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

b $2x^4 = x^2 + 3$
$2x^4 - x^2 - 3 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$2u^2 - u - 3 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25$
$u = \dfrac{1-5}{4} = -1 \vee u = \dfrac{1+5}{4} = 1\frac{1}{2}$
$x^2 = -1 \vee x^2 = 1\frac{1}{2}$
$x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$

c $4x^4 + 7x^2 = 2$
$4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$4u^2 + 7u - 2 = 0$
$D = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 81$
$u = \dfrac{-7-9}{8} = -2 \vee u = \dfrac{-7+9}{8} = \frac{1}{4}$
$x^2 = -2 \vee x^2 = \frac{1}{4}$
$x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

d $16x^4 + 225 = 136x^2$
$16x^4 - 136x^2 + 225 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$16u^2 - 136u + 225 = 0$
$D = (-136)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 225 = 4096$
$u = \dfrac{136-64}{32} = 2\frac{1}{4} \vee u = \dfrac{136+64}{32} = 6\frac{1}{4}$
$x^2 = 2\frac{1}{4} \vee x^2 = 6\frac{1}{4}$
$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -1\frac{1}{2} \vee x = 2\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$

Bladzijde 105

14 **a** $4x^4 + 153 = 53x^2$
$4x^4 - 53x^2 + 153 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$4u^2 - 53u + 153 = 0$
$D = (-53)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 153 = 361$
$u = \frac{53 - 19}{8} = 4\frac{1}{4} \vee u = \frac{53 + 19}{8} = 9$
$x^2 = 4\frac{1}{4} \vee x^2 = 9$
$x = \sqrt{4\frac{1}{4}} \vee x = -\sqrt{4\frac{1}{4}} \vee x = 3 \vee x = -3$

b $4x^4 + 21x^2 = 148$
$4x^4 + 21x^2 - 148 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$4u^2 + 21u - 148 = 0$
$D = 21^2 - 4 \cdot 4 \cdot -148 = 2809$
$u = \frac{-21 - 53}{8} = -9\frac{1}{4} \vee u = \frac{-21 + 53}{8} = 4$
$x^2 = -9\frac{1}{4} \vee x^2 = 4$
$x = 2 \vee x = -2$

c $4x^6 + 35 = 24x^3$
$4x^6 - 24x^3 + 35 = 0$
Stel $x^3 = u$.
$4u^2 - 24u + 35 = 0$
$D = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 35 = 16$
$u = \frac{24 - 4}{8} = 2\frac{1}{2} \vee u = \frac{24 + 4}{8} = 3\frac{1}{2}$
$x^3 = 2\frac{1}{2} \vee x^3 = 3\frac{1}{2}$
$x = \sqrt[3]{2\frac{1}{2}} \vee x = \sqrt[3]{3\frac{1}{2}}$

d $64x^5 + 27x = 224x^3$
$64x^5 - 224x^3 + 27x = 0$
$x(64x^4 - 224x^2 + 27) = 0$
$x = 0 \vee 64x^4 - 224x^2 + 27 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$64u^2 - 224u + 27 = 0$
$D = (-224)^2 - 4 \cdot 64 \cdot 27 = 43264$
$u = \frac{224 + 208}{128} = 3\frac{3}{8} \vee u = \frac{224 - 208}{128} = \frac{1}{8}$
$x^2 = 3\frac{3}{8} \vee x^2 = \frac{1}{8}$
$x = \sqrt{3\frac{3}{8}} \vee x = -\sqrt{3\frac{3}{8}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{8}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{8}}$

15 **a** *

b $\left.\begin{array}{l}\angle E = \angle B = 90^\circ \\ \angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle C \text{ (in } \triangle FEC)\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle FEC$

$\frac{CE}{CB} = \frac{EF}{AB}$ geeft $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1 + AD}$
$x(1 + AD) = x + 1$
$1 + AD = \frac{x+1}{x}$
$AD = \frac{x+1}{x} - 1 = 1 + \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x}$

c Uit de stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ volgt

$BC^2 + AB^2 = AC^2$

$(1+x)^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 = 16$

$1 + 2x + x^2 + 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 16$

$x^2 + 2x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 16$

d $x^2 + 2x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 16$

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{2}{x} = 16$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 16 \\ \text{Stel } x + \frac{1}{x} = u \text{, dus } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = u^2 \end{array}\right\} u^2 + 2u = 16$$

e $u^2 + 2u = 16$

$u^2 + 2u - 16 = 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -16 = 68$

$u = \frac{-2 + \sqrt{68}}{2} = \sqrt{17} - 1 \vee u = \frac{-2 - \sqrt{68}}{2} = -\sqrt{17} - 1$

vold. vold. niet

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{17} - 1$

$x^2 + 1 = (\sqrt{17} - 1)x$

$x^2 - (\sqrt{17} - 1)x + 1 = 0$

$D = (\sqrt{17} - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 14 - 2\sqrt{17}$

$x = \frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{14 - 2\sqrt{17}}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{17} - 1 - \sqrt{14 - 2\sqrt{17}}}{2}$

$x = 2{,}760... \vee x = 0{,}362...$

Dus de ladder staat 100 + 276 = 376 cm of 100 + 36 = 136 cm hoog tegen het huis.

16 **a** $x^3 - 12x = x^2$

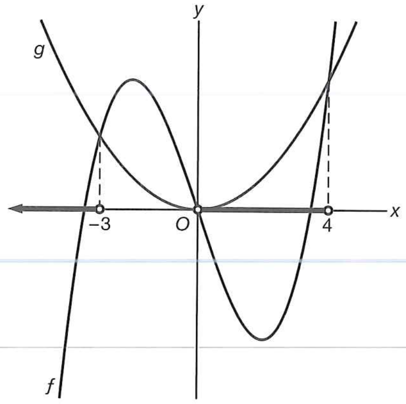
$x^3 - x^2 - 12x = 0$

$x(x^2 - x - 12) = 0$

$x(x + 3)(x - 4) = 0$

$x = 0 \vee x = -3 \vee x = 4$

b



c $x^3 - 12x < x^2$ geeft $x < -3 \vee 0 < x < 4$

Bladzijde 106

17 **a** Stel $f(x) = x^3$ en $g(x) = 2x^2 + 8x$.

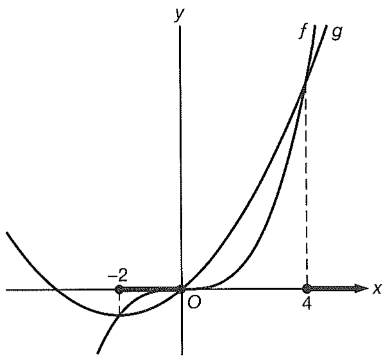
$f(x) = g(x)$ geeft $x^3 = 2x^2 + 8x$

$x^3 - 2x^2 - 8x = 0$

$x(x^2 - 2x - 8) = 0$

$x(x + 2)(x - 4) = 0$

$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 4$



$x^3 \geq 2x^2 + 8x$ geeft $-2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 4$

b Stel $f(x) = x^3 + 2x^2$ en $g(x) = 3x$.

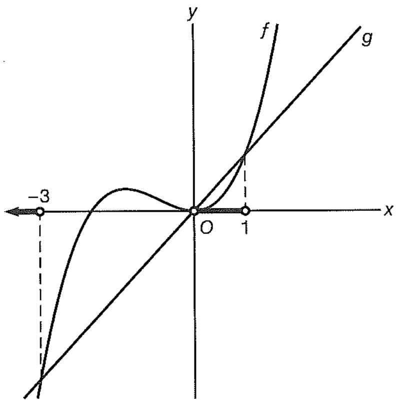
$f(x) = g(x)$ geeft $x^3 + 2x^2 = 3x$

$x^3 + 2x^2 - 3x = 0$

$x(x^2 + 2x - 3) = 0$

$x(x + 3)(x - 1) = 0$

$x = 0 \vee x = -3 \vee x = 1$



$x^3 + 2x^2 < 3x$ geeft $x < -3 \vee 0 < x < 1$

c Stel $f(x) = x^4$ en $g(x) = 3x^2 + 10$.

$f(x) = g(x)$ geeft $x^4 = 3x^2 + 10$

$x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

Stel $x^2 = u$.

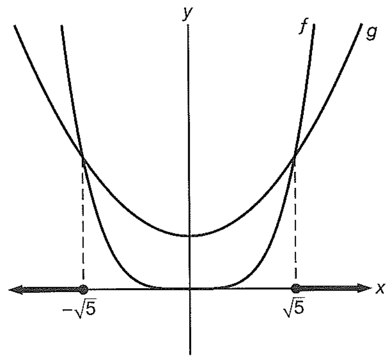
$u^2 - 3u - 10 = 0$

$(u + 2)(u - 5) = 0$

$u = -2 \vee u = 5$

$x^2 = -2 \vee x^2 = 5$

$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$



$x^4 \geq 3x^2 + 10$ geeft $x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}$

d Stel $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 9$ en $g(x) = 7x^2$.

$f(x) = g(x)$ geeft $\frac{2}{3}x^4 + 9 = 7x^2$

$2x^4 + 27 = 21x^2$

$2x^4 - 21x^2 + 27 = 0$

Stel $x^2 = u$.

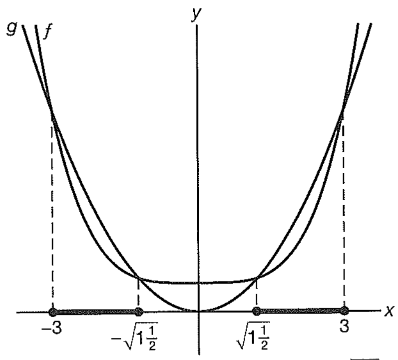
$2u^2 - 21u + 27 = 0$

$D = (-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27 = 225$

$u = \dfrac{21 - 15}{4} = 1\frac{1}{2} \vee u = \dfrac{21 + 15}{4} = 9$

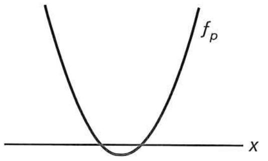
$x^2 = 1\frac{1}{2} \vee x^2 = 9$

$x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = 3 \vee x = -3$



$\frac{2}{3}x^4 + 9 \leq 7x^2$ geeft $-3 \leq x \leq -\sqrt{1\frac{1}{2}} \vee \sqrt{1\frac{1}{2}} \leq x \leq 3$

18 Een negatief minimum, dus de grafiek heeft twee snijpunten met de x-as.



$\left(p + \frac{5}{p}\right)x^2 + p^2x + 4p = 0$

Er moet gelden $D > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Er moet gelden } D > 0. \\ D = (p^2)^2 - 4 \cdot \left(p + \frac{5}{p}\right) \cdot 4p = p^4 - 16p^2 - 80 \end{array}\right\} \underbrace{p^4 - 16p^2 - 80}_{f(p)} > 0$$

$f(p) = 0$ geeft $p^4 - 16p^2 - 80 = 0$

Stel $p^2 = u$.

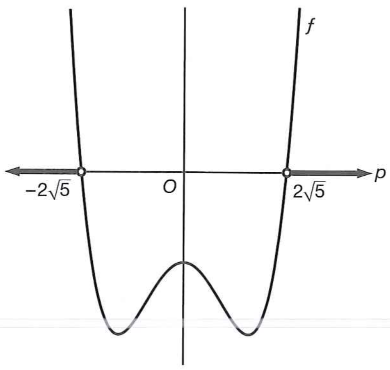
$u^2 - 16u - 80 = 0$

$(u - 20)(u + 4) = 0$

$u = 20 \vee u = -4$

$p^2 = 20 \vee p^2 = -4$

$p = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \vee p = -\sqrt{20} = -= 2\sqrt{5}$



Gegeven was f_p met $p > 0$, dus f_p heeft een negatief minimum voor $p > 2\sqrt{5}$.

Bladzijde 107

19 $x = -1$ geeft $|4 \cdot -1 - 5| = 9$

$|-4 - 5| = 9$

$|-9| = 9$

klopt!

$x = 3\frac{1}{2}$ geeft $|4 \cdot 3\frac{1}{2} - 5| = 9$

$|14 - 5| = 9$

$|9| = 9$

klopt!

Dus $x = -1$ en $x = 3\frac{1}{2}$ zijn beiden oplossing van de vergelijking.

20 **a** $|2x - 1| = 8$

$2x - 1 = 8 \vee 2x - 1 = -8$

$2x = 9 \vee 2x = -7$

$x = 4\frac{1}{2} \vee x = -3\frac{1}{2}$

b $|x^2 - 3| = 1$

$x^2 - 3 = 1 \vee x^2 - 3 = -1$

$x^2 = 4 \vee x^2 = 2$

$x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

c $|2x^2 - 5| = 11$

$2x^2 - 5 = 11 \vee 2x^2 - 5 = -11$

$2x^2 = 16 \vee 2x^2 = -6$

$x^2 = 8 \vee x^2 = -3$

$x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$

d $|5 - x^2| = 11$

$5 - x^2 = 11 \vee 5 - x^2 = -11$

$-x^2 = 6 \vee -x^2 = -16$

$x^2 = -6 \vee x^2 = 16$

$x = 4 \vee x = -4$

21 **a** $|2x^4 - 5| = 15$
$2x^4 - 5 = 15 \vee 2x^4 - 5 = -15$
$2x^4 = 20 \vee 2x^4 = -10$
$x^4 = 10 \vee x^4 = -5$
$x = \sqrt[4]{10} \vee x = -\sqrt[4]{10}$

b $|2x^3 - 5| = 15$
$2x^3 - 5 = 15 \vee 2x^3 - 5 = -15$
$2x^3 = 20 \vee 2x^3 = -10$
$x^3 = 10 \vee x^3 = -5$
$x = \sqrt[3]{10} \vee x = -\sqrt[3]{5}$

c $|x^4 - 5x^2| = 6$
$x^4 - 5x^2 = 6 \vee x^4 - 5x^2 = -6$
$x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \vee x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 5u - 6 = 0 \vee u^2 - 5u + 6 = 0$
$(u - 6)(u + 1) = 0 \vee (u - 2)(u - 3) = 0$
$u = 6 \vee u = -1 \vee u = 2 \vee u = 3$
$x^2 = 6 \vee x^2 = -1 \vee x^2 = 2 \vee x^2 = 3$
$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

d $|x^6 - 10x^3| = 24$
$x^6 - 10x^3 = 24 \vee x^6 - 10x^3 = -24$
$x^6 - 10x^3 - 24 = 0 \vee x^6 - 10x^3 + 24 = 0$
Stel $x^3 = u$.
$u^2 - 10u - 24 = 0 \vee u^2 - 10u + 24 = 0$
$(u - 12)(u + 2) = 0 \vee (u - 4)(u - 6) = 0$
$u = 12 \vee u = -2 \vee u = 4 \vee u = 6$
$x^3 = 12 \vee x^3 = -2 \vee x^3 = 4 \vee x^3 = 6$
$x = \sqrt[3]{12} \vee x = \sqrt[3]{-2} \vee x = \sqrt[3]{4} \vee x = \sqrt[3]{6}$

3.2 Stelsels vergelijkingen

Bladzijde 109

22 Uit $7x + 4y = 1$ volgt $y = -1\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

$y = -1\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ en $5x - 4y = 13$ geeft $5x - 4\left(-1\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right) = 13$
$5x + 7x - 1 = 13$
$12x = 14$
$x = 1\frac{1}{6}$

$x = 1\frac{1}{6}$ en $y = -1\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ geeft $y = -1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = -1\frac{19}{24}$.

De oplossing is $(x, y) = \left(1\frac{1}{6}, -1\frac{19}{24}\right)$.

Bladzijde 110

23 **a** $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$
$\overline{4x \qquad = -20}\ +$

$\left.\begin{array}{l} x = -5 \\ -x + 4y = -12 \end{array}\right\}$ $5 + 4y = -12$
$4y = -17$
$y = -4\frac{1}{4}$

Dus $(x, y) = \left(-5, -4\frac{1}{4}\right)$.

3

b $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ $-$

$$\begin{aligned} -2y &= 8 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= -4 \\ -2x + y &= 7 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} -2x - 4 &= 7 \\ -2x &= 11 \\ x &= -5\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $(x, y) = \left(-5\frac{1}{2}, -4\right)$.

c $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ $+$

$$-3x = -9$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 \\ -2x + 3y &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} -2 \cdot 3 + 3y &= -1 \\ -6 + 3y &= -1 \\ 3y &= 5 \\ y &= 1\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus $(x, y) = \left(3, 1\frac{2}{3}\right)$.

24 **a** $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$ $+$

$$5x - y = 23$$

Nee, er is geen variabele geëlimineerd.

b $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$ $-$

$$x - 7y = -9$$

Nee, er is geen variabele geëlimineerd.

Bladzijde 111

25 **a** $\begin{cases} 4x - y = 13 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 12x - 3y = 39 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases}$ $+$

$$14x = 28$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ 2x + 3y &= -11 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 2 \cdot 2 + 3y &= -11 \\ 4 + 3y &= -11 \\ 3y &= -15 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

Dus $(x, y) = (2, -5)$.

b $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x - 4y = 10 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ 5x - 4y = 10 \end{cases}$ $-$

$$\left.\begin{aligned} x &= 4 \\ 3x - 2y &= 7 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 3 \cdot 4 - 2y &= 7 \\ 12 - 2y &= 7 \\ -2y &= -5 \\ y &= 2\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Het snijpunt is $\left(4, 2\frac{1}{2}\right)$.

c Stel de aannemer bouwt x huizen van type A en y huizen van type B.
Hieruit volgt dat

$\begin{cases} 325x + 175y = 8800 \\ x + y = 40 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 175 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 325x + 175y = 8800 \\ 175x + 175y = 7000 \end{cases}$ $-$

$$\begin{aligned} 150x &= 1800 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

De aannemer gaat 12 huizen van type A bouwen.

Bladzijde 112

26 a $\begin{cases} 3x+5y=-7 \\ 2x+y=0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x+5y=-7 \\ 10x+5y=\ \ 0 \end{cases}$ −

$-7x = -7$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ 2x+y=0 \end{matrix}\right\}$ $2\cdot 1+y=0$

$2+y=0$

$y=-2$

Dus $(x,y)=(1,-2)$.

b $\begin{cases} 2x-4y=6 \\ 3x-y=19 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x-4y=\ \ 6 \\ 12x-4y=\ \ 76 \end{cases}$ −

$-10x = -70$

$\left.\begin{matrix} x=7 \\ 2x-4y=6 \end{matrix}\right\}$ $2\cdot 7-4y=6$

$14-4y=6$

$-4y=-8$

$y=2$

Dus $(x,y)=(7,2)$.

c $\begin{cases} 4x+y=13 \\ x-2y=1 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 8x+2y=26 \\ x-2y=\ \ 1 \end{cases}$ +

$9x = 27$

$\left.\begin{matrix} x=3 \\ 4x+y=13 \end{matrix}\right\}$ $4\cdot 3+y=13$

$12+y=13$

$y=1$

Dus $(x,y)=(3,1)$.

27 a $\begin{cases} 3x-2y=-12 \\ x+4y=38 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x-4y=-24 \\ x+4y=\ \ 38 \end{cases}$ +

$7x = 14$

$\left.\begin{matrix} x=2 \\ x+4y=38 \end{matrix}\right\}$ $2+4y=38$

$4y=36$

$y=9$

Het snijpunt is $(2,9)$.

b $\begin{cases} 2x+5y=26 \\ 3x-2y=1 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x+15y=78 \\ 6x-\ \ 4y=\ \ 2 \end{cases}$ −

$19y=76$

$\left.\begin{matrix} y=4 \\ 2x+5y=26 \end{matrix}\right\}$ $2x+5\cdot 4=26$

$2x+20=26$

$2x=6$

$x=3$

Het snijpunt is $(3,4)$.

28 a Stel er zitten x muntstukken van 1 euro en y muntstukken van 2 euro in zijn spaarpot.
Hieruit volgt dat $x+y=50$ en $x+2y=87$.

b $\begin{cases} x+2y=87 \\ x+\ \ y=50 \end{cases}$ −

$y=37$

$\left.\begin{matrix} y=37 \\ x+y=50 \end{matrix}\right\}$ $x=13$

Daan heeft 13 munten van 1 euro.

29 Stel de groenteman verkoopt x appels en y peren.
Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} 1{,}4x + 1{,}7y = 452 \\ x + y = 295 \end{cases} \begin{vmatrix} 10 \\ 17 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 14x + 17y = 4520 \\ 17x + 17y = 5015 \end{cases} -$$

$$-3x = -495$$
$$x = 165$$

Hij verkoopt die dag 165 kg appels.

30 **a** $\begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ 5x + 15y = -35 \end{cases} -$

$$-13y = 104$$
$$\left.\begin{array}{l} y = -8 \\ x + 3y = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 3 \cdot -8 = -7 \\ x - 24 = -7 \\ x = 17 \end{array}$$

Dus $(x, y) = (17, -8)$.

b $\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ 5x + 4y = 35 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 8x - 20y = -76 \\ 25x + 20y = 175 \end{cases} +$

$$33x = 99$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ 2x - 5y = -19 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 5y = -19 \\ 6 - 5y = -19 \\ -5y = -25 \\ y = 5 \end{array}$$

Dus $(x, y) = (3, 5)$.

c $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}2y = 1 \\ 0{,}3x - 0{,}3y = 1{,}5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2{,}4x + 0{,}6y = 3 \\ 0{,}6x - 0{,}6y = 3 \end{cases} +$

$$3x = 6$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ 0{,}8x + 0{,}2y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}8 \cdot 2 + 0{,}2y = 1 \\ 1{,}6 + 0{,}2y = 1 \\ 0{,}2y = -0{,}6 \\ y = -3 \end{array}$$

Dus $(x, y) = (2, -3)$.

31 **a** $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ x + 4y = 38 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 4y = -24 \\ x + 4y = 38 \end{cases} +$

$$7x = 14$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ x + 4y = 38 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + 4y = 38 \\ 4y = 36 \\ y = 9 \end{array}$$

Het snijpunt is $(2, 9)$.

32 Stel er zijn x jongens en y meisjes. De totale leeftijd van de jongens is dan $15{,}6x$ en van de meisjes is $16{,}8y$. De totale leeftijd van alle personen samen is $15 \cdot 16{,}4 = 246$.
Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 15{,}6x + 16{,}8y = 246 \end{cases} \begin{vmatrix} 168 \\ 10 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 168x + 168y = 2520 \\ 156x + 168y = 2460 \end{cases} -$$

$$12x = 60$$
$$x = 5$$

Er zijn dus vijf jongens op de verjaardag.

33 Stel de rechthoek heeft een lengte van x en een breedte van y.
Voor omtrek rechthoek geldt $2x + 2y = 26$.
Voor omtrek vijf rechthoeken geldt $2x + 10y = 50$.

$$\begin{cases} 2x + 10y = 50 \\ 2x + \ \ 2y = 26 \end{cases} -$$
$$8y = 24$$
$$\left.\begin{array}{l} y = 3 \\ 2x + 2y = 26 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x + 2 \cdot 3 = 26 \\ 2x + 6 = 26 \\ 2x = 20 \\ x = 10 \end{array}$$

De eerste rechthoek heeft een lengte van 10 en een breedte van 3.

34 $3x + 2y = 18$ geeft $y = -1\frac{1}{2}x + 9$ en $6x + 4y = 15$ geeft $y = -1\frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4}$.
Bij deze vergelijkingen horen twee evenwijdige lijnen. Deze lijnen hebben geen snijpunten, dus heeft het stelsel geen oplossingen.

Bladzijde 113

35 **a** $\left.\begin{array}{l} y = x^2 + bx + c \\ \text{door } (1, -2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^2 + b \cdot 1 + c = -2 \\ 1 + b + c = -2 \\ b + c = -3 \end{array}$

b $\left.\begin{array}{l} y = x^2 + bx + c \\ \text{door } (2, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2^2 + b \cdot 2 + c = 3 \\ 4 + 2b + c = 3 \\ 2b + c = -1 \end{array}$

c $$\begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -1 \end{cases} -$$
$$-b = -2$$
$$\left.\begin{array}{l} b = 2 \\ b + c = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + c = -3 \\ c = -5 \end{array}$$

Dus $b = 2 \wedge c = -5$.

36 $(1, 8)$ invullen geeft $a \cdot 1^2 + c = 8$ dus $a + c = 8$.
$(2, 17)$ invullen geeft $a \cdot 2^2 + c = 17$ dus $4a + c = 17$.

$$\begin{cases} a + c = 8 \\ 4a + c = 17 \end{cases} -$$
$$-3a = -9$$
$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ a + c = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 + c = 8 \\ c = 5 \end{array}$$

Dus $y = 3x^2 + 5$.

37 $(3, 9)$ invullen bij k geeft $a \cdot 3 + b = 9$ dus $3a + b = 9$.
$(3, 9)$ invullen bij l geeft $-b \cdot 3 + 9a = 9$ dus $9a - 3b = 9$.

$$\begin{cases} 3a + b = 9 \\ 9a - 3b = 9 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9a + 3b = 27 \\ 9a - 3b = 9 \end{cases} +$$
$$18a = 36$$
$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ 3a + b = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + b = 9 \\ 6 + b = 9 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus $a = 2 \wedge b = 3$.

38 **a** $(2, -1)$ invullen in $y = x^2 + px + q$ geeft $2^2 + p \cdot 2 + q = -1$ dus $2p + q = -5$.
$(2, -1)$ invullen in $y = 2px - q$ geeft $2p \cdot 2 - q = -1$ dus $4p - q = -1$.

$$\begin{cases} 2p + q = -5 \\ 4p - q = -1 \end{cases}$$
$$\underline{}\ +$$
$$6p = -6$$

$$\left.\begin{array}{l} p = -1 \\ 2p + q = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -1 + q = -5 \\ -2 + q = -5 \\ q = -3 \end{array}$$

Dus $p = -1 \wedge q = -3$.

b $$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - x - 3 \\ y = -2x + 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 - x - 3 = -2x + 3 \\ x^2 + x - 6 = 0 \\ (x + 3)(x - 2) = 0 \\ x = -3 \vee x = 2 \end{array}$$

$x = -3$ invullen geeft $y = -2 \cdot -3 + 3 = 9$.
Het andere snijpunt is $(-3, 9)$.

Bladzijde 114

39 $(-2, -10)$ invullen geeft $a \cdot (-2)^2 + b \cdot -2 + c = -10$ dus $4a - 2b + c = -10$.
$(0, 4)$ invullen geeft $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4$ dus $c = 4$.
$(3, 5)$ invullen geeft $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 5$ dus $9a + 3b + c = 5$.

$$\left.\begin{array}{l} c = 4 \\ 4a - 2b + c = -10 \end{array}\right\} 4a - 2b = -14$$

$$\left.\begin{array}{l} c = 4 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{array}\right\} 9a + 3b = 1$$

$$\begin{cases} 4a - 2b = -14 \\ 9a + 3b = 1 \end{cases} \left|\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array}\right| \text{ geeft } \begin{cases} 12a - 6b = -42 \\ 18a + 6b = 2 \end{cases}\ +$$
$$30a = -40$$

$$\left.\begin{array}{l} a = -1\tfrac{1}{3} \\ 9a + 3b = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 \cdot -1\tfrac{1}{3} + 3b = 1 \\ -12 + 3b = 1 \\ 3b = 13 \\ b = 4\tfrac{1}{3} \end{array}$$

Dus $y = -1\frac{1}{3}x^2 + 4\frac{1}{3}x + 4$.

40 $f(x) = ax^2 + bx + c$ geeft $f'(x) = 2ax + b$.
De lijn k met $rc_k = 1$ raakt de grafiek van f in $(2, 6)$, dus $f'(2) = 2a \cdot 2 + b = 4a + b = 1$.
De lijn l met $rc_l = -2$ raakt de grafiek van f in $(8, 3)$, dus $f'(8) = 2a \cdot 8 + b = 16a + b = -2$.

$$\begin{cases} 16a + b = -2 \\ 4a + b = 1 \end{cases}\ -$$
$$12a = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} a = -\tfrac{1}{4} \\ 4a + b = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot -\tfrac{1}{4} + b = 1 \\ -1 + b = 1 \\ b = 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\tfrac{1}{4}x^2 + 2x + c \\ \text{door } (2, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\tfrac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + c = 6 \\ -1 + 4 + c = 6 \\ 3 + c = 6 \\ c = 3 \end{array}$$

$f(8) = -\frac{1}{4} \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 3 = 3$, dus f gaat ook door $(8, 3)$.
Dus $a = -\frac{1}{4}$, $b = 2$ en $c = 3$.

41 Nee.

42 **a** Substitutie van $y = x^2 - 18$ in $x - y = 2$ geeft $x - (x^2 - 18) = 2$

$$x - x^2 + 18 = 2$$
$$-x^2 + x + 16 = 0$$
$$x^2 - x - 16 = 0$$
$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -16 = 65$$
$$x = \frac{1 - \sqrt{65}}{2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{65} \vee x = \frac{1 + \sqrt{65}}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{65}$$

$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65}$ geeft $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65} - 2 = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65}$

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65}$ geeft $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65} - 2 = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65}$

Dus $(x, y) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65}, -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65}\right) \vee (x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65}, -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65}\right)$

b Substitutie van $y = x^2 - 3$ in $x - y = -3$ geeft $x - (x^2 - 3) = -3$

$$x - x^2 + 3 = -3$$
$$-x^2 + x + 6 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3)(x + 2) = 0$$
$$x = 3 \vee x = -2$$

$x = 3$ geeft $y = 3^2 - 3 = 6$
$x = -2$ geeft $y = (-2)^2 - 3 = 1$
Dus $(x, y) = (3, 6) \vee (x, y) = (-2, 1)$.

c $3x + y = 5$ geeft $y = -3x + 5$
Substitutie van $y = -3x + 5$ in $x^2 + y^2 = 25$ geeft $x^2 + (-3x + 5)^2 = 25$

$$x^2 + 9x^2 - 30x + 25 = 25$$
$$10x^2 - 30x = 0$$
$$10x(x - 3) = 0$$
$$x = 0 \vee x = 3$$

$x = 0$ geeft $y = -3 \cdot 0 + 5 = 5$
$x = 3$ geeft $y = -3 \cdot 3 + 5 = -4$
Dus $(x, y) = (0, 5) \vee (x, y) = (3, -4)$.

43 **a** $3x + 2y = 10$ geeft $2y = 10 - 3x$

$$4y^2 = (10 - 3x)^2$$

Substitutie van $4y^2 = (10 - 3x)^2$ in $x^2 + 4y^2 = 100$ geeft $x^2 + (10 - 3x)^2 = 100$

$$x^2 + 100 - 60x + 9x^2 = 100$$
$$10x^2 - 60x = 0$$
$$10x(x - 6) = 0$$
$$x = 0 \vee x = 6$$

$x = 0$ geeft $2y = 10 - 3 \cdot 0 = 10$ ofwel $y = 5$.
$x = 6$ geeft $2y = 10 - 3 \cdot 6 = -8$ ofwel $y = -4$.
Dus $(x, y) = (0, 5) \vee (x, y) = (6, -4)$.

b $2x + y = 4$ geeft $y = 4 - 2x$
Substitutie van $y = 4 - 2x$ in $(x - 3)^2 + y^2 = 8$ geeft $(x - 3)^2 + (4 - 2x)^2 = 8$

$$x^2 - 6x + 9 + 16 - 16x + 4x^2 = 8$$
$$5x^2 - 22x + 17 = 0$$
$$D = (-22)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 17 = 144$$
$$x = \frac{22 - 12}{10} = 1 \vee x = \frac{22 + 12}{10} = 3\tfrac{2}{5}$$

$x = 1$ geeft $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$
$x = 3\frac{2}{5}$ geeft $y = 4 - 2 \cdot 3\frac{2}{5} = -2\frac{4}{5}$

Dus $(x, y) = (1, 2) \vee (x, y) = \left(3\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5}\right)$.

c $x + 4y = 9$ geeft $x = 9 - 4y$

Substitutie van $x = 9 - 4y$ in $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$ geeft $(9 - 4y + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$

$(11 - 4y)^2 + (y - 3)^2 = 10$

$121 - 88y + 16y^2 + y^2 - 6y + 9 = 10$

$17y^2 - 94y + 120 = 0$

$D = (-94)^2 - 4 \cdot 17 \cdot 120 = 676$

$y = \frac{94 - 26}{34} = 2 \vee y = \frac{94 + 26}{34} = 3\frac{9}{17}$

$y = 2$ geeft $x = 9 - 4 \cdot 2 = 1$

$y = 3\frac{9}{17}$ geeft $x = 9 - 4 \cdot 3\frac{9}{17} = -5\frac{2}{17}$

Dus $(x, y) = (1, 2) \vee (x, y) = \left(-5\frac{2}{17}, 3\frac{9}{17}\right)$.

3.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

Bladzijde 116

44 **a** $5x(x^2 - 4) = 15(x^2 - 4)$

$5x^3 - 20x = 15x^2 - 60$

$5x^3 - 15x^2 - 20x + 60 = 0$

Je kent geen methode om deze derdegraadsvergelijking algebraïsch op te lossen.

b $5x = 15$ geeft als oplossing $x = 3$ en je kunt zien dat bijvoorbeeld $x = 2$ ook een oplossing is van de gegeven vergelijking. Dus door links en rechts te delen door $x^2 - 4$ gaan er oplossingen verloren, omdat $x^2 - 4$ nul kan zijn.

c $5x(x^2 - 4) = 15(x^2 - 4)$

$x^2 - 4 = 0 \vee 5x = 15$

$x^2 = 4 \vee x = 3$

$x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3$

Bladzijde 118

45 **a** $(4x - 1)^2 = (3x - 2)^2$

$4x - 1 = 3x - 2 \vee 4x - 1 = -3x + 2$

$x = -1 \quad \vee 7x = 3$

$x = -1 \quad \vee x = \frac{3}{7}$

b $(3x^2 - 5)^2 = 4x^2$

$3x^2 - 5 = 2x \quad \vee 3x^2 - 5 = -2x$

$3x^2 - 2x - 5 = 0 \quad \vee 3x^2 + 2x - 5 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64 \quad D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$

$x = \frac{2 - 8}{6} \vee x = \frac{2 + 8}{6} \quad \vee x = \frac{-2 - 8}{6} \vee x = \frac{-2 + 8}{6}$

$x = -1 \vee x = 1\frac{2}{3} \quad \vee x = -1\frac{2}{3} \vee x = 1$

c $(x^2 - 4x)(x^2 - 8) = 0$

$x^2 - 4x = 0 \vee x^2 - 8 = 0$

$x(x - 4) = 0 \vee x^2 = 8$

$x = 0 \vee x = 4 \vee x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$

$x = 0 \vee x = 4 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$

d $x^3(x - 3) = 8(x - 3)$

$x - 3 = 0 \vee x^3 = 8$

$x = 3 \vee x = 2$

e $2x(x^2 - 4) = 6(x - 2)$

$2x(x + 2)(x - 2) = 6(x - 2)$

$x - 2 = 0 \vee 2x(x + 2) = 6$

$x = 2 \vee 2x^2 + 4x - 6 = 0$

$x = 2 \vee x^2 + 2x - 3 = 0$

$x = 2 \vee (x + 3)(x - 1) = 0$

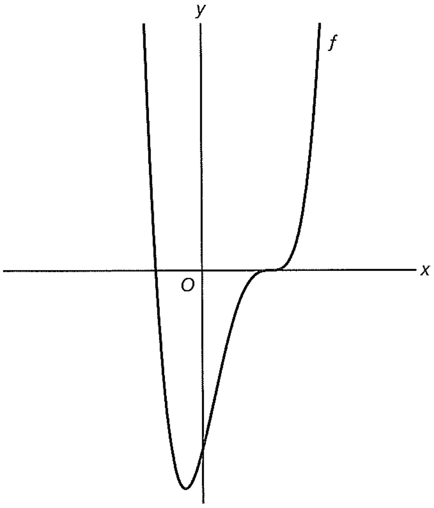
$x = 2 \vee x = -3 \vee x = 1$

f $x(x - 2)(x^2 - 3) = 0$

$x = 0 \vee x = 2 \vee x^2 = 3$

$x = 0 \vee x = 2 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

46 **a** Voer in $y_1 = (3x+4)(x-2)^3$.



Optie minimum geeft $x \approx -0{,}5$ en $y \approx -39{,}1$, dus $B_f = [-39{,}1; \rightarrow\rangle$.

b $(3x+4)(x-2)^3 = 0$
$3x+4=0 \vee x-2=0$
$3x=-4 \vee x=2$
$x=-1\frac{1}{3} \vee x=2$
Dus de nulpunten zijn $x=-1\frac{1}{3}$ en $x=2$.

c $\left.\begin{array}{l} f(x)=(3x+4)(x-2)^3 \\ y=3x+4 \end{array}\right\}$ $(3x+4)(x-2)^3 = 3x+4$
$3x+4=0 \vee (x-2)^3=1$
$x=-1\frac{1}{3} \vee x-2=1$
$x=-1\frac{1}{3} \vee x=3$

$x=-1\frac{1}{3}$ geeft $y=3\cdot -1\frac{1}{3}+4=0$, dus $A\left(-1\frac{1}{3}, 0\right)$.
$x=3$ geeft $y=3\cdot 3+4=13$, dus $B(3, 13)$.

d $\left.\begin{array}{l} f(x)=(3x+4)(x-2)^3 \\ y=(3x+4)(x-2) \end{array}\right\}$ $(3x+4)(x-2)^3 = (3x+4)(x-2)$
$3x+4=0 \vee x-2=0 \vee (x-2)^2=1$
$3x=-4 \vee x=2 \vee x-2=1 \vee x-2=-1$
$x=-1\frac{1}{3} \vee x=2 \vee x=3 \vee x=1$

$x=-1\frac{1}{3}$ geeft $y=\left(3\cdot -1\frac{1}{3}+4\right)\left(-1\frac{1}{3}-2\right)=0$
$x=1$ geeft $y=(3\cdot 1+4)(1-2)=-7$
$x=2$ geeft $y=(3\cdot 2+4)(2-2)=0$
$x=3$ geeft $y=(3\cdot 3+4)(3-2)=13$
Dus de snijpunten zijn $\left(-1\frac{1}{3}, 0\right), (1, -7), (2, 0)$ en $(3, 13)$.

47 **a** Kruiselings vermenigvuldigen geeft $x\cdot x = 2(x+4)$
$x^2 = 2x+8$
$x^2-2x-8=0$

b $x^2-2x-8=0$
$(x-4)(x+2)=0$
$x=4 \vee x=-2$

Bladzijde 120

48 **a** $\dfrac{x-3}{x+1} = 1\frac{1}{2}$

$\dfrac{x-3}{x+1} = \dfrac{3}{2}$

$(x-3) \cdot 2 = (x+1) \cdot 3$

$2x - 6 = 3x + 3$

$-x = 9$

$x = -9$

voldoet

b $\dfrac{x-1}{x} + 1 = 3$

$\dfrac{x-1}{x} = 2$

$\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{2}{1}$

$x - 1 = 2x$

$-x = 1$

$x = -1$

voldoet

c $\dfrac{3x+4}{x-1} = \dfrac{x+18}{x}$

$(3x+4) \cdot x = (x-1)(x+18)$

$3x^2 + 4x = x^2 + 18x - x - 18$

$2x^2 - 13x + 18 = 0$

$D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 25$

$x = \dfrac{13-5}{4} = 2 \vee x = \dfrac{13+5}{4} = 4\frac{1}{2}$

voldoet voldoet

d $\dfrac{2x-5}{4-x} = \dfrac{x+2}{3x-4}$

$(2x-5)(3x-4) = (4-x)(x+2)$

$6x^2 - 8x - 15x + 20 = 4x + 8 - x^2 - 2x$

$7x^2 - 25x + 12 = 0$

$D = (-25)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 12 = 289$

$x = \dfrac{25-17}{14} = \frac{4}{7} \vee x = \dfrac{25+17}{14} = 3$

voldoet voldoet

49 **a** $\dfrac{5x^2-15}{x^2+5} = 0$

$5x^2 - 15 = 0$

$5x^2 = 15$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

vold. vold.

b $\dfrac{x^2-3}{x^2+1} = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

$x^2 - 3 = x - 1$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 \vee x = -1$

vold. vold.

c $\dfrac{x^2-4}{2x+5} = \dfrac{x^2-4}{x+4}$

$x^2 - 4 = 0 \vee 2x + 5 = x + 4$

$x^2 = 4 \vee x = -1$

$x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$

vold. vold. vold.

d $\dfrac{x^2+1}{x+1} = \dfrac{x+3}{x+1}$

$x^2 + 1 = x + 3$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 \vee x = -1$

vold. vold. niet

50 **a** $\dfrac{3x^2-10}{x^2+1} = 2$

$3x^2 - 10 = 2(x^2+1)$

$3x^2 - 10 = 2x^2 + 2$

$x^2 = 12$

$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \vee x = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$

voldoet voldoet

b $\dfrac{x^3-8}{x^2+2} = \dfrac{x^3-8}{x+8}$

$x^3 - 8 = 0 \vee x^2 + 2 = x + 8$

$x^3 = 8 \vee x^2 - x - 6 = 0$

$x = 2 \vee (x-3)(x+2) = 0$

$x = 2 \vee x = 3 \vee x = -2$

vold. vold. vold.

c $\dfrac{3x^2-10}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{25}$
$25(3x^2-10)=2(x^2+1)^2$
$75x^2-250=2(x^4+2x^2+1)$
$75x^2-250=2x^4+4x^2+2$
$-2x^4+71x^2-252=0$
$2x^4-71x^2+252=0$
Stel $x^2=u$.
$2u^2-71u+252=0$
$D=(-71)^2-4\cdot2\cdot252=3025$
$u=\dfrac{71-55}{4}=4 \vee u=\dfrac{71+55}{4}=31\frac{1}{2}$
$x^2=4 \vee x^2=31\frac{1}{2}$
$x=2 \vee x=-2 \vee x=\sqrt{31\frac{1}{2}} \vee x=-\sqrt{31\frac{1}{2}}$
$x=2 \vee x=-2 \vee x=1\frac{1}{2}\sqrt{14} \vee x=-1\frac{1}{2}\sqrt{14}$
vold. vold. vold. vold.

d $\dfrac{6x^2-12}{(x^2-1)^2}=1\frac{1}{3}$
$\dfrac{6x^2-12}{(x^2-1)^2}=\dfrac{4}{3}$
$3(6x^2-12)=4(x^2-1)^2$
$18x^2-36=4(x^4-2x^2+1)$
$18x^2-36=4x^4-8x^2+4$
$-4x^4+26x^2-40=0$
$2x^4-13x^2+20=0$
Stel $x^2=u$.
$2u^2-13u+20=0$
$D=(-13)^2-4\cdot2\cdot20=9$
$u=\dfrac{13-3}{4}=2\frac{1}{2} \vee u=\dfrac{13+3}{4}=4$
$x^2=2\frac{1}{2} \vee x^2=4$
$x=\sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x=-\sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x=2 \vee x=-2$
$x=\frac{1}{2}\sqrt{10} \vee x=-\frac{1}{2}\sqrt{10} \vee x=2 \vee x=-2$
vold. vold. vold. vold.

51 a Kwadrateren geeft $2x-5=9$
$2x=4$
$x=2$
b Een wortel kan niet negatief zijn.

Bladzijde 121

52 a $x=\sqrt{5x+14}$
kwadrateren geeft
$x^2=5x+14$
$x^2-5x-14=0$
$(x-7)(x+2)=0$
$x=7 \vee x=-2$
$x=7$ geeft $7=\sqrt{49}$ voldoet
$x=-2$ geeft $-2=\sqrt{4}$ voldoet niet

b $3x=\sqrt{8x+20}$
kwadrateren geeft
$9x^2=8x+20$
$9x^2-8x-20=0$
$D=(-8)^2-4\cdot9\cdot-20=784$
$x=\dfrac{8-28}{18}=-1\frac{1}{9} \vee x=\dfrac{8+28}{18}=2$
$x=-1\frac{1}{9}$ geeft $-3\frac{1}{3}=\sqrt{11\frac{1}{9}}$ voldoet niet
$x=2$ geeft $6=\sqrt{36}$ voldoet

c $5\sqrt{x}=x$
kwadrateren geeft
$25x=x^2$
$x^2-25x=0$
$x(x-25)=0$
$x=0 \vee x=25$
$x=0$ geeft $0=0$ voldoet
$x=25$ geeft $25=25$ voldoet

d $3x=\sqrt{18x+72}$
kwadrateren geeft
$9x^2=18x+72$
$9x^2-18x-72=0$
$x^2-2x-8=0$
$(x-4)(x+2)=0$
$x=4 \vee x=-2$
$x=4$ geeft $12=\sqrt{144}$ voldoet
$x=-2$ geeft $-6=\sqrt{36}$ voldoet niet

53 a $4 - 3\sqrt{x} = 2$
$-3\sqrt{x} = -2$
$\sqrt{x} = \frac{2}{3}$
kwadrateren geeft
$x = \frac{4}{9}$
$x = \frac{4}{9}$ geeft $4 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ voldoet

b $5\sqrt{x} - 2x = 0$
$5\sqrt{x} = 2x$
kwadrateren geeft
$25x = 4x^2$
$4x^2 - 25x = 0$
$x(4x - 25) = 0$
$x = 0 \vee 4x = 25$
$x = 0 \vee x = 6\frac{1}{4}$
$x = 0$ geeft $0 - 0 = 0$ voldoet
$x = 6\frac{1}{4}$ geeft $5 \cdot 2\frac{1}{2} - 2 \cdot 6\frac{1}{4} = 0$ voldoet

c $2x - 5\sqrt{x} = 3$
$2x - 3 = 5\sqrt{x}$
kwadrateren geeft
$(2x - 3)^2 = 25x$
$4x^2 - 12x + 9 = 25x$
$4x^2 - 37x + 9 = 0$
$D = (-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 1225$
$x = \frac{37 - 35}{8} = \frac{1}{4} \vee \frac{37 + 35}{8} = 9$
$x = \frac{1}{4}$ geeft $\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$ voldoet niet
$x = 9$ geeft $18 - 15 = 3$ voldoet

d $5 - 2\sqrt{x} = 3$
$-2\sqrt{x} = -2$
$\sqrt{x} = 1$
kwadrateren geeft
$x = 1$
$x = 1$ geeft $5 - 2 = 3$ voldoet

Bladzijde 122

54 a $2x + \sqrt{x} = 10$
$\sqrt{x} = 10 - 2x$
kwadrateren geeft
$x = (10 - 2x)^2$
$x = 100 - 40x + 4x^2$
$4x^2 - 41x + 100 = 0$
$D = (-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100 = 81$
$x = \frac{41 - 9}{8} = 4 \vee \frac{41 + 9}{8} = 6\frac{1}{4}$
$x = 4$ geeft $8 + 2 = 10$ voldoet
$x = 6\frac{1}{4}$ geeft $12\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 10$ voldoet niet

b $\sqrt{x + 12} = x$
kwadrateren geeft
$x + 12 = x^2$
$x^2 - x - 12 = 0$
$(x - 4)(x + 3) = 0$
$x = 4$ geeft $\sqrt{16} = 4$ voldoet
$x = -3$ geeft $\sqrt{9} = -3$ voldoet niet

c $2x + \sqrt{x} = 6$
$\sqrt{x} = 6 - 2x$
kwadrateren geeft
$x = (6 - 2x)^2$
$x = 36 - 24x + 4x^2$
$4x^2 - 25x + 36 = 0$
$D = (-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$
$x = \frac{25 - 7}{8} = 2\frac{1}{4} \vee x = \frac{25 + 7}{8} = 4$
$x = 2\frac{1}{4}$ geeft $4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 6$ voldoet
$x = 4$ geeft $8 + 2 = 6$ voldoet niet

d $10 - x\sqrt{x} = 2$
$8 = x\sqrt{x}$
kwadrateren geeft
$64 = x^3$
$x^3 = 64$
$x = 4$
$x = 4$ geeft $10 - 4\sqrt{4} = 2$ voldoet

55 a Je krijgt $u^2 + u - 6 = 0$
$u^2 + u - 6 = 0$
$(u + 3)(u - 2) = 0$
$u = -3 \vee u = 2$

b $x\sqrt{x} = -3$ geeft geen oplossingen voor x omdat $x\sqrt{x}$ niet negatief kan zijn.

Bladzijde 123

56 Je controleert de oplossing in een vergelijking voorafgaand aan het kwadrateren, dus ook de vergelijking $x^2 \cdot \sqrt{x} = 2$ is toegestaan om te controleren.

57 **a** $x^3 - 9x\sqrt{x} + 8 = 0$

Stel $x\sqrt{x} = u$.
$u^2 - 9u + 8 = 0$
$(u-1)(u-8) = 0$
$u = 1 \vee u = 8$
$x\sqrt{x} = 1 \vee x\sqrt{x} = 8$
kwadrateren geeft
$x^3 = 1 \vee x^3 = 64$
$x = 1 \vee x = 4$
$x = 1$ geeft $1\sqrt{1} = 1$ voldoet

$x = 4$ geeft $4\sqrt{4} = 8$ voldoet

b $x^3 + 27 = 28x\sqrt{x}$

$x^3 - 28x\sqrt{x} + 27 = 0$

Stel $x\sqrt{x} = u$.
$u^2 - 28u + 27 = 0$
$(u-1)(u-27) = 0$
$u = 1 \vee u = 27$
$x\sqrt{x} = 1 \vee x\sqrt{x} = 27$
kwadrateren geeft
$x^3 = 1 \vee x^3 = 729$
$x = 1 \vee x = 9$
$x = 1$ geeft $1\sqrt{1} = 1$ voldoet

$x = 9$ geeft $9\sqrt{9} = 27$ voldoet

c $8x^3 + 8 = 65x\sqrt{x}$

$8x^3 - 65x\sqrt{x} + 8 = 0$

Stel $x\sqrt{x} = u$.
$8u^2 - 65u + 8 = 0$
$D = (-65)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 8 = 3969$
$u = \dfrac{65-63}{16} = \frac{1}{8} \vee u = \dfrac{65+63}{16} = 8$
$x\sqrt{x} = \frac{1}{8} \vee x\sqrt{x} = 8$
kwadrateren geeft
$x^3 = \frac{1}{64} \vee x^3 = 64$

$x = \frac{1}{4} \vee x = 4$

$x = \frac{1}{4}$ geeft $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$ voldoet

$x = 4$ geeft $4\sqrt{4} = 8$ voldoet

d $x^5 - 33x^2 \cdot \sqrt{x} + 32 = 0$

Stel $x^2 \cdot \sqrt{x} = u$.
$u^2 - 33u + 32 = 0$
$(u-1)(u-32) = 0$
$u = 1 \vee u = 32$
$x^2 \cdot \sqrt{x} = 1 \vee x^2 \cdot \sqrt{x} = 32$
kwadrateren geeft
$x^5 = 1 \vee x^5 = 1024$
$x = 1 \vee x = 4$
$x = 1$ geeft $1^2 \cdot \sqrt{1} = 1$ voldoet

$x = 4$ geeft $4^2 \cdot \sqrt{4} = 32$ voldoet

58 **a** $x^3 + 30 = 11x\sqrt{x}$

$x^3 - 11x\sqrt{x} + 30 = 0$

Stel $x\sqrt{x} = u$.
$u^2 - 11u + 30 = 0$
$(u-5)(u-6) = 0$
$u = 5 \vee u = 6$
$x\sqrt{x} = 5 \vee x\sqrt{x} = 6$
kwadrateren geeft
$x^3 = 25 \vee x^3 = 36$
$x = \sqrt[3]{25} \vee x = \sqrt[3]{36}$

$x = \sqrt[3]{25}$ geeft $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{25}} = 5$ voldoet

$x = \sqrt[3]{36}$ geeft $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{36}} = 6$ voldoet

b $x^3 + 125 = 126x\sqrt{x}$

$x^3 - 126x\sqrt{x} + 125 = 0$

Stel $x\sqrt{x} = u$.
$u^2 - 126u + 125 = 0$
$(u-1)(u-125) = 0$
$u = 1 \vee u = 125$
$x\sqrt{x} = 1 \vee x\sqrt{x} = 125$
kwadrateren geeft
$x^3 = 1 \vee x^3 = 15625$
$x = 1 \vee x = 25$
$x = 1$ geeft $1\sqrt{1} = 1$ voldoet
$x = 25$ geeft $25\sqrt{25} = 125$ voldoet

c $x^5 + 10 = 7x^2 \cdot \sqrt{x}$

$x^5 - 7x^2 \cdot \sqrt{x} + 10 = 0$

Stel $x^2 \cdot \sqrt{x} = u$.
$u^2 - 7u + 10 = 0$
$(u-2)(u-5) = 0$
$u = 2 \vee u = 5$
$x^2 \cdot \sqrt{x} = 2 \vee x^2 \cdot \sqrt{x} = 5$
kwadrateren geeft
$x^5 = 4 \vee x^5 = 25$
$x = \sqrt[5]{4} \vee x = \sqrt[5]{25}$

$x = \sqrt[5]{4}$ geeft $\left(\sqrt[5]{4}\right)^2 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{4}} = 2$ voldoet

$x = \sqrt[5]{25}$ geeft $\left(\sqrt[5]{25}\right)^2 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{25}} = 5$ voldoet

d $32x^5 + 32 = 1025x^2 \cdot \sqrt{x}$

$32x^5 - 1025x^2 \cdot \sqrt{x} + 32 = 0$

Stel $x^2 \cdot \sqrt{x} = u$.
$32u^2 - 1025u + 32 = 0$
$D = (-1025)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 32 = 1046529$
$u = \dfrac{1025-1023}{64} = \frac{1}{32} \vee u = \dfrac{1025+1023}{64} = 32$
$x^2 \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{32} \vee x^2 \cdot \sqrt{x} = 32$
kwadrateren geeft
$x^5 = \frac{1}{1024} \vee x^5 = 1024$

$x = \frac{1}{4} \vee x = 4$

$x = \frac{1}{4}$ geeft $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{32}$ voldoet

$x = 4$ geeft $(4)^2 \cdot \sqrt{4} = 32$ voldoet

59 Met isoleren, kwadrateren, controleren:
$x - \sqrt{x} = 12$
$x - 12 = \sqrt{x}$
kwadrateren geeft
$(x - 12)^2 = x$
$x^2 - 24x + 144 = x$
$x^2 - 25x + 144 = 0$
$(x - 9)(x - 16) = 0$
$x = 9 \vee x = 16$
$x = 9$ geeft $9 - 3 = 12$ voldoet niet
$x = 16$ geeft $16 - 4 = 12$ voldoet

Met de substitutie $\sqrt{x} = u$:
$x - \sqrt{x} = 12$
$x - \sqrt{x} - 12 = 0$
Stel $\sqrt{x} = u$.
$u^2 - u - 12 = 0$
$(u - 4)(u + 3) = 0$
$u = 4 \vee u = -3$
$\sqrt{x} = 4 \vee \sqrt{x} = -3$
$x = 16$

3

3.4 Herleidingen

Bladzijde 125

60 **a** $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$
b $(4x + 3)(4x - 3) = 16x^2 - 9$
c $(x + 2)^3 = (x + 2)(x + 2)^2 = (x + 2)(x^2 + 4x + 4) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2x^2 + 8x + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

61 **a** $(2x - 1)^3 = (2x - 1)(2x - 1)^2 = (2x - 1)(4x^2 - 4x + 1) = 8x^3 - 8x^2 + 2x - 4x^2 + 4x - 1 =$
$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
b $(2x^2 + 1)^3 = (2x^2 + 1)(2x^2 + 1)^2 = (2x^2 + 1)(4x^4 + 4x^2 + 1) = 8x^6 + 8x^4 + 2x^2 + 4x^4 + 4x^2 + 1 =$
$8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1$
c $((x^2 - 1)(x^2 + 1))^2 = (x^4 - 1)^2 = x^8 - 2x^4 + 1$

62 **a** $\dfrac{2x^5 - 32x}{x^2 - 4} = \dfrac{2x(x^4 - 16)}{x^2 - 4} = \dfrac{2x(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \dfrac{2x(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 2x(x^2 + 4)$ mits $x \neq 2 \wedge x \neq -2$
b $\dfrac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^4 - 4} = \dfrac{(x^2 + 2)(x^2 + 2)}{(x^2 - 2)(x^2 + 2)} = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2}$
c $\dfrac{x^4 - 9x^2}{x^2 - 3x} = \dfrac{x^2(x^2 - 9)}{x(x - 3)} = \dfrac{x^2(x - 3)(x + 3)}{x(x - 3)} = x(x + 3)$ mits $x \neq 0 \wedge x \neq 3$

Bladzijde 126

63 $x_P = p$ geeft $y_P = p^2$, dus $P(p, p^2)$ en $x_Q = q$ geeft $y_Q = q^2$, dus $Q(q, q^2)$.
Stel k: $y = ax + b$.
$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{q^2 - p^2}{q - p} = \dfrac{(q + p)(q - p)}{q - p} = q + p$
$\left.\begin{array}{l} y = (p + q)x + b \\ \text{Door } P(p, p^2) \end{array}\right\}$ $(p + q) \cdot p + b = p^2$
$p^2 + pq + b = p^2$
$b = -pq$
Dus k: $y = (p + q)x - pq$.

64 **a** $2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$
$\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{x}{x + 2} = \dfrac{x(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)} + \dfrac{x(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \dfrac{x^2 + 2x + x^2 + x}{(x + 1)(x + 2)} = \dfrac{2x^2 + 3x}{(x + 1)(x + 2)}$
b $(x + 1) \cdot \dfrac{x + 2}{x + 3} = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{x + 3} = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 3}$
c $\dfrac{x}{\left(\dfrac{2}{x}\right)} = x \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ mits $x \neq 0$
Dus de herleiding is niet juist voor $x = 0$.

Bladzijde 127

65 **a** $y = \frac{20}{x-1}\left(4 - \frac{2}{x-1}\right) = \frac{20}{x-1}\left(\frac{4(x-1)}{x-1} - \frac{2}{x-1}\right) = \frac{20}{x-1} \cdot \frac{4x-4-2}{x-1} = \frac{20(4x-6)}{(x-1)^2} = \frac{80x-120}{(x-1)^2}$

b $y = \frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$ en $x = 1$ geeft $y = \frac{4}{\left(\frac{2}{0}\right)}$, dus delen door 0.

$y = \frac{4x(x-1)}{x+1}$ en $x = 1$ geeft $y = \frac{4 \cdot 0}{2} = \frac{0}{2} = 0$.

66 **a** $y = \frac{20}{x} - \frac{5}{2x} = \frac{40}{2x} - \frac{5}{2x} = \frac{35}{2x}$

b $y = \frac{10}{x-1} - x^2 = \frac{10}{x-1} - \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \frac{10 - x^2(x-1)}{x-1} = \frac{10 - x^3 + x^2}{x-1} = \frac{-x^3 + x^2 + 10}{x-1}$

c $y = \frac{2x^2}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = 2x^2 \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x^2(x-1)}{x+1} = \frac{2x^3 - 2x^2}{x+1}$ mits $x \neq 1$

d $y = \frac{x}{x-1}\left(x + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1}\left(\frac{x(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x-1} = \frac{x^3 - x^2 + x}{(x-1)^2}$

e $y = \frac{5}{x-2} \cdot \frac{6}{x+2} = \frac{30}{(x-2)(x+2)}$

f $y = \frac{\left(\frac{x+1}{2x}\right)}{x-1} = \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x(x-1)}$

67 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{4x}{x+1} = \frac{4}{x-1}$

$4x(x-1) = 4(x+1)$

$4x^2 - 4x = 4x + 4$

$4x^2 - 8x - 4 = 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 8$

$x = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \vee x = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

voldoet voldoet

b $f(x) \cdot g(x) = 6$ geeft $\frac{4x}{x+1} \cdot \frac{4}{x-1} = 6$

$\frac{16x}{x^2 - 1} = 6$

$16x = 6(x^2 - 1)$

$16x = 6x^2 - 6$

$6x^2 - 16x - 6 = 0$

$3x^2 - 8x - 3 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$

$x = \frac{8 + 10}{6} = 3 \vee x = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$

voldoet voldoet

c $f(x) - g(x) = 7$ geeft $\dfrac{4x}{x+1} - \dfrac{4}{x-1} = 7$

$$\frac{4x(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{4(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 7$$

$$\frac{4x^2 - 4x - 4x - 4}{(x+1)(x-1)} = 7$$

$$\frac{4x^2 - 8x - 4}{x^2 - 1} = 7$$

$$4x^2 - 8x - 4 = 7(x^2 - 1)$$

$$4x^2 - 8x - 4 = 7x^2 - 7$$

$$-3x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot -3 \cdot 3 = 100$$

$$x = \frac{8 + 10}{-6} = -3 \lor x = \frac{8 - 10}{-6} = \tfrac{1}{3}$$

voldoet voldoet

d $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot 4 - 4x \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{4x + 4 - 4x}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$

$g(x) = \dfrac{4}{x-1}$ geeft $g'(x) = \dfrac{(x-1) \cdot 0 - 4 \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

$f'(x) + 2 \cdot g'(x) = 0$ geeft $\dfrac{4}{(x+1)^2} + 2 \cdot \dfrac{-4}{(x-1)^2} = 0$

$$\frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2} + \frac{-8(x+1)^2}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2} = 0$$

$$\frac{4(x^2 - 2x + 1) - 8(x^2 + 2x + 1)}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2} = 0$$

$$\frac{4x^2 - 8x + 4 - 8x^2 - 16x - 8}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2} = 0$$

$$\frac{-4x^2 - 24x - 4}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2} = 0$$

$$-4x^2 - 24x - 4 = 0$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 32$$

$$x = \frac{-6 + \sqrt{32}}{2} \lor x = \frac{-6 - \sqrt{32}}{2}$$

$$x = \frac{-6 + 4\sqrt{2}}{2} = -3 + 2\sqrt{2} \lor x = \frac{-6 - 4\sqrt{2}}{2} = -3 - 2\sqrt{2}$$

voldoet voldoet

68 Vermenigvuldig de teller en de noemer van $\dfrac{2x + \frac{1}{3}}{x+1}$ met 3.

Bladzijde 128

69 **a** $y = \dfrac{x + \dfrac{3}{x+1}}{x} = \dfrac{\left(x + \dfrac{3}{x+1}\right) \cdot (x+1)}{x \cdot (x+1)} = \dfrac{x(x+1) + 3}{x(x+1)} = \dfrac{x^2 + x + 3}{x(x+1)}$

b $y = \dfrac{10 + \dfrac{5}{x-1}}{6 - \dfrac{3}{x-1}} = \dfrac{\left(10 + \dfrac{5}{x-1}\right) \cdot (x-1)}{\left(6 - \dfrac{3}{x-1}\right) \cdot (x-1)} = \dfrac{10(x-1)+5}{6(x-1)-3} = \dfrac{10x-5}{6x-9}$ mits $x \neq 1$

c $y = \dfrac{10x}{p + \dfrac{x^2}{2p}} = \dfrac{10x \cdot 2p}{\left(p + \dfrac{x^2}{2p}\right) \cdot 2p} = \dfrac{20px}{2p^2 + x^2}$ mits $p \neq 0$

70 **a** $N = \dfrac{600a}{3b - \dfrac{a^2}{4b}} = \dfrac{600a \cdot 4b}{\left(3b - \dfrac{a^2}{4b}\right) \cdot 4b} = \dfrac{2400ab}{12b^2 - a^2}$ mits $b \neq 0$

b $A = 25x + 20 \cdot \dfrac{\dfrac{50}{x^2+1}}{x} = 25x + 20 \cdot \dfrac{\dfrac{50}{x^2+1} \cdot (x^2+1)}{x \cdot (x^2+1)} = 25x + 20 \cdot \dfrac{50}{x(x^2+1)} = 25x + \dfrac{1000}{x(x^2+1)}$

c $K = \left(50 + \dfrac{150}{\dfrac{p}{q} + 5}\right) \cdot p = 50p + \dfrac{150p}{\dfrac{p}{q}+5} = 50p + \dfrac{150p \cdot q}{\left(\dfrac{p}{q}+5\right) \cdot q} = 50p + \dfrac{150pq}{p+5q} = \dfrac{50p(p+5q)}{p+5q} + \dfrac{150pq}{p+5q} =$

$\dfrac{50p^2 + 250pq + 150pq}{p+5q} = \dfrac{50p^2 + 400pq}{p+5q}$ mits $q \neq 0$

71 **a** $p = \dfrac{3x}{x+5}$ substitueren in $N = \dfrac{4p-1}{2p+3}$ geeft

$N = \dfrac{4 \cdot \dfrac{3x}{x+5} - 1}{2 \cdot \dfrac{3x}{x+5} + 3} = \dfrac{\left(\dfrac{12x}{x+5} - 1\right) \cdot (x+5)}{\left(\dfrac{6x}{x+5} + 3\right) \cdot (x+5)} = \dfrac{12x - (x+5)}{6x + 3(x+5)} = \dfrac{12x - x - 5}{6x + 3x + 15} = \dfrac{11x-5}{9x+15}$ mits $x \neq -5$

b $N = 9$ geeft $\dfrac{11x-5}{9x+15} = 9$

$11x - 5 = 9(9x+15)$

$11x - 5 = 81x + 135$

$-70x = 140$

$x = -2$

72 **a** $A = \dfrac{5x^2 + 1000}{x} = \dfrac{5x^2}{x} + \dfrac{1000}{x} = 5x + \dfrac{1000}{x}$

b $K = \dfrac{6t^2 + 12t + 1500}{3t} = \dfrac{6t^2}{3t} + \dfrac{12t}{3t} + \dfrac{1500}{3t} = 2t + 4 + \dfrac{500}{t}$

c $F = \dfrac{5a^2 + 8a}{2a^2} = \dfrac{5a^2}{2a^2} + \dfrac{8a}{2a^2} = 2\tfrac{1}{2} + \dfrac{4}{a}$

d $N = \dfrac{6p^2 - 3p - 1}{2p} = \dfrac{6p^2}{2p} - \dfrac{3p}{2p} - \dfrac{1}{2p} = 3p - 1\tfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2p}$

Bladzijde 129

73 **a** Tijd heenreis $= \frac{d}{12}$ uur en tijd terugreis $= \frac{d}{48}$ uur, dus $t = \frac{d}{12} + \frac{d}{48}$.

b Gemiddelde snelheid is $\frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}$ en afstand is $2d$, dus $\overline{v} = \frac{2d}{\frac{d}{12} + \frac{d}{48}}$.

Teller en noemer delen door d geeft $\overline{v} = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}}$.

$$\overline{v} = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}} = \frac{2}{\frac{4}{48} + \frac{1}{48}} = \frac{2}{\frac{5}{48}} = 2 \cdot \frac{48}{5} = 19{,}2 \text{ km/uur}$$

c $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}} = \frac{2 \cdot ab}{\left(\frac{b+a}{ab}\right) \cdot ab} = \frac{2ab}{b+a} = \frac{2ab}{a+b}$

d $h = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a}} = \frac{3}{\frac{6}{6a} + \frac{3}{6a} + \frac{2}{6a}} = \frac{3}{\frac{11}{6a}} = 3 \cdot \frac{6a}{11} = \frac{18a}{11} = 1\frac{7}{11}a$, dus $p = 1\frac{7}{11}$.

Bladzijde 130

74 $y = \frac{2}{x}$

$xy = 2$

$x = \frac{2}{y}$

75 **a** $A = \frac{B}{B+2}$

$A(B+2) = B$

$AB + 2A = B$

$AB - B = -2A$

$B(A-1) = -2A$

$B = -\frac{2A}{A-1}$

b $P = \frac{Q-5}{Q}$

$PQ = Q - 5$

$PQ - Q = -5$

$Q(P-1) = -5$

$Q = -\frac{5}{P-1}$

c $R = \frac{F-2}{F-1}$

$R(F-1) = F-2$

$RF - R = F - 2$

$RF - F = R - 2$

$F(R-1) = R-2$

$F = \frac{R-2}{R-1}$

d $L = 320 - \frac{18}{q-1}$

$\frac{18}{q-1} = 320 - L$

$320 - L = \frac{18}{q-1}$

$q - 1 = \frac{18}{320 - L}$

$q = 1 + \frac{18}{320 - L}$

Bladzijde 131

76 **a** $\frac{1}{a} = 2 + \frac{1}{b}$

$\frac{1}{a} = \frac{2b}{b} + \frac{1}{b}$

$\frac{1}{a} = \frac{2b+1}{b}$

Neem van beide leden het omgekeerde.

$a = \frac{b}{2b+1}$

b $\frac{1}{a} = 2 + \frac{1}{b}$

$\frac{1}{a} - 2 = \frac{1}{b}$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 2$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{2a}{a}$

$\frac{1}{b} = \frac{1-2a}{a}$

$b = \frac{a}{1-2a}$

77 **a** p uitdrukken in q

$\frac{1}{p} = 5 - \frac{2}{q}$

$\frac{1}{p} = \frac{5q}{q} - \frac{2}{q}$

$\frac{1}{p} = \frac{5q-2}{q}$

$p = \frac{q}{5q-2}$

q uitdrukken in p

$\frac{1}{p} = 5 - \frac{2}{q}$

$\frac{2}{q} = 5 - \frac{1}{p}$

$\frac{2}{q} = \frac{5p}{p} - \frac{1}{p}$

$\frac{2}{q} = \frac{5p-1}{p}$

$q \cdot (5p-1) = 2p$

$q = \frac{2p}{5p-1}$

b m schrijven als functie van n

$\frac{1}{m} = \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$

$\frac{1}{m} = \frac{n}{2n} - \frac{6}{2n}$

$\frac{1}{m} = \frac{n-6}{2n}$

$m = \frac{2n}{n-6}$

n schrijven als functie van m

$\frac{1}{m} = \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$

$\frac{3}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$

$\frac{3}{n} = \frac{m}{2m} - \frac{2}{2m}$

$\frac{3}{n} = \frac{m-2}{2m}$

$n(m-2) = 6m$

$n = \frac{6m}{m-2}$

Bladzijde 132

78 **a** $\frac{t-2}{t-3} \cdot P = \frac{t}{t-1}$

$P = \frac{t}{t-1} \cdot \frac{t-3}{t-2}$

$P = \frac{t(t-3)}{(t-1)(t-2)}$

$P = \frac{t^2-3t}{(t-1)(t-2)}$

b $\frac{3x}{x+y} = 5 - y$

$(x+y)(5-y) = 3x$

$5x - xy + 5y - y^2 = 3x$

$2x - xy = y^2 - 5y$

$x(2-y) = y^2 - 5y$

$x = \frac{y^2-5y}{2-y}$

c $K = 90 - \frac{2N}{N+0{,}2}$

$\frac{2N}{N+0{,}2} = 90 - K$

$2N = (N+0{,}2)(90-K)$

$2N = 90N - KN + 18 - 0{,}2K$

$KN - 88N = 18 - 0{,}2K$

$N(K-88) = 18 - 0{,}2K$

$N = \frac{18-0{,}2K}{K-88}$

3

79 a $F = \frac{1}{K} + \frac{1}{2K}$

$F = \frac{2}{2K} + \frac{1}{2K}$

$F = \frac{3}{2K}$

$2K = \frac{3}{F}$

$K = \frac{3}{2F}$

b $\frac{1}{T} = 10 - \frac{2}{S}$

$\frac{1}{T} = \frac{10S}{S} - \frac{2}{S}$

$\frac{1}{T} = \frac{10S - 2}{S}$

$T = \frac{S}{10S - 2}$

c $\frac{1}{N} + 3 = \frac{2R + 2}{5R + 2}$

$\frac{1}{N} = \frac{2R + 2}{5R + 2} - 3$

$\frac{1}{N} = \frac{2R + 2}{5R + 2} - \frac{3(5R + 2)}{5R + 2}$

$\frac{1}{N} = \frac{2R + 2 - 15R - 6}{5R + 2}$

$\frac{1}{N} = \frac{-13R - 4}{5R + 2}$

$N = \frac{5R + 2}{-13R - 4}$

Diagnostische toets

Bladzijde 134

1 a $3x^3 + 5 = 86$
$3x^3 = 81$
$x^3 = 27$
$x = 3$

b $5x^4 - 6 = 9$
$5x^4 = 15$
$x^4 = 3$
$x = \sqrt[4]{3} \vee x = -\sqrt[4]{3}$

c $2x^3 + 19 = 5$
$2x^3 = -14$
$x^3 = -7$
$x = \sqrt[3]{-7}$

d $\frac{1}{2}(x + 2)^4 = \frac{1}{32}$
$(x + 2)^4 = \frac{1}{16}$
$x + 2 = \frac{1}{2} \vee x + 2 = -\frac{1}{2}$
$x = -1\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$

e $100 - (2x + 1)^5 = 68$
$-(2x + 1)^5 = -32$
$(2x + 1)^5 = 32$
$2x + 1 = 2$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$

f $(2x + 4)^3 = 10$
$2x + 4 = \sqrt[3]{10}$
$2x = -4 + \sqrt[3]{10}$
$x = -2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{10}$

2 a $x^3 = x^2 + 20x$
$x^3 - x^2 - 20x = 0$
$x(x^2 - x - 20) = 0$
$x(x - 5)(x + 4) = 0$
$x = 0 \vee x = 5 \vee x = -4$

b $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 6u + 5 = 0$
$(u - 1)(u - 5) = 0$
$u = 1 \vee u = 5$
$x^2 = 1 \vee x^2 = 5$
$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

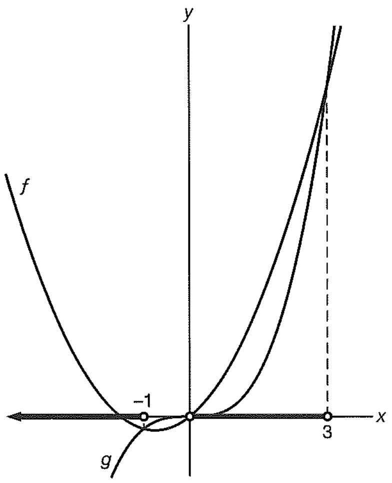
c $x^4 - 6x^3 + 5x^2 = 0$
$x^2(x^2 - 6x + 5) = 0$
$x^2(x - 1)(x - 5) = 0$
$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 5$

d $x^8 + x^4 = 42$
$x^8 + x^4 - 42 = 0$
Stel $x^4 = u$.
$u^2 + u - 42 = 0$
$(u + 7)(u - 6) = 0$
$u = -7 \vee u = 6$
$x^4 = -7 \vee x^4 = 6$
$x = \sqrt[4]{6} \vee x = -\sqrt[4]{6}$

3 **a** $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$5u^2 - 6u + 1 = 0$
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 16$
$u = \dfrac{6-4}{10} = \frac{1}{5} \vee u = \dfrac{6+4}{10} = 1$
$u = \frac{1}{5} \vee u = 1$
$x^2 = \frac{1}{5} \vee x^2 = 1$
$x = \sqrt{\frac{1}{5}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{5}} \vee x = 1 \vee x = -1$
$x = \frac{1}{5}\sqrt{5} \vee x = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \vee x = 1 \vee x = -1$

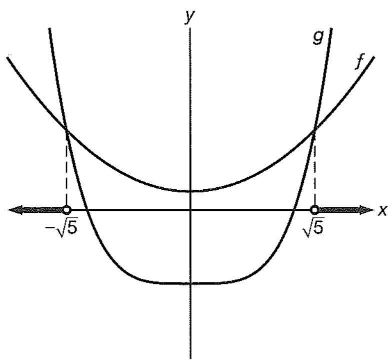
b $3x^6 + 3 = 10x^3$
$3x^6 - 10x^3 + 3 = 0$
Stel $x^3 = u$.
$3u^2 - 10u + 3 = 0$
$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$
$u = \dfrac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \vee u = \dfrac{10+8}{6} = 3$
$x^3 = \frac{1}{3} \vee x^3 = 3$
$x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \vee x = \sqrt[3]{3}$

4 **a** Stel $f(x) = 2x^2 + 3x$ en $g(x) = x^3$.
$f(x) = g(x)$ geeft $2x^2 + 3x = x^3$
$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
$x(x^2 - 2x - 3) = 0$
$x(x+1)(x-3) = 0$
$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 3$



$2x^2 + 3x > x^3$ geeft $x < -1 \vee 0 < x < 3$

b Stel $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 1$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^4 - 4$.
$f(x) = g(x)$ geeft $\frac{2}{3}x^2 + 1 = \frac{1}{3}x^4 - 4$
$2x^2 + 3 = x^4 - 12$
$x^4 - 2x^2 - 15 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 2u - 15 = 0$
$(u+3)(u-5) = 0$
$u = -3 \vee u = 5$
$x^2 = -3 \vee x^2 = 5$
$x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$



$\frac{2}{3}x^2 + 1 > \frac{1}{3}x^4 - 4$ geeft $x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$

5 **a** $|x^2 - 4| = 21$
$x^2 - 4 = 21 \vee x^2 - 4 = -21$
$x^2 = 25 \vee x^2 = -17$
$x = 5 \vee x = -5$

b $|4x^3 - 5| = 19$
$4x^3 - 5 = 19 \vee 4x^3 - 5 = -19$
$4x^3 = 24 \vee 4x^3 = -14$
$x^3 = 6 \vee x^3 = -3\frac{1}{2}$
$x = \sqrt[3]{6} \vee x = -\sqrt[3]{3\frac{1}{2}}$

6 **a** $\begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ -2x + 3y = 25 \end{cases} \left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right|$ geeft $\begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ -4x + 6y = 50 \end{cases}$ +
$11y = 77$
$\left.\begin{matrix} y = 7 \\ -2x + 3y = 25 \end{matrix}\right\}$ $-2x + 3 \cdot 7 = 25$
$-2x + 21 = 25$
$-2x = 4$
$x = -2$

Dus $(x, y) = (-2, 7)$.

b $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 15x - 6y = 24 \end{cases}$ +

$19x \quad = 38$

$\left.\begin{array}{r} x = 2 \\ 5x - 2y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 2 - 2y = 8 \\ 10 - 2y = 8 \\ -2y = -2 \\ y = 1 \end{array}$

Dus $(x, y) = (2, 1)$.

3

7 $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 6x + 15y = 39 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 15y = 3 \\ 6x + 15y = 39 \end{cases}$ +

$12x \quad = 42$

$\left.\begin{array}{r} x = 3\frac{1}{2} \\ 2x - 5y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3\frac{1}{2} - 5y = 1 \\ 7 - 5y = 1 \\ -5y = -6 \\ y = 1\frac{1}{5} \end{array}$

Het snijpunt is $(3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{5})$.

8 $(2, 18)$ invullen geeft $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 18$, dus $4a + 2b = 18$.
$(-4, 0)$ invullen geeft $a \cdot (-4)^2 + b \cdot -4 = 0$, dus $16a - 4b = 0$.

$\begin{cases} 4a + 2b = 18 \\ 16a - 4b = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 8a + 4b = 36 \\ 16a - 4b = 0 \end{cases}$ +

$24a \quad = 36$

$\left.\begin{array}{r} a = 1\frac{1}{2} \\ 4a + 2b = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1\frac{1}{2} + 2b = 18 \\ 6 + 2b = 18 \\ 2b = 12 \\ b = 6 \end{array}$

Dus $y = 1\frac{1}{2}x^2 + 6x$.

9 **a** Substitutie van $y = x^2 - 4x + 6$ in $2x + 3y = 10$ geeft $2x + 3(x^2 - 4x + 6) = 10$

$2x + 3x^2 - 12x + 18 = 10$

$3x^2 - 10x + 8 = 0$

$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 4$

$x = \frac{10 - 2}{6} = 1\frac{1}{3} \vee x = \frac{10 + 2}{6} = 2$

$x = 1\frac{1}{3}$ geeft $y = (1\frac{1}{3})^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{3} + 6 = 2\frac{4}{9}$
$x = 2$ geeft $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2$
Dus $(x, y) = (1\frac{1}{3}, 2\frac{4}{9}) \vee (x, y) = (2, 2)$.

b $3x - y = 7$ geeft $y = 3x - 7$.
Substitutie van $y = 3x - 7$ in $x^2 + (y - 4)^2 = 13$ geeft $x^2 + (3x - 7 - 4)^2 = 13$

$x^2 + (3x - 11)^2 = 13$

$x^2 + 9x^2 - 66x + 121 = 13$

$10x^2 - 66x + 108 = 0$

$D = (-66)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 108 = 36$

$x = \frac{66 - 6}{20} = 3 \vee x = \frac{66 + 6}{20} = 3\frac{3}{5}$

$x = 3$ geeft $y = 3 \cdot 3 - 7 = 2$
$x = 3\frac{3}{5}$ geeft $y = 3 \cdot 3\frac{3}{5} - 7 = 3\frac{4}{5}$
Dus $(x, y) = (3, 2) \vee (x, y) = (3\frac{3}{5}, 3\frac{4}{5})$.

10 a $(x^2-6)(x^2-2x)=0$
$x^2-6=0 \vee x^2-2x=0$
$x^2=6 \vee x(x-2)=0$
$x=\sqrt{6} \vee x=-\sqrt{6} \vee x=0 \vee x=2$

b $(2x^2-1)^2=(6x+1)^2$
$2x^2-1=6x+1 \quad \vee 2x^2-1=-(6x+1)$
$2x^2-6x-2=0 \quad \vee 2x^2-1=-6x-1$
$x^2-3x-1=0 \quad \vee 2x^2+6x=0$
$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot-1=13 \quad 2x(x+3)=0$
$x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \vee x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \vee x=0 \vee x=-3$
$x=1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x=1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x=0 \vee x=-3$

c $x(x^2-1)=4(x^2-1)$
$x=4 \vee x^2-1=0$
$x=4 \vee x^2=1$
$x=4 \vee x=1 \vee x=-1$

d $(x^3-9x)(x^2-3)+9x=x^3$
$(x^3-9x)(x^2-3)=x^3-9x$
$x^3-9x=0 \vee x^2-3=1$
$x(x^2-9)=0 \vee x^2=4$
$x=0 \vee x^2=9 \vee x=2 \vee x=-2$
$x=0 \vee x=3 \vee x=-3 \vee x=2 \vee x=-2$

Bladzijde 135

11 a $\dfrac{x^2-5x+6}{2x+4}=0$
$x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0$
$x=2 \vee x=3$
vold. vold.

b $\dfrac{x^2-4}{2x+1}=\dfrac{x^2-4}{x-4}$
$2x+1=x-4 \vee x^2-4=0$
$x=-5 \vee x^2=4$
$x=-5 \vee x=2 \vee x=-2$
vold. vold. vold.

c $\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{4x+1}{5x-1}$
$(2x-1)(5x-1)=(x+1)(4x+1)$
$10x^2-2x-5x+1=4x^2+x+4x+1$
$6x^2-12x=0$
$6x(x-2)=0$
$x=0 \vee x=2$
vold. vold.

d $\dfrac{2x^2-4}{x+5}=1\frac{3}{4}$

$\dfrac{2x^2-4}{x+5}=\dfrac{7}{4}$
$4(2x^2-4)=7(x+5)$
$8x^2-16=7x+35$
$8x^2-7x-51=0$
$D=(-7)^2-4\cdot8\cdot-51=1681$
$x=\dfrac{7-41}{16}=-2\frac{1}{8} \vee x=\dfrac{7+41}{16}=3$
voldoet voldoet

12 a $\sqrt{3x+5}+1=5$
$\sqrt{3x+5}=4$
kwadrateren geeft
$3x+5=16$
$3x=11$
$x=3\frac{2}{3}$
$x=3\frac{2}{3}$ geeft $\sqrt{11+5}+1=5$ voldoet

b $3x=5\sqrt{x+4}$
kwadrateren geeft
$9x^2=25(x+4)$
$9x^2=25x+100$
$9x^2-25x-100=0$
$D=(-25)^2-4\cdot9\cdot-100=4225$
$x=\dfrac{25-65}{18}=-2\frac{2}{9} \vee x=\dfrac{25+65}{18}=5$
$x=-2\frac{2}{9}$ geeft $-6\frac{2}{3}=5\sqrt{-2\frac{2}{9}+4}$ voldoet niet
$x=5$ geeft $15=5\sqrt{9}$ voldoet

c $x = \sqrt{x} + 6$
$x - 6 = \sqrt{x}$
kwadrateren geeft
$(x - 6)^2 = x$
$x^2 - 12x + 36 = x$
$x^2 - 13x + 36 = 0$
$(x - 4)(x - 9) = 0$
$x = 4 \vee x = 9$
$x = 4$ geeft $4 = \sqrt{4} + 6$ voldoet niet
$x = 9$ geeft $9 = \sqrt{9} + 6$ voldoet

d $2x + 3\sqrt{x} = 2$
$3\sqrt{x} = 2 - 2x$
kwadrateren geeft
$9x = (2 - 2x)^2$
$9x = 4 - 8x + 4x^2$
$-4x^2 + 17x - 4 = 0$
$D = 17^2 - 4 \cdot -4 \cdot -4 = 225$
$x = \frac{-17 - 15}{-8} = 4 \vee x = \frac{-17 + 15}{-8} = \frac{1}{4}$
$x = 4$ geeft $8 + 3\sqrt{4} = 2$ voldoet niet
$x = \frac{1}{4}$ geeft $\frac{1}{2} + 3\sqrt{\frac{1}{4}} = 2$ voldoet

13 **a** $x^3 - 189 = 20x\sqrt{x}$
$x^3 - 20x\sqrt{x} - 189 = 0$
Stel $x\sqrt{x} = u$.
$u^2 - 20u - 189 = 0$
$(u + 7)(u - 27) = 0$
$u = -7 \vee u = 27$
$x\sqrt{x} = -7 \vee x\sqrt{x} = 27$
$x\sqrt{x} = -7$ heeft geen oplossing
$x\sqrt{x} = 27$ kwadrateren geeft $x^2 = 729$
$x = 9$
$x = 9$ geeft $9\sqrt{9} = 27$ voldoet

b $x^5 + 12 = 8x^2 \cdot \sqrt{x}$
$x^5 - 8x^2 \cdot \sqrt{x} + 12 = 0$
Stel $x^2 \cdot \sqrt{x} = u$.
$u^2 - 8u + 12 = 0$
$(u - 2)(u - 6) = 0$
$u = 2 \vee u = 6$
$x^2 \cdot \sqrt{x} = 2 \vee x^2 \cdot \sqrt{x} = 6$
kwadrateren geeft
$x^5 = 4 \vee x^5 = 36$
$x = \sqrt[5]{4} \vee x = \sqrt[5]{36}$
$x = \sqrt[5]{4}$ geeft $(\sqrt[5]{4})^2 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{4}} = 2$ voldoet
$x = \sqrt[5]{36}$ geeft $(\sqrt{\sqrt[5]{36}})^2 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{36}} = 6$ voldoet

14 **a** $(2x + 3)^3 = (2x + 3)(2x + 3)^2 = (2x + 3)(4x^2 + 12x + 9) = 8x^3 + 24x^2 + 18x + 12x^2 + 36x + 27 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

b $\frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 - 4} = x^2 + 4$ mits $x \neq 2 \;\wedge\; x \neq -2$

15 **a** $y = 2x - \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{2x(x - 2)}{x - 2} - \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{2x^2 - 4x - x + 1}{x - 2} = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 2}$

b $y = \frac{3}{x}\left(2 - \frac{x}{x - 1}\right) = \frac{3}{x}\left(\frac{2(x - 1)}{x - 1} - \frac{x}{x - 1}\right) = \frac{3}{x}\left(\frac{2x - 2 - x}{x - 1}\right) = \frac{3}{x}\left(\frac{x - 2}{x - 1}\right) = \frac{3x - 6}{x(x - 1)}$

16 **a** $y = \frac{2x + \frac{x}{x - 1}}{x + 1} = \frac{\left(2x + \frac{x}{x - 1}\right) \cdot (x - 1)}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{2x(x - 1) + x}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 2x + x}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - x}{x^2 - 1}$

b $y = \frac{\frac{2}{x + 1} - 3}{4 - \frac{x}{x + 1}} = \frac{\left(\frac{2}{x + 1} - 3\right) \cdot (x + 1)}{\left(4 - \frac{x}{x + 1}\right) \cdot (x + 1)} = \frac{2 - 3(x + 1)}{4(x + 1) - x} = \frac{2 - 3x - 3}{4x + 4 - x} = \frac{-3x - 1}{3x + 4}$ mits $x \neq -1$

17 **a** $N = \frac{4x^2 - 50}{2x} = \frac{4x^2}{2x} - \frac{50}{2x} = 2x - \frac{25}{x}$

b $B = \frac{6p^2 - 3p + 4}{3p} = \frac{6p^2}{3p} - \frac{3p}{3p} + \frac{4}{3p} = 2p - 1 + \frac{4}{3p}$

18 **a** $V = \dfrac{3P-2}{2P-3}$

$V(2P-3) = 3P-2$

$2PV - 3V = 3P - 2$

$2PV - 3P = 3V - 2$

$P(2V-3) = 3V-2$

$P = \dfrac{3V-2}{2V-3}$

b $R = 40 - \dfrac{8}{a-1}$

$\dfrac{8}{a-1} = 40 - R$

$\dfrac{8}{40-R} = a-1$

$a - 1 = \dfrac{8}{40-R}$

$a = \dfrac{8}{40-R} + 1$

c $\dfrac{3}{p} + \dfrac{4}{q} = 6$

$\dfrac{3}{p} = 6 - \dfrac{4}{q}$

$\dfrac{3}{p} = \dfrac{6q}{q} - \dfrac{4}{q}$

$\dfrac{3}{p} = \dfrac{6q-4}{q}$

$\dfrac{p}{3} = \dfrac{q}{6q-4}$

$p = \dfrac{3q}{6q-4}$

4 Meetkunde

Voorkennis Rekenen met wortels

Bladzijde 138

1 a $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{15}$

b $\dfrac{5\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{2}$

c $3a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{7} = 3a^2 \cdot \sqrt{14}$

d $\dfrac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{7}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

e $\frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{6}$

f $\dfrac{6}{5\sqrt{2}} = \dfrac{6}{5\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$

2 a $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

b $\sqrt{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $\sqrt{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $(\frac{1}{2}\sqrt{5})^2 = (\frac{1}{2})^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = \frac{1}{4} \cdot 5 = 1\frac{1}{4}$

e $(\frac{1}{2}a\sqrt{2})^2 = (\frac{1}{2}a)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}a^2 \cdot 2 = \frac{1}{2}a^2$

f $(\frac{2}{3}a\sqrt{3})^2 = (\frac{2}{3}a)^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{4}{9}a^2 \cdot 3 = 1\frac{1}{3}a^2$

Bladzijde 139

3 a $\sqrt{24} + \sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

b $\sqrt{80} - \dfrac{10}{\sqrt{5}} = \sqrt{16 \cdot 5} - \dfrac{10}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} - \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

c $\sqrt{18a} - \sqrt{8a} = \sqrt{9 \cdot 2a} - \sqrt{4 \cdot 2a} = 3\sqrt{2a} - 2\sqrt{2a} = \sqrt{2a}$

d $\sqrt{12a} + \sqrt{\frac{3}{4}a} = \sqrt{4 \cdot 3a} + \dfrac{\sqrt{3a}}{\sqrt{4}} = 2\sqrt{3a} + \dfrac{\sqrt{3a}}{2} = 2\sqrt{3a} + \frac{1}{2}\sqrt{3a} = 2\frac{1}{2}\sqrt{3a}$

e $\dfrac{9}{4\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \dfrac{9}{4\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{8} - \sqrt{2} = 1\frac{1}{8}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$

f $\frac{1}{3}\sqrt{48} - \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{16 \cdot 3} - \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3}$

4 a $\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{24\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{49}{2}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} + \dfrac{7}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

b $a\sqrt{8} - a\sqrt{2} = a\sqrt{4 \cdot 2} - a\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} - a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

c $\sqrt{2a} + \sqrt{\frac{1}{2}a} = \sqrt{2a} + \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \sqrt{2a} + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2a} + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2a} + \dfrac{\sqrt{2a}}{2} = \sqrt{2a} + \frac{1}{2}\sqrt{2a} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2a}$

d $(\frac{2}{3}a\sqrt{3})^2 + a^2 \cdot \sqrt{7\frac{1}{9}} = (\frac{2}{3})^2 \cdot a^2(\sqrt{3})^2 + a^2 \cdot \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{4}{9}a^2 \cdot 3 + a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = 1\frac{1}{3}a^2 + a^2 \cdot \dfrac{8}{3} = 1\frac{1}{3}a^2 + 2\frac{2}{3}a^2 = 4a^2$

e $(\frac{1}{4}a\sqrt{2})^2 + (\frac{3}{4}a\sqrt{2})^2 = (\frac{1}{4})^2 \cdot a^2 \cdot (\sqrt{2})^2 + (\frac{3}{4})^2 \cdot a^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{16}a^2 \cdot 2 + \frac{9}{16}a^2 \cdot 2 = \frac{1}{8}a^2 + 1\frac{1}{8}a^2 = 1\frac{1}{4}a^2$

f $\dfrac{5a}{3\sqrt{2}} - \dfrac{3a}{2\sqrt{2}} = \dfrac{10a}{6\sqrt{2}} - \dfrac{9a}{6\sqrt{2}} = \dfrac{a}{6\sqrt{2}} = \dfrac{a}{6\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{12}a\sqrt{2}$

Bladzijde 140

5 a $(3\sqrt{2}-\sqrt{5})^2 = 18 - 6\sqrt{10} + 5 = 23 - 6\sqrt{10}$

b $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2 = 8 + 12\sqrt{6} + 27 = 35 + 12\sqrt{6}$

c $(5\sqrt{3}+2)(5\sqrt{3}-2) = 75 - 4 = 71$

d $(a-\sqrt{3})^2 = a^2 - 2a\sqrt{3} + 3$

e $(a-a\sqrt{2})^2 = a^2 - 2a^2\cdot\sqrt{2} + 2a^2 = 3a^2 - 2a^2\cdot\sqrt{2}$

f $(4-\frac{1}{2}a\sqrt{2})^2 = 16 - 4a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a^2$

6 a $(2a\sqrt{2}-a\sqrt{3})^2 = 8a^2 - 4a^2\cdot\sqrt{6} + 3a^2 = 11a^2 - 4a^2\cdot\sqrt{6}$

b $(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{6} + \frac{27}{16} = 2\frac{3}{16} + \frac{3}{4}\sqrt{6}$

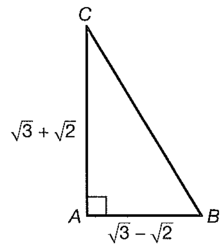
c $(2-\sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$

d $(1\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{3}{4} = 5\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}\sqrt{6}$

e $(3\sqrt{2}+5)(3\sqrt{2}-5) = 18 - 25 = -7$

f $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{6}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{7}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{49}{8} = 6\frac{1}{8}$

7 $BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$
$BC^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 + 3 + 2\sqrt{6} + 2$
$BC^2 = 10$
$BC = \sqrt{10}$



4.1 Goniometrische verhoudingen en gelijkvormigheid

Bladzijde 141

1 a $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$ geeft $\tan(30°) = \frac{BC}{6}$
$BC = 6\tan(30°) \approx 3{,}464$

b $\tan\angle(BDC) = \frac{BC}{BD}$ geeft $\tan(40°) = \frac{3{,}464...}{BD}$
Dus $BD = \frac{3{,}464...}{\tan(40°)} \approx 4{,}13.$

Bladzijde 142

2 a In $\triangle BCD$ is $\sin(70°) = \frac{BC}{5}$
$BC = 5\sin(70°) = 4{,}69...$
In $\triangle ABC$ is $\sin(\angle BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{4{,}69...}{10}$
$\angle BAC \approx 28{,}0°$

b $\angle ADC = 180° - 70° = 110°$
$\angle ACD \approx 180° - 110° - 28{,}0° = 42{,}0°$

3 In $\triangle ABC$ is $\tan(28°) = \frac{4}{AB}$
$AB = \frac{4}{\tan(28°)} = 7{,}52...$
$BM = \frac{1}{2}AB = 3{,}76...$
In $\triangle BCM$ is $\tan(\angle BMC) = \frac{BC}{BM} = \frac{4}{3{,}76...}$
$\angle BMC \approx 46{,}8°$

4 In $\triangle ABC$ is $\sin(40°) = \dfrac{BC}{10}$

$BC = 10\sin(40°) \approx 6{,}42...$

$\cos(40°) = \dfrac{AB}{10}$

$AB = 10\cos(40°) \approx 7{,}66...$

$BM = \frac{1}{2}BC \approx 3{,}21...$

In $\triangle ABM$ is $\tan(\angle BAM) = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{3{,}21...}{7{,}66...}$

$\angle BAM \approx 22{,}8°$

Bladzijde 143

5 In $\triangle BCM$ is $\cos(50°) = \dfrac{BM}{6}$

$BM = 6\cos(50°) = 3{,}85...$

$\sin(50°) = \dfrac{BC}{6}$

$BC = 6\sin(50°) = 4{,}59...$

$AB = 2BM \approx 7{,}71...$

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle BAC) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4{,}59...}{7{,}71...}$

$\angle BAC \approx 30{,}8°$

$\angle AMC = 180° - 50° = 130°$

$\angle ACM \approx 180° - 130° - 30{,}8° = 19{,}2°$

6 In $\triangle ABD$ is $\tan(20°) = \dfrac{BD}{10}$

$BD = 10\tan(20°) = 3{,}63...$

$BE = 2BD = 7{,}27...$

In $\triangle ABE$ is $\tan(\angle EAB) = \dfrac{BE}{10} = \dfrac{7{,}27...}{10}$

$\angle EAB = 36{,}05...°$

$BC = 2BE = 14{,}55...$

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle CAB) = \dfrac{BC}{10} = \dfrac{14{,}55...}{10}$

$\angle CAB = 55{,}51...°$

$\angle CAE = \angle CAB - \angle EAB = 55{,}51...° - 36{,}05...° \approx 19{,}5°$

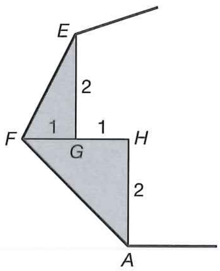
7 **a** In $\triangle AHF$ is $\tan(\angle HFA) = \dfrac{AH}{FH} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\angle HFA = 45°$

In $\triangle FGE$ is $\tan(\angle EFG) = \dfrac{EG}{FG} = \dfrac{2}{1} = 2$

$\angle EFG \approx 63{,}4°$

$\angle F = \angle HFA + \angle EFG \approx 45° + 63{,}4° = 108{,}4°$



b In $\triangle AQD$ is $\tan(\angle DAQ) = \dfrac{DQ}{AQ} = \dfrac{5}{2}$

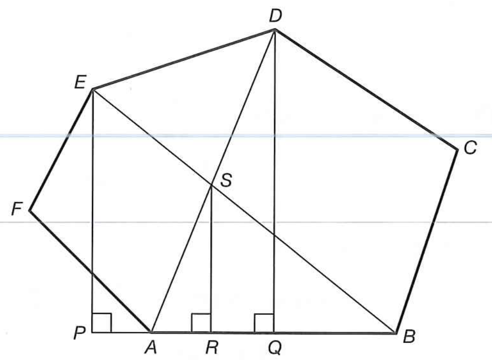
$\angle DAQ = 68{,}1...°$

In $\triangle PBE$ is $\tan(\angle PBE) = \dfrac{EP}{BP} = \dfrac{4}{5}$

$\angle PBE = 38{,}6...°$

$\angle SAB = \angle DAQ$ en $\angle ABS = \angle PBE$

$\angle ASB = 180° - \angle ABS - \angle BAS = 180° - 38{,}6...° + 68{,}1...° \approx 73{,}1°$'



8 **a** $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$

b In $\triangle ABC$ is $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64 + 36 = 100$, dus $AC = 10$.

$$\begin{array}{c|c} AC & AB \\ \hline CD & DE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 10 & 8 \\ \hline 5 & DE \end{array}$$

Dus $DE = \dfrac{5 \cdot 8}{10} = 4$.

Bladzijde 146

9 $\left.\begin{array}{l} \angle CAB = \angle EAD \\ \angle ABC = \angle AED \end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle AED$

$$\begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline AE & DE & AD \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} 9 & 7 & AC \\ \hline 5 & DE & 3 \end{array}$$

$DE = \dfrac{5 \cdot 7}{9} = 3\frac{8}{9}$ en $AC = \dfrac{9 \cdot 3}{5} = 5\frac{2}{5}$, dus $CE = AC - AE = 5\frac{2}{5} - 5 = \frac{2}{5}$.

10 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle BAE = \angle AED \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle AEB = \angle ADE = 90^\circ \end{array}\right\} \triangle EDA \backsim \triangle AEB$

$\left.\begin{array}{l} \angle ABE = \angle BEC \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle AEB = \angle BCE = 90^\circ \end{array}\right\} \triangle AEB \backsim \triangle BCE$

$\left.\begin{array}{l} \triangle EDA \backsim \triangle AEB \\ \triangle AEB \backsim \triangle BCE \end{array}\right\} \triangle EDA \backsim \triangle BCE$

b In $\triangle ABE$ is $BE^2 + AE^2 = AB^2$

$BE^2 + 36 = 100$

$BE^2 = 64$

$BE = 8$

c Uit $\triangle EDA \backsim \triangle AEB$ volgt

$$\begin{array}{c|c|c} DE & AD & AE \\ \hline AE & BE & AB \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} DE & AD & 6 \\ \hline 6 & 8 & 10 \end{array}$$

$AD = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4\frac{4}{5}$ en $DE = \dfrac{6 \cdot 6}{10} = 3\frac{3}{5}$.

11 $\left.\begin{array}{l} \angle DAS = \angle SCE \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ADS = \angle SEC \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle ADS \backsim \triangle CES$

In $\triangle CDE$ is $DE^2 = CD^2 + CE^2$

$DE^2 = 144 + 25$

$DE^2 = 169$

$DE = 13$

Stel $DS = x$, dan is $ES = 13 - x$.

$$\begin{array}{c|c} AD & DS \\ \hline CE & ES \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 7 & x \\ \hline 5 & 13 - x \end{array}$$

Dus $5x = 7(13 - x)$

$5x = 91 - 7x$

$12x = 91$

$x = 7\frac{7}{12}$, dus $DS = 7\frac{7}{12}$

12 $\left.\begin{array}{l} \angle ABS = \angle SDC \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle BAS = \angle SCD \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle ABS \backsim \triangle CDS$

In $\triangle BCD$ is $BD^2 + BC^2 = CD^2$

$BD^2 + 225 = 625$

$BD^2 = 400$

$BD = 20$

Stel $BS = x$, dan is $DS = 20 - x$.

AB	BS	geeft	10	x
CD	DS		25	$20 - x$

Dus $25x = 10(20 - x)$
$25x = 200 - 10x$
$35x = 200$
$x = 5\frac{5}{7}$, dus $BS = 5\frac{5}{7}$

13 $\left.\begin{array}{l}\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ \\ \angle BAC = \angle DAC\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle ADE$

AB	BC	geeft	20	15
AD	DE		8	DE

Dus $DE = \dfrac{8 \cdot 15}{20} = 6$.

$\left.\begin{array}{l}\angle DES = \angle SBC \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle EDS = \angle SCB \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle EDS \backsim \triangle BCS$

In $\triangle BCD$ is $CD^2 = BC^2 + BD^2$
$CD^2 = 144 + 225$
$CD^2 = 369$
$CD = \sqrt{369} = \sqrt{9 \cdot 41} = 3\sqrt{41}$

Stel $DS = x$, dan is $CS = 3\sqrt{41} - x$.

DE	DS	geeft	6	x
BC	CS		15	$3\sqrt{41} - x$

Dus $15x = 6(3\sqrt{41} - x)$
$15x = 18\sqrt{41} - 6x$
$21x = 18\sqrt{41}$
$x = \frac{6}{7}\sqrt{41}$, dus $DS = \frac{6}{7}\sqrt{41}$

14 $\left.\begin{array}{l}\angle AEB = \angle CFB = 90^\circ \\ \angle ABE = \angle FBC\end{array}\right\} \triangle ABE \backsim \triangle CBF$

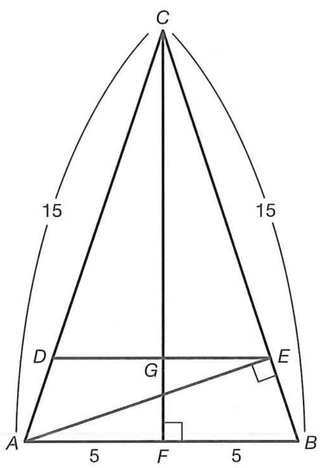
AB	BE	geeft	10	BE
BC	BF		15	5

Dus $BE = \dfrac{10 \cdot 5}{15} = 3\frac{1}{3}$, dus $CE = 15 - 3\frac{1}{3} = 11\frac{2}{3}$.

$\left.\begin{array}{l}\angle ABC = \angle DEC \text{ (F-hoeken)} \\ \angle BAC = \angle EDC \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DEC$

AB	BC	geeft	10	15
DE	CE		DE	$11\frac{2}{3}$

Dus $DE = \dfrac{10 \cdot 11\frac{2}{3}}{15} = 7\frac{7}{9}$.



Bladzijde 147

15 $\left.\begin{array}{l}\angle ACB = \angle DEB \text{ (F-hoeken)} \\ \angle CAB = \angle EDB \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DBE$

Stel $BD = x$, dan is $AB = 7 + x$.

AB	BC	geeft	$7 + x$	10
BD	BE		x	4

Dus $10x = 4(7 + x)$
$10x = 28 + 4x$
$6x = 28$
$x = 4\frac{2}{3}$, dus $BD = 4\frac{2}{3}$ en $AB = 7 + 4\frac{2}{3} = 11\frac{2}{3}$.

Indien $\angle ACB = 90°$, dan geldt in $\triangle ABC$ dat $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$\begin{aligned} AB^2 &= 36 + 100 \\ AB^2 &= 136 \\ AB &= \sqrt{136} \end{aligned}$$

$11\frac{2}{3} > \sqrt{136}$, dus $\angle ACB > 90°$, dus bewering III is waar.

b Uit $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$ volgt

$$\begin{array}{c|c} AC & BC \\ \hline DE & BE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 6 & 10 \\ \hline DE & 4 \end{array}$$

$DE = \dfrac{6 \cdot 4}{10} = 2\frac{2}{5}$.

$$\left.\begin{array}{l} \angle CAS = \angle DES \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ACS = \angle EDS \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle ASC \backsim \triangle ESD$$

$$\begin{array}{c|c} AS & AC \\ \hline ES & DE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} AS & 6 \\ \hline AE - AS & 2\frac{2}{5} \end{array}$$

$2\frac{2}{5}AS = 6(AE - AS)$

$2\frac{2}{5}AS = 6AE - 6AS$

$8\frac{2}{5}AS = 6AE$

$AS = \dfrac{6AE}{8\frac{2}{5}} = \frac{5}{7}AE$

16 **a** De som van de hoeken van een driehoek is altijd 180°, dus $\angle A + \angle B + \angle C_1 + \angle C_2 = 180°$.

b $\triangle ACM$ is een gelijkbenige driehoek met $\angle A = \angle C_1$ (basishoeken).
$\triangle BCM$ is een gelijkbenige driehoek met $\angle B = \angle C_2$ (basishoeken).

c
$$\left.\begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180° \\ \angle A = \angle C_1 \\ \angle B = \angle C_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180° \\ \angle C_{12} + \angle C_{12} = 180° \\ 2 \cdot \angle C_{12} = 180° \\ \angle C_{12} = 90° \end{array}$$

Bladzijde 149

17 **a**
$$\left.\begin{array}{l} \angle ACB = \angle MNB = 90° \\ \angle ABC = \angle MBN \end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle MBN$$

b
$$\begin{array}{c|c} AB & BC \\ \hline BM & BN \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 2BM & BC \\ \hline BM & BN \end{array}$$

$2BM \cdot BN = BM \cdot BC$
$2BN = BC$
$BN = \frac{1}{2}BC$, dus $BN = CN$.

c In $\triangle CMN$ is $CN^2 + MN^2 = CM^2$

$$MN^2 = CM^2 - CN^2$$

In $\triangle BNM$ is $BN^2 + MN^2 = BM^2$

$$MN^2 = BM^2 - BN^2$$

$$\left.\begin{array}{l} MN^2 = BM^2 - BN^2 \\ MN^2 = CM^2 - CN^2 \\ BN = CN \end{array}\right\} \begin{array}{l} BM^2 - CN^2 = CM^2 - CN^2 \\ BM^2 = CM^2 \\ BM = CM \end{array}$$

d
$$\left.\begin{array}{l} BM = CM \\ AM = BM \end{array}\right\} AM = BM = CM$$

Dus A, B en C liggen op een cirkel met middelpunt M met straal AM en middellijn AB.
Hiermee is de stelling bewezen.

18 **a** De definitie zegt dat een raaklijn één punt met de cirkel gemeen heeft.
Dus elk ander punt op de raaklijn ligt niet op de cirkel.
Dit kan alleen als voor elk punt P van de raaklijn geldt $MP > MA$.

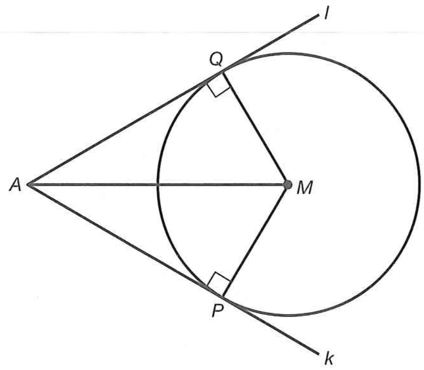
b Voor elk punt P waarvoor $P \neq A$ geldt dat $MP > MA$. Dus MA is de korste verbinding van punt M tot raaklijn l. Uit de definitie van de afstand een een punt tot een lijn volgt dat $MA \perp l$.

Bladzijde 150

19 $\left.\begin{array}{l} l \text{ is raaklijn aan cirkel met middelpunt } M\text{, dus } AM \perp l \\ l \text{ is raaklijn aan cirkel met middelpunt } N\text{, dus } AN \perp l \end{array}\right\} \angle MAN = 180°\text{, dus } MN \perp l$

20 $MQ \perp l$ en $MP \perp k$, dus $\angle AQM = \angle APM = 90°$.

$\left.\begin{array}{l} \text{In } \triangle APM \text{ is } AP^2 + MP^2 = MA^2 \\ \text{In } \triangle AQM \text{ is } AQ^2 + MQ^2 = MA^2 \\ MP = MQ \end{array}\right\} \begin{array}{l} AP^2 + MP^2 = AQ^2 + MQ^2 \\ AP^2 + MQ^2 = AQ^2 + MQ^2 \\ AP^2 = AQ^2 \\ AP = AQ \end{array}$



21 **a** $\angle ACB = 90°$ en $\angle ADB = 90°$ (stelling van Thales)

In $\triangle ADB$ is $BD^2 + AD^2 = AB^2$
$BD^2 + 16 = 36$
$BD^2 = 20$
$BD = 2\sqrt{5}$

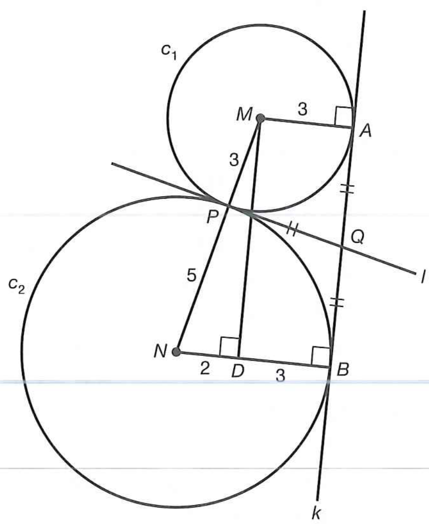
In $\triangle ABC$ is $BC^2 + AC^2 = AB^2$
$BC^2 + 9 = 36$
$BC^2 = 27$
$BC = 3\sqrt{3}$

b In $\triangle ABC$ is $\sin(\angle ABC) = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{6}$
$\angle ABC = 30°$

In $\triangle ADB$ is $\sin(\angle ABD) = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{6}$
$\angle CAB \approx 41{,}8°$

$\angle CBD = \angle ABC + \angle CAB \approx 30° + 41{,}8° = 71{,}8° \neq 90°$, waaruit volgt dat B niet op de cirkel met middellijn CD ligt. (omgekeerde stelling van Thales)

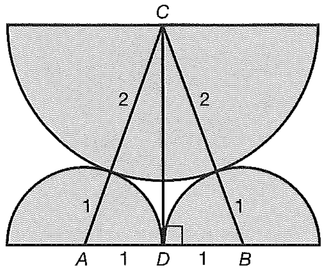
22 Zie de figuur hiernaast.
Uit opgave 20 weet je dat $AQ = PQ = BQ$.
Teken DM loodrecht op NB.
In $\triangle DMN$ is $DM = \sqrt{(3+5)^2 - 2^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$, dus $AB = 2\sqrt{15}$.
Dus $AQ = PQ = BQ = \sqrt{15}$.



23 In $\triangle ADC$ is $CD^2 + AD^2 = AC^2$

$$CD^2 + 1 = 9$$
$$CD^2 = 8$$
$$CD = \sqrt{8} \approx 2{,}83 \text{ dm}$$

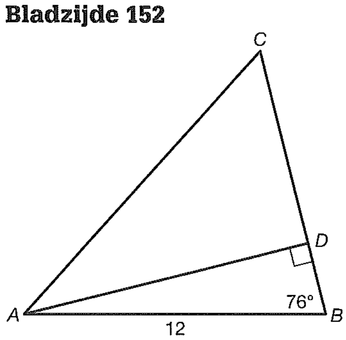
De hoogte van het bankje is 28,3 cm.



4.2 De sinusregel en de cosinusregel

Bladzijde 152

24

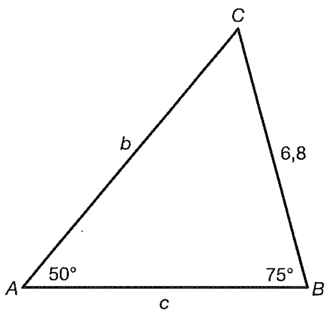


In $\triangle ABD$ is $\sin(76°) = \dfrac{AD}{12}$, dus $AD = 12\sin(76°) = 11{,}64...$

$\angle C = 180° - 48° - 76° = 56°$

In $\triangle ACD$ is $\sin(56°) = \dfrac{11{,}64...}{AC}$, dus $AC = \dfrac{11{,}64...}{\sin(56°)} \approx 14{,}04.$

25 **a**



$\gamma = 180° - 50° - 75° = 55°$

b $\dfrac{6{,}8}{\sin(50°)} = \dfrac{b}{\sin(75°)}$ $\qquad$ $\dfrac{6{,}8}{\sin(50°)} = \dfrac{c}{\sin(55°)}$

$b = \dfrac{6{,}8 \cdot \sin(75°)}{\sin(50°)} \approx 8{,}6$ $\qquad$ $c = \dfrac{6{,}8 \cdot \sin(55°)}{\sin(50°)} \approx 7{,}3$

Bladzijde 153

26 **a** In $\triangle ACD$ is $\sin(\alpha) = \dfrac{CD}{b}$, dus $CD = b\sin(\alpha)$.

In $\triangle BCD$ is $\sin(\beta) = \dfrac{CD}{a}$, dus $CD = a\sin(\beta)$.

b Uit a volgt $a\sin(\beta) = b\sin(\alpha)$

$$a = \frac{b\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

c In $\triangle ABE$ is $\sin(\beta) = \dfrac{AE}{c}$, dus $AE = c\sin(\beta)$.

In $\triangle ACE$ is $\sin(\gamma) = \dfrac{AE}{b}$, dus $AE = b\sin(\gamma)$.

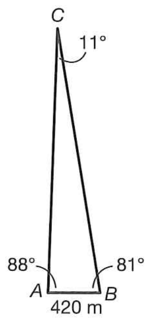
d Uit c volgt $b\sin(\gamma) = c\sin(\beta)$

$$b = \frac{c\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

e $$\left.\begin{aligned} \frac{a}{\sin(\alpha)} &= \frac{b}{\sin(\beta)} \\ \frac{b}{\sin(\beta)} &= \frac{c}{\sin(\gamma)} \end{aligned}\right\} \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

27 **a**



$\angle ACB = 180° - 88° - 81° = 11°$

$\frac{420}{\sin(11°)} = \frac{AC}{\sin(81°)}$ geeft $AC = \frac{420 \cdot \sin(81°)}{\sin(11°)} \approx 2174$ m

28 **a** $\angle DAC = 180° - \angle BAC = 180° - \alpha$

b In $\triangle ACD$ is $\sin(180° - \alpha) = \frac{CD}{b}$, dus $CD = b\sin(180° - \alpha)$.

c In $\triangle BCD$ is $\sin(\beta) = \frac{CD}{a}$, dus $CD = a\sin(\beta)$.

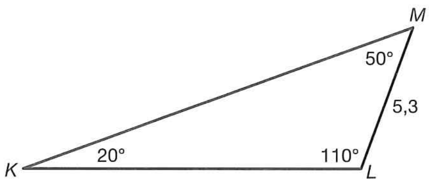
d Uit b en c volgt $a\sin(\beta) = b\sin(180° - \alpha)$

$$a = \frac{b\sin(180° - \alpha)}{\sin(\beta)}$$

$$\frac{a}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Bladzijde 154

29



$\angle M = 180° - 20° - 110° = 50°$

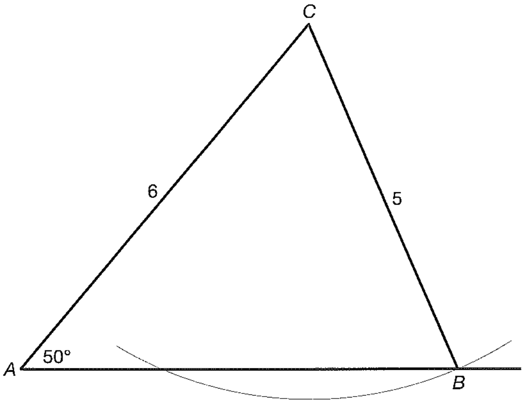
$\frac{5{,}3}{\sin(20°)} = \frac{KM}{\sin(110°)}$

$KM = \frac{5{,}3 \cdot \sin(110°)}{\sin(20°)} \approx 14{,}6$

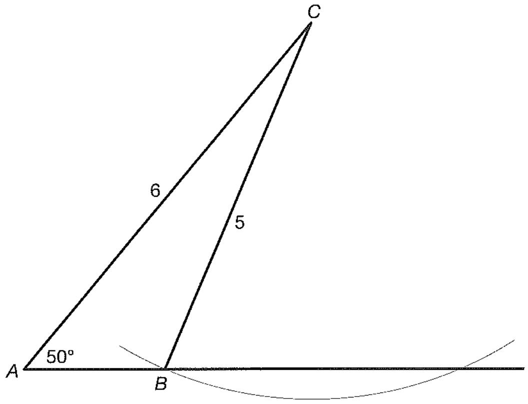
$\frac{5{,}3}{\sin(20°)} = \frac{KL}{\sin(50°)}$

$KL = \frac{5{,}3 \cdot \sin(50°)}{\sin(20°)} \approx 11{,}9$

30 **a**



driehoek 1



driehoek 2

b $\dfrac{5}{\sin(50°)} = \dfrac{6}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

$\sin(\beta) = \dfrac{6 \cdot \sin(50°)}{5} = 0{,}91...$

$\beta \approx 66{,}8°$

$\gamma = 180° - 50° - 66{,}8...° \approx 63{,}2°$

$\dfrac{5}{\sin(50°)} = \dfrac{c}{\sin(63{,}1...°)}$

$c = \dfrac{5 \cdot \sin(63{,}1...°)}{\sin(50°)} \approx 5{,}8$

c $\dfrac{5}{\sin(50°)} = \dfrac{6}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

$\sin(\beta) = \dfrac{6 \cdot \sin(50°)}{5} = 0{,}91...$

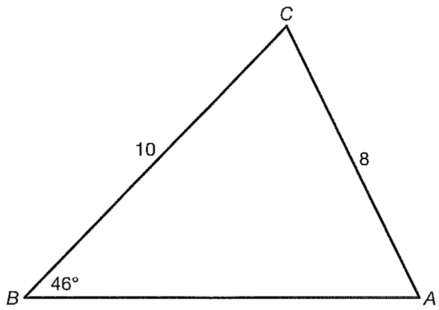
$\beta = 180° - 66{,}8...° \approx 113{,}2°$

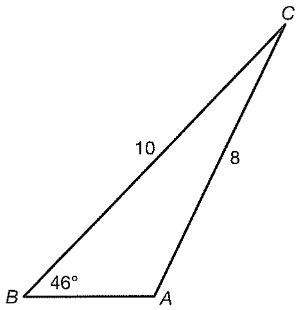
$\gamma = 180° - 50° - 113{,}1...° \approx 16{,}8°$

$\dfrac{5}{\sin(50°)} = \dfrac{c}{\sin(16{,}8...°)}$

$c = \dfrac{5 \cdot \sin(16{,}8...°)}{\sin(50°)} \approx 1{,}9$

31 **a**





$\dfrac{10}{\sin(\angle A)} = \dfrac{8}{\sin(46°)}$ geeft $\sin(\angle A) = \dfrac{10 \cdot \sin(46°)}{8}$ dus $\angle A = 64{,}0...°$.

In de stomphoekige driehoek is $\angle A = 180° - 64{,}0...° \approx 116{,}0°$.

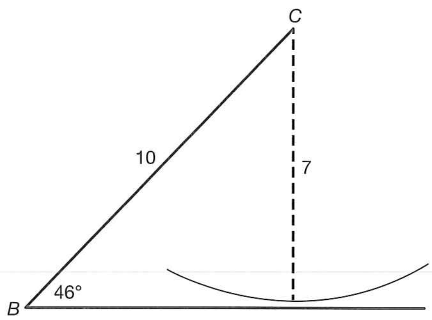
b In de scherphoekige driehoek is $\angle C = 180° - 46° - 64{,}0...° = 69{,}9...°$

$\dfrac{8}{\sin(46°)} = \dfrac{AB}{\sin(69{,}9...°)}$ geeft $AB = \dfrac{8 \cdot \sin(69{,}9...°)}{\sin(46°)} \approx 10{,}4$

In de stomphoekige driehoek is $\angle C = 180° - 46° - 115{,}9...° = 18{,}0...°$.

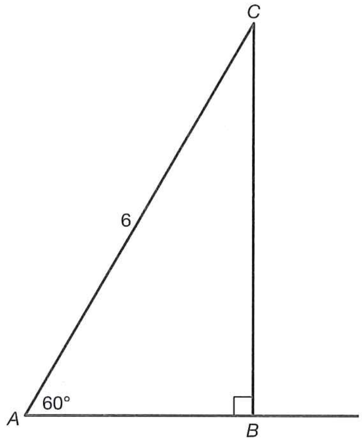
$\dfrac{8}{\sin(46°)} = \dfrac{AB}{\sin(18{,}0...°)}$ geeft $AB = \dfrac{8 \cdot \sin(18{,}0...°)}{\sin(46°)} \approx 3{,}4$

c



De cirkel met middelpunt C en straal 7 snijdt het andere been van hoek B niet.

32 **a**



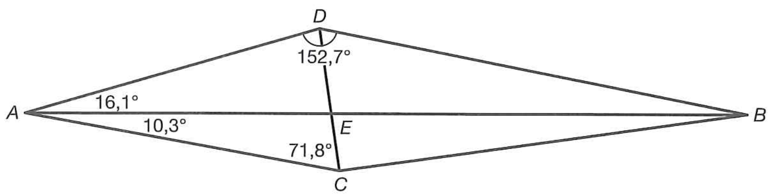
$\sin(60°) = \dfrac{BC}{6}$, dus $BC = 6\sin(60°) \approx 5{,}20$.

Er is geen driehoek mogelijk voor $a < 5{,}20$.

b Er is precies één driehoek mogelijk voor a $= 5{,}20 \vee a \geq 6$.

c Er zijn twee driehoeken mogelijk voor $5{,}20 < a < 6$.

33 **a**



$\angle CAD = 10{,}3° + 16{,}1° = 26{,}4°$

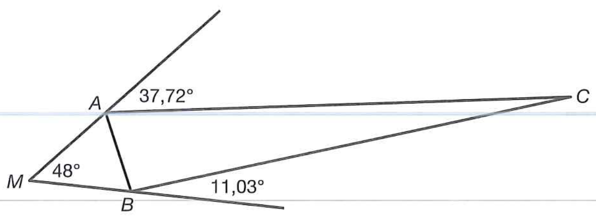
In $\triangle ACD$ is $\dfrac{235}{\sin(26{,}4°)} = \dfrac{AD}{\sin(71{,}8°)}$, dus $AD = \dfrac{235 \cdot \sin(71{,}8°)}{\sin(26{,}4°)} = 502{,}08...$

In $\triangle ABD$ is $\angle ABD = 180° - 16{,}1° - 152{,}7° = 11{,}2°$.

In $\triangle ABD$ is $\dfrac{502{,}08...}{\sin(11{,}2°)} = \dfrac{AB}{\sin(152{,}7°)}$, dus $AB = \dfrac{502{,}08... \cdot \sin(152{,}7°)}{\sin(11{,}2°)} \approx 1186\,\text{m}$.

Bladzijde 155

34 **a**



Amsterdam ligt op 52,5° NB en Benin City op 4,5° NB, dus $\gamma = 52{,}5° - 4{,}5° = 48°$.

$MA = MB = 6378\,\text{km}$

$\angle MAB$ is gelijkbenig met tophoek M, dus

$\angle MAB = \angle MBA = \dfrac{180° - 48°}{2} = 66°$.

$\angle BAC = 180° - 66° - 37{,}72° = 76{,}28°$

$\angle ABC = 180° - 66° - 11{,}03° = 102{,}97°$

$\angle ACB = 180° - 76{,}28° - 101{,}97° = 0{,}75°$

In $\triangle ABM$ is $\dfrac{AB}{\sin(\angle AMB)} = \dfrac{AM}{\sin(\angle ABM)}$

$$\frac{AB}{\sin(48°)} = \frac{6378}{\sin(66°)}$$

$$AB = \frac{6378 \cdot \sin(48°)}{\sin(66°)} = 5188{,}3\ldots \text{ km}$$

In $\triangle ABC$ is $\dfrac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \dfrac{AB}{\sin(\angle ACB)}$

$$\frac{AC}{\sin(102{,}97°)} = \frac{5188{,}3\ldots}{\sin(0{,}75°)}$$

$$AC = \frac{5188{,}3\ldots \cdot \sin(102{,}97°)}{\sin(0{,}75°)} \approx 386\,258 \text{ km}$$

Dus de gevraagde afstand is 386 300 km.

35 **a** De sinusregel geeft $\dfrac{4}{\sin(\alpha)} = \dfrac{5}{\sin(\beta)} = \dfrac{6}{\sin(\gamma)}$.

Bij elke combinatie van twee breuken zijn er twee onbekenden.
Je kunt dus niet de sinusregel gebruiken.

b De sinusregel geeft $\dfrac{QR}{\sin(50°)} = \dfrac{5}{\sin(\angle Q)} = \dfrac{6}{\sin(\angle R)}$.

Bij elke combinatie van twee breuken zijn er twee onbekenden
Je kunt dus niet de sinusregel gebruiken.

Bladzijde 156

36 **a** In $\triangle ACD$ is $AD^2 + CD^2 = AC^2$

$$x^2 + h^2 = b^2$$

b In $\triangle BCD$ is $BC^2 = BD^2 + CD^2$

$$a^2 = (c - x)^2 + h^2$$
$$a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$$

c $\left.\begin{array}{l} a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2 \\ x^2 + h^2 = b^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 = c^2 - 2cx + b^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \end{array}$

d In $\triangle ACD$ is $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{b}$, dus $x = b\cos(\alpha)$.

e $\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \\ x = b\cos(\alpha) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos(\alpha) \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \end{array}$

Bladzijde 157

37 **a** In $\triangle ACD$ is $AD^2 + CD^2 = AC^2$

$$x^2 + h^2 = b^2$$

b In $\triangle BCD$ is $BC^2 = BD^2 + CD^2$

$$a^2 = (c + x)^2 + h^2$$
$$a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + h^2 = b^2 \\ a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 = c^2 + 2cx + b^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \end{array}$

c In $\triangle ACD$ is $\angle CAD = 180° - \alpha$.

Verder is $\cos(\angle CAD) = \dfrac{AD}{AC}$.

Dus $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x}{b}$, ofwel $x = b\cos(180° - \alpha)$.

d $\left.\begin{array}{l} \cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha) \\ x = b\cos(180° - \alpha) \end{array}\right\} x = -b\cos(\alpha)$

$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \\ x = -b\cos(\alpha) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot -b\cos(\alpha) \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \end{array}$

Dus de cosinusregel geldt ook voor stomphoekige driehoeken.

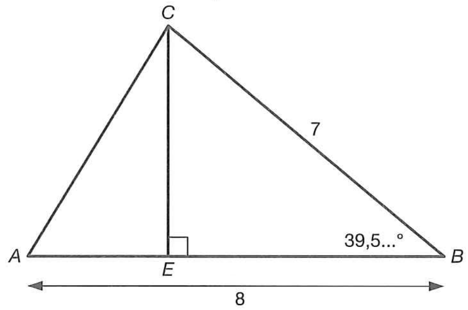
38 **a** In $\triangle ABD$ is $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos(\angle B)$

$$6^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos(\angle B)$$
$$36 = 73 - 48\cos(\angle B)$$
$$48\cos(\angle B) = 37$$
$$\cos(\angle B) = \frac{37}{48}$$
$$\angle B = 39{,}5...^\circ$$

In $\triangle ABC$ is $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B)$

$$AC^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{37}{48}$$
$$AC^2 = 26\tfrac{2}{3}$$
$$AC = \sqrt{26\tfrac{2}{3}} \approx 5{,}164$$

b



In $\triangle BCE$ is $\sin(39{,}5...^\circ) = \frac{CE}{7}$, dus $CE = 7\sin(39{,}5...^\circ) = 4{,}45...$

opp $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4{,}45... \approx 17{,}84$

39 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

$$5^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos(\alpha)$$
$$25 = 85 - 84\cos(\alpha)$$
$$84\cos(\alpha) = 60$$
$$\cos(\alpha) = \frac{60}{84}$$
$$\alpha \approx 44{,}4^\circ$$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$

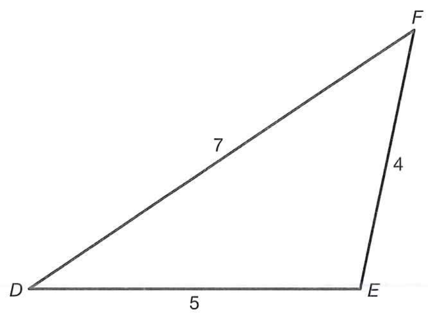
$$6^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\beta)$$
$$36 = 74 - 70\cos(\beta)$$
$$70\cos(\beta) = 38$$
$$\cos(\beta) = \frac{38}{70}$$
$$\beta \approx 57{,}1^\circ$$

$\gamma = 180^\circ - 44{,}41...^\circ - 57{,}12...^\circ \approx 78{,}5^\circ$

Dus $\alpha \approx 44{,}4^\circ, \beta \approx 57{,}1^\circ$ en $\gamma \approx 78{,}5^\circ$.

40 $EF^2 = DF^2 + DE^2 - 2 \cdot DF \cdot DE \cdot \cos(\angle D)$

$$4^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos(\angle D)$$
$$16 = 74 - 70\cos(\angle D)$$
$$70\cos(\angle D) = 58$$
$$\cos(\angle D) = \frac{58}{70}$$
$$\angle D \approx 34{,}0^\circ$$



$DF^2 = EF^2 + DE^2 - 2 \cdot EF \cdot DE \cdot \cos(\angle E)$

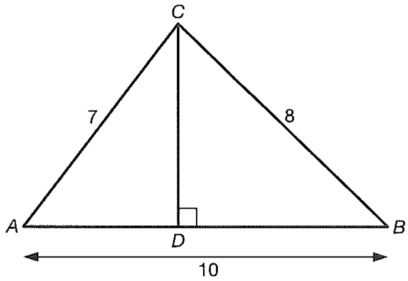
$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos(\angle E)$$
$$49 = 41 - 40\cos(\angle E)$$
$$40\cos(\angle E) = -8$$
$$\cos(\angle E) = \frac{-8}{40}$$
$$\angle E \approx 101{,}5^\circ$$
$$\angle F = 180^\circ - 34{,}04...^\circ - 101{,}53...^\circ \approx 44{,}4^\circ$$

41 **a** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(50°)$
$a^2 = 22{,}43...$
$a \approx 4{,}74$

b $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
$25 = 22{,}43... + 36 - 2 \cdot 4{,}73... \cdot 6 \cdot \cos(\beta)$
$25 = 58{,}43... - 56{,}83... \cdot \cos(\beta)$
$56{,}83... \cdot \cos(\beta) = 33{,}43...$
$\cos(\beta) = \dfrac{33{,}43...}{56{,}83...}$
$\beta \approx 54{,}0°$

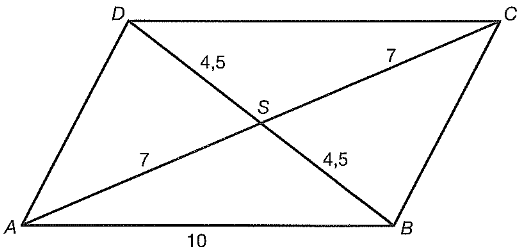
Alternatieve oplossing
$\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$
$\dfrac{4{,}73...}{\sin(50°)} = \dfrac{5}{\sin(\beta)}$
$\sin(\beta) = \dfrac{5 \cdot \sin(50°)}{4{,}73...}$
$\beta \approx 54{,}0°$

42 **a** $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\angle A)$
$8^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos(\angle A)$
$64 = 149 - 140\cos(\angle A)$
$140\cos(\angle A) = 85$
$\cos(\angle A) = \dfrac{85}{140}$
$\angle A = 52{,}61...°$
In $\triangle ACD$ is $\sin(52{,}61...°) = \dfrac{CD}{7}$, dus $CD = 7\sin(52{,}61...°) = 5{,}56....$
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5{,}56... \approx 27{,}8$

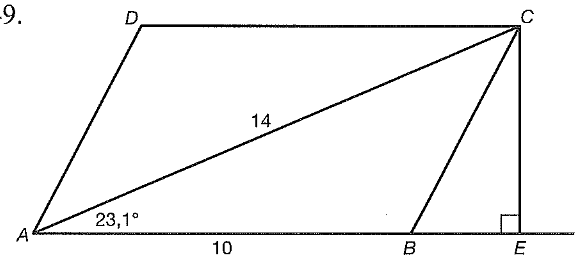


Bladzijde 158

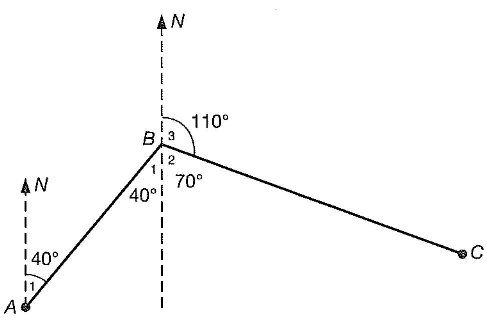
43 **a** In $\triangle ABS$ is $BS^2 = AB^2 + AS^2 - 2 \cdot AB \cdot AS \cdot \cos(\angle A)$
$4{,}5^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos(\angle A)$
$20{,}25 = 149 - 140\cos(\angle A)$
$\cos(\angle A) = \dfrac{128{,}75}{140}$
$\angle A \approx 23{,}1°$
In $\triangle ABC$ is $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\angle A)$
$BC^2 = 14^2 + 10^2 - 2 \cdot 14 \cdot 10 \cdot \dfrac{128{,}75}{140}$
$BC^2 = 38{,}5$
$BC \approx 6{,}2$



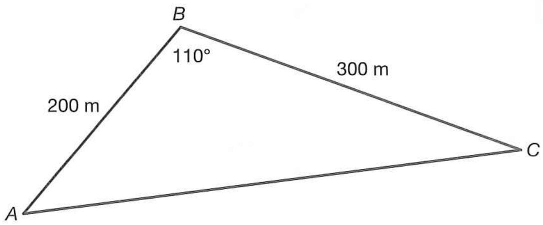
b In $\triangle ACE$ is $\sin(23{,}12...°) = \dfrac{CE}{14}$, dus $CE = 14\sin(23{,}12...°) \approx 5{,}49$.
$O(ABCD) = AB \cdot CE \approx 10 \cdot 5{,}49 = 54{,}9$



44 **a** Zie de figuur hiernaast.
$\angle B_1 = \angle A_1 = 40°$ (Z-hoeken)
$\angle B_2 = 180° - \angle B_3 = 180° - 110° = 70°$ (gestrekte hoek)
$\angle ABC = \angle B_1 + \angle B_2 = 40° + 70° = 110°$



b $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B)$
$AC^2 = 200^2 + 300^2 - 2 \cdot 200 \cdot 300 \cdot \cos(110°)$
$AC^2 = 171042{,}4...$
$AC \approx 414$ m
Dus Harm had 414 meter moeten lopen.



c $\dfrac{BC}{\sin(\angle BAC)} = \dfrac{AC}{\sin(\angle ABC)}$

$\dfrac{300}{\sin(\angle BAC)} = \dfrac{413{,}57...}{\sin(110°)}$

$\sin(\angle BAC) = \dfrac{300 \cdot \sin(110°)}{413{,}57...}$

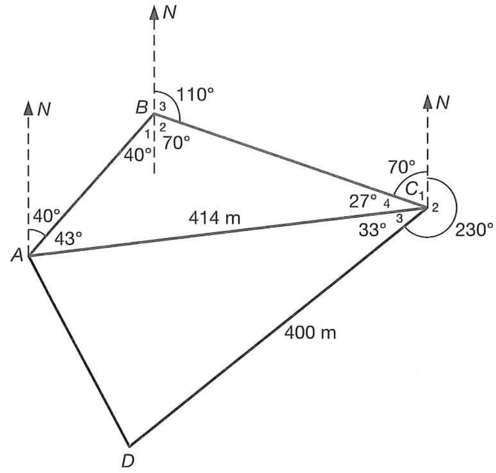
$\angle BAC \approx 43°$
Dus de koers is $40° + 43° = 83°$.

d $\angle C_1 = \angle B_2 = 70°$ (Z-hoeken)
$\angle C_4 = 180° - 110° - 42{,}97...° = 27{,}02...°$ (hoekensom driehoek)
$\angle ACD = \angle C_3 = 360° - 70° - 230° - 27{,}02...° = 32{,}97...°$ (volle hoek)
In $\triangle ADC$ is $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos(\angle ACD)$
$AD^2 \approx 413{,}57...^2 + 400^2 - 2 \cdot 413{,}57... \cdot 400 \cdot \cos(33{,}0°)$
$AD^2 \approx 53\,473{,}17...$
$AD \approx 231$ m

$\dfrac{CD}{\sin(\angle DAC)} = \dfrac{AD}{\sin(\angle ACD)}$ geeft $\dfrac{400}{\sin(\angle DAC)} = \dfrac{231{,}24...}{\sin(32{,}97...°)}$

Dus $\sin(\angle DAC) = \dfrac{400 \cdot \sin(32{,}97...°)}{231{,}43...}$

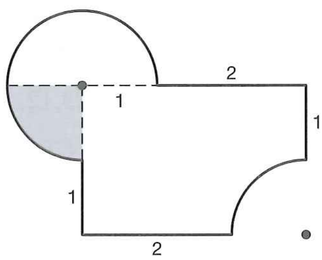
$\angle DAC \approx 70°$
Harm had 231 meter met koers $40° + 43° + 70° = 153°$ moeten lopen



4.3 Lengten en oppervlakten

Bladzijde 160

45 De oppervlakte is gelijk aan de oppervlakte van een rechthoek met zijden van 3 en 2 plus de oppervlakte van een halve cirkel met straal 1 cm, dus $O = 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = 6 + \frac{1}{2}\pi \approx 7{,}57 \text{ cm}^2 = 757 \text{ mm}^2$.



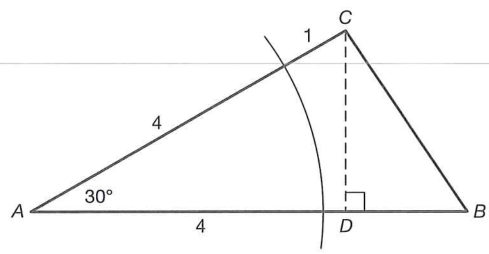
Bladzijde 161

46 **a** In $\triangle ABC$ is $\dfrac{10}{\sin(50°)} = \dfrac{AB}{\sin(70°)}$ geeft $AB = \dfrac{10\sin(70°)}{\sin(50°)} = 12{,}26...$

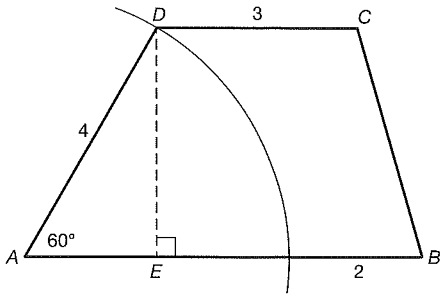
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 8{,}66... \cdot 12{,}26... = 53{,}11...$

De oppervlakte van het gevraagde gebied is $53{,}11... - \dfrac{70}{360} \cdot \pi \cdot 8{,}66...^2 \approx 7{,}30$.

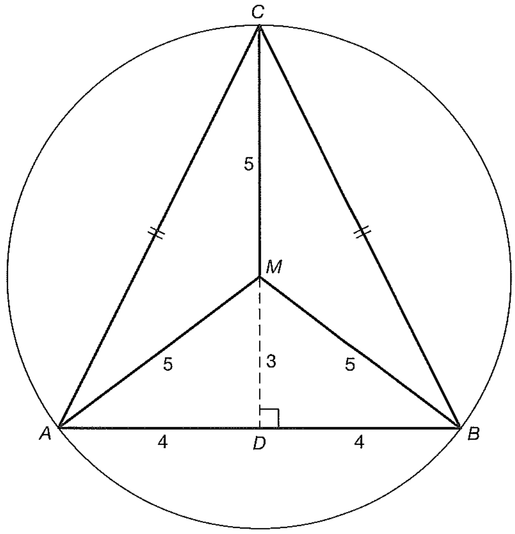
47 In $\triangle ADC$ is $\sin(30°) = \dfrac{CD}{5}$, dus $CD = 5\sin(30°) = 2{,}5$.
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$
De oppervlakte van het gevraagde vlakdeel is
$7{,}5 - \dfrac{30}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 7{,}5 - 1\frac{1}{3}\pi$.



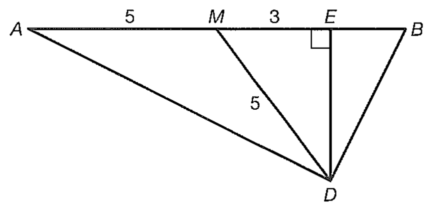
49 In $\triangle AED$ is $\sin(60°) = \dfrac{DE}{4}$, geeft $DE = 4\sin(60°) = 3{,}46...$
$O(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (3 + 6) \cdot 3{,}46... = 15{,}58...$
De oppervlakte van het gevraagde vlakdeel is $15{,}58... - \dfrac{60}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 \approx 7{,}21$.



49 $AM = BM = CM = 5$
In $\triangle ADM$ is $DM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (5 + 3) = 32$
De oppervlakte van het gevraagde gebied is $\pi \cdot 5^2 - 32 = 25\pi - 32$.



50 In $\triangle ABC$ is $BC = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.
$O(\text{blauwe vlakdelen}) = O(\text{halve cirkel}) - O(\triangle ABC)$
$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{21}$
$= 12\frac{1}{2}\pi - 4\sqrt{21}$
In $\triangle DEM$ is $DM^2 = DE^2 + EM^2$
$5^2 = DE^2 + 3^2$
$DE^2 = 25 - 9 = 16$, dus $DE = 4$.
$O(\text{gele vlakdelen}) = O(\text{halve cirkel}) - O(\triangle ABD)$
$= 12\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4$
$= 12\frac{1}{2}\pi - 20$
Het verschil tussen de oppervlakten van het blauwe en het gele gebied is
$12\frac{1}{2}\pi - 4\sqrt{21} - (12\frac{1}{2}\pi - 20) = 20 - 4\sqrt{21}$.



Alternatieve oplossing
In $\triangle ABC$ is $BC = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.
In $\triangle DEM$ is $DM^2 = DE^2 + EM^2$
$5^2 = DE^2 + 3^2$
$DE^2 = 25 - 9 = 16$, dus $DE = 4$.
$O(\text{blauwe vlakdelen}) - O(\text{gele vlakdelen}) = O(\triangle ABD) - O(\triangle ABC)$
$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{21}$
$= 20 - 4\sqrt{21}$

4

Bladzijde 162

51 In $\triangle ABC$ is $5^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos(\angle BAC)$

$$25 = 136 - 120\cos(\angle BAC)$$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{111}{120}$$

$$\angle BAC = 22{,}33...^\circ$$

In $\triangle AFC$ is $\sin(22{,}33...^\circ) = \dfrac{CF}{10}$

$$CF = 10\sin(22{,}33...^\circ) = 3{,}79...$$

$O(ABCD) = 6 \cdot 3{,}79... = 22{,}79...$

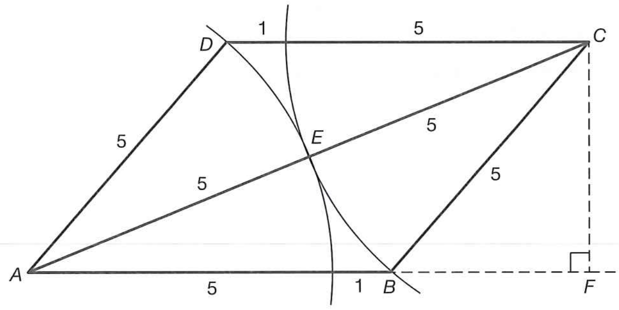
In $\triangle ACD$ is $6^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos(\angle CAD)$

$$36 = 125 - 100\cos(\angle CAD)$$

$$\cos(\angle CAD) = \frac{89}{100}$$

$$\angle CAD = 27{,}12...^\circ$$

$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 22{,}33...^\circ + 27{,}12...^\circ = 49{,}45...^\circ$



De oppervlakte van het gevraagde vlakdeel is $22{,}79... - 2 \cdot \dfrac{49{,}45...}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx 1{,}22$.

52 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 70^\circ - 45^\circ = 65^\circ$

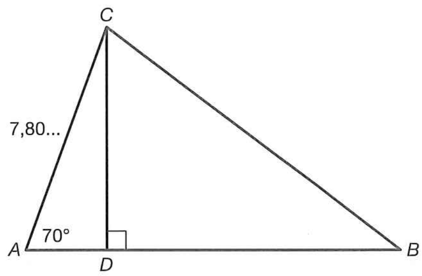
$\dfrac{AC}{\sin(45^\circ)} = \dfrac{10}{\sin(65^\circ)}$ geeft $AC = \dfrac{10\sin(45^\circ)}{\sin(65^\circ)} = 7{,}80...$

In $\triangle ADC$ is $\sin(70^\circ) = \dfrac{CD}{7{,}80...}$

$$CD = 7{,}80... \cdot \sin(70^\circ) = 7{,}33...$$

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7{,}33... = 36{,}65...$

De oppervlakte van het gevraagde gebied is $36{,}65... - \dfrac{70 + 45}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx 11{,}57$.



53 **a** Binnen het vierkant bevinden zich één cirkel en vier kwartcirkels.
De oppervlakte van het blauwe gedeelte binnen de cirkel is dus $2\pi r^2$.
In $\triangle ABC$ is $AB = BC$ en $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$2 \cdot AB^2 = (4r)^2$$

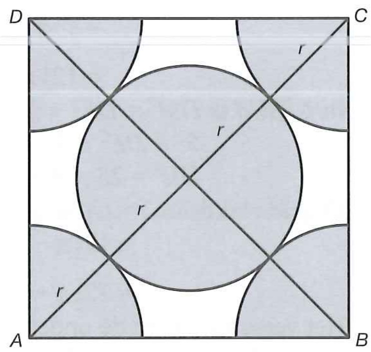
$$2 \cdot AB^2 = 16r^2$$

$$AB^2 = 8r^2$$

$$AB = r\sqrt{8}$$

De oppervlakte van het vierkant is $(r\sqrt{8})^2 = 8r^2$.

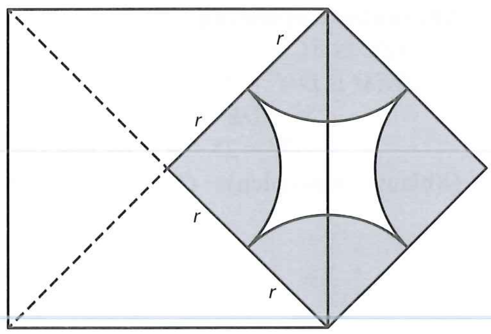
Het deel van het vierkant dat blauw is, is $\dfrac{2\pi r^2}{8r^2} = \dfrac{\pi}{4}$.



Alternatieve oplossing

Door het vierkant met diagonalen in kwarten te delen, is binnen elk kwart de verhouding gelijk aan de verhouding binnen het gehele vierkant.
Door twee kwarten tegen elkaar te leggen ontstaat een kleiner vierkant. Zie de figuur hiernaast.

Het deel van het vierkant dat blauw is, is $\dfrac{\pi r^2}{(2r)^2} = \dfrac{\pi r^2}{4r^2} = \dfrac{\pi}{4}$.



b $O(\text{vierkant}) = a$, dus zijden vierkant zijn $\sqrt{a}$.
$O(\text{cirkel}) = b$, dus $\pi r^2 = b$

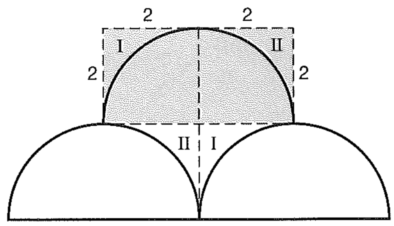
$$r^2 = \frac{b}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$$

Omtrek cirkel $= 2\pi r = 2\pi\sqrt{\dfrac{b}{\pi}} = 2\sqrt{b\pi}$.

De lengte van de rode lijn $= 4 \cdot$ zijde vierkant $+ 2 \cdot$ halve omtrek cirkel.
$= 4\sqrt{a} + 2\sqrt{b\pi}$

c Het blauwe gebied bestaat uit een halve cirkel en deel I en deel II
Door deel I en deel II te verplaatsen, vormen deze samen met de halve cirkel een rechthoek.
De oppervlakte van het blauwe gebied is dus $2 \cdot 4 = 8$ cm^2.



Bladzijde 163

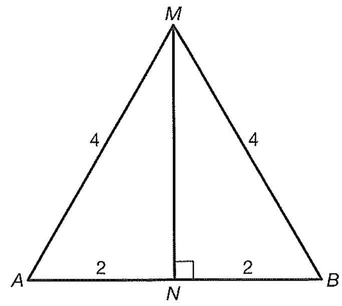
54 **a** In $\triangle ABM$ is $\angle AMB = \dfrac{360°}{6} = 60°$.

b $AM = BM$ en $\angle AMB = 60°$, dus $\triangle ABM$ is gelijkzijdig en dus is $AM = BM = AB = 4$.
In $\triangle ANM$ is $AN^2 + MN^2 = AM^2$

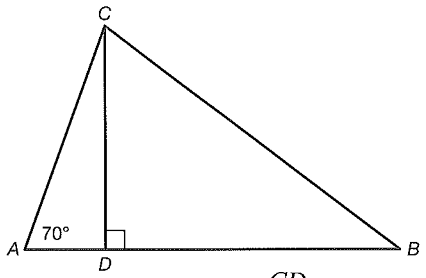
$$2^2 + MN^2 = 4^2$$
$$MN^2 = 16 - 4 = 12, \text{ dus } MN = \sqrt{12}$$

$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} \approx 6{,}93$

c $O(ABCDEF) = 6 \cdot O(\triangle ABM) = 6 \cdot 6{,}92... \approx 41{,}6$



55 **a**



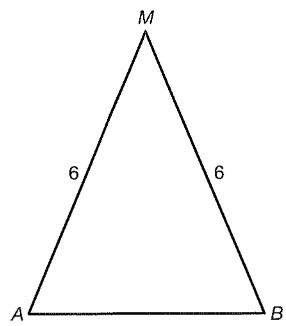
b In $\triangle ADC$ is $\sin(70°) = \dfrac{CD}{AC}$, dus $CD = AC \cdot \sin(70°)$.
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(70°)$

Bladzijde 164

56 $O(\triangle AMB) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM \cdot \sin(\angle AMB)$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin\left(\frac{360°}{8}\right)$$
$$= 12{,}72...$$

$O(ABCDEFGH) \approx 8 \cdot 12{,}72... \approx 101{,}82$

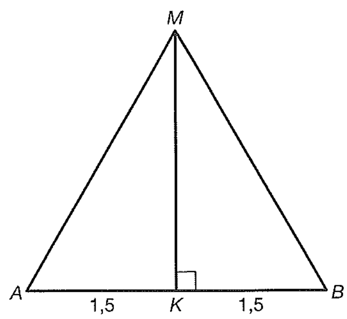


57 $\angle AMB = \dfrac{360°}{7}$, dus $\angle AMK = \dfrac{360°}{14}$.

In $\triangle AKM$ is $\sin\left(\dfrac{360°}{14}\right) = \dfrac{1{,}5}{AM}$, dus $AM = \dfrac{1{,}5}{\sin\left(\dfrac{360°}{14}\right)} = 3{,}45...$

$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 3{,}45... \cdot 3{,}45... \cdot \sin\left(\dfrac{360°}{7}\right) = 4{,}67...$

$O(ABCDEFG) = 7 \cdot 4{,}67... \approx 32{,}71$



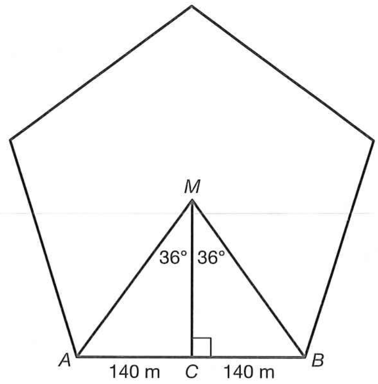
Bladzijde 165

58 $\angle AMB = \dfrac{360°}{5} = 72°$, dus $\angle AMC = 36°$.

In $\triangle ACM$ is $\sin(36°) = \dfrac{140}{AM}$, dus $AM = \dfrac{140}{\sin(36°)} = 238{,}18...$ m.

$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 238{,}18... \cdot 238{,}18... \cdot \sin(72°) = 26977{,}08...\ \text{m}^2$

$O(\text{Pentagon}) = 5 \cdot 26977{,}08... = 134885{,}42...\ \text{m}^2 \approx 13{,}5$ ha



59 $\angle AMB = \dfrac{360°}{9} = 40°$ en $\angle AMC = 20°$.

Neem $AM = BM = a$, dan geldt

$O(\text{negenhoek}) = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin(40°)$

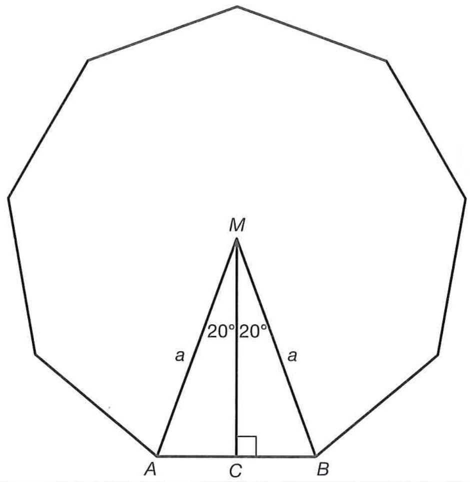
geeft $4\frac{1}{2}a^2 \sin(40°) = 180$

$$a^2 = \frac{40}{\sin(40°)}$$

$$a = \sqrt{\frac{40}{\sin(40°)}} = 7{,}88...$$

In $\triangle ACM$ is $\sin(20°) = \dfrac{AC}{7{,}88...}$, dus $AC = 7{,}88... \cdot \sin(20°) = 2{,}69...$

De omtrek van de negenhoek is $18 \cdot 2{,}69... \approx 48{,}56$.

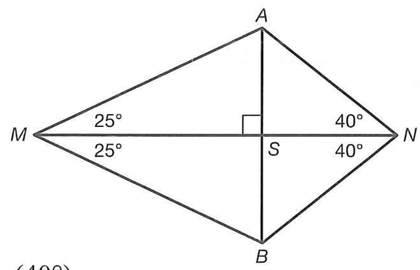


60 $O(c_N) = 10$, dus $\pi \cdot AN^2 = 10$

$$AN^2 = \frac{10}{\pi}$$

$$AN = \sqrt{\frac{10}{\pi}}$$

Zie de figuur hiernaast.



$$\left.\begin{array}{l} \text{In } \triangle ASN \text{ is } \sin(40°) = \dfrac{AS}{\sqrt{\frac{10}{\pi}}}, \text{ dus } AS = \sqrt{\dfrac{10}{\pi}} \cdot \sin(40°) \\ \text{In } \triangle AMS \text{ is } \sin(25°) = \dfrac{AS}{AM}, \text{ dus } AS = AM \cdot \sin(25°) \end{array}\right\} \begin{array}{l} AM \cdot \sin(25°) = \sqrt{\dfrac{10}{\pi}} \cdot \sin(40°) \\ AM = \dfrac{\sqrt{\frac{10}{\pi}} \cdot \sin(40°)}{\sin(25°)} \approx 2{,}71... \end{array}$$

$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 2{,}71... \cdot 2{,}71... \cdot \sin(50°) \approx 2{,}82$

61 **a** $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE$

b $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$

c $$\left.\begin{array}{l} O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE \\ O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD \\ AB \cdot CE = BC \cdot AD \end{array}$$

Bladzijde 167

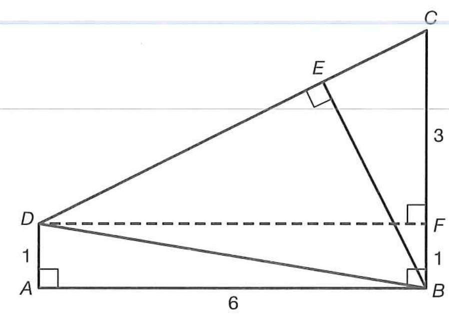
62 $CD = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

De zijde × hoogte-methode in $\triangle BCD$ geeft

$CD \times BE = BC \times DF$

$3\sqrt{5} \cdot BE = 4 \cdot 6$

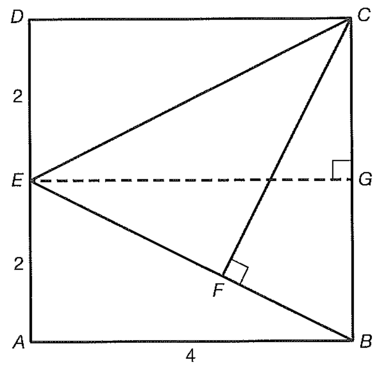
$BE = \dfrac{4 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \dfrac{24}{3\sqrt{5}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}\sqrt{5} = 1\frac{3}{5}\sqrt{5}$



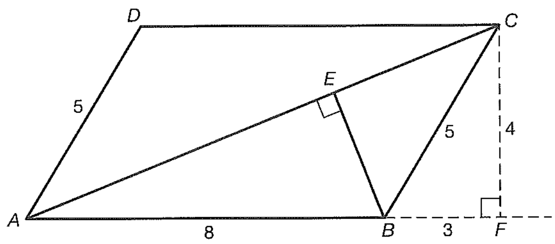
63 $BC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft
$BC \times AD = AB \times AC$
$2\sqrt{5} \cdot AD = 4 \cdot 2$
$AD = \dfrac{4 \cdot 2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

64 **a** $CD = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$
b De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft
$AC \times BE = AB \times CD$
$13 \cdot BE = 10 \cdot 12$
$BE = \dfrac{10 \cdot 12}{13} = \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}$

65 $BE = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
De zijde × hoogte-methode in $\triangle BCE$ geeft
$BE \times CF = BC \times EG$
$2\sqrt{5} \cdot CF = 4 \cdot 4$
$CF = \dfrac{4 \cdot 4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}\sqrt{5} = 1\frac{3}{5}\sqrt{5}$



66 $O(ABCD) = AB \cdot CF = 8 \cdot CF = 32$, dus $CF = 4$.
$BF = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$
$AC = \sqrt{11^2 + 4^2} = \sqrt{137}$
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft
$AC \times BE = AB \times CF$
$\sqrt{137} \cdot BE = 8 \cdot 4$
$BE = \dfrac{8 \cdot 4}{\sqrt{137}} = \dfrac{32}{\sqrt{137}} \cdot \dfrac{\sqrt{137}}{\sqrt{137}} = \frac{32}{137}\sqrt{137}$



4.4. Vergelijkingen in de meetkunde

Bladzijde 169

67 **a** In $\triangle ACD$ is $AC^2 = AD^2 + CD^2$
$(2a)^2 = a^2 + CD^2$
$CD^2 = 4a^2 - a^2$
$CD^2 = 3a^2$
$CD = a\sqrt{3}$
b $CD = 7\sqrt{3}$ geeft $a\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$, dus $a = 7$.
$AC = 2a = 2 \cdot 7 = 14$

Bladzijde 170

68 $AB = 8$ geeft $AC = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

$EF = 6\sqrt{3}$ geeft $DF = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ en $DE = \sqrt{3} \cdot DF = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 9$

$$\left.\begin{array}{l} KM = 10 \text{ geeft } MN = \dfrac{10}{2} = 5 \text{ en } KN = \sqrt{3} \cdot MN = 5\sqrt{3} \\ MN = 5 \text{ geeft } NL = 5 \end{array}\right\} KL = KN + NL = 5\sqrt{3} + 5$$

$RS = 3$ geeft $QS = 3\sqrt{2}$ dus $PQ = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$

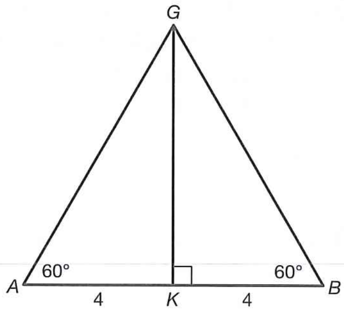
69 Noem het middelpunt van de omgeschreven cirkel G.

$\triangle ABG$ is gelijkbenig en $\angle AGB = \dfrac{360°}{6} = 60°$, dus $\angle A = \angle B = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$.

Hieruit volgt dat $\triangle ABG$ een gelijkzijdige driehoek is.

Uit $AK = 4$ en $\angle A = 60°$ volgt $GK = 4\sqrt{3}$.

$O(ABCDEF) = 6 \cdot O(\triangle ABG) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$



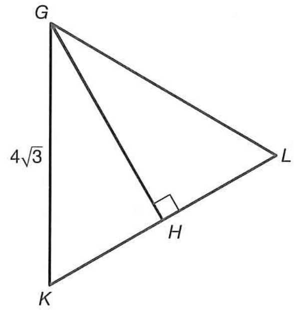
$\triangle KLG$ is een gelijkzijdige driehoek met zijde $4\sqrt{3}$, dus $KL = 4\sqrt{3}$,

$KH = 2\sqrt{3}$ en $GH = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$.

$O(KLMNOP) = 6 \cdot O(\triangle KLG) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 72\sqrt{3}$

De oppervlakte van het gekleurde gebied is

$O(ABCDEF) - O(KLMNOP) = 96\sqrt{3} - 72\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.



Alternatieve oplossing

Noem het middelpunt van de omgeschreven cirkel G.

$\triangle ABG$ is gelijkbenig en $\angle AGB = \dfrac{360°}{6} = 60°$,

dus $\angle A = \angle B = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$.

Hieruit volgt dat $\triangle ABG$ een gelijkzijdige driehoek is.

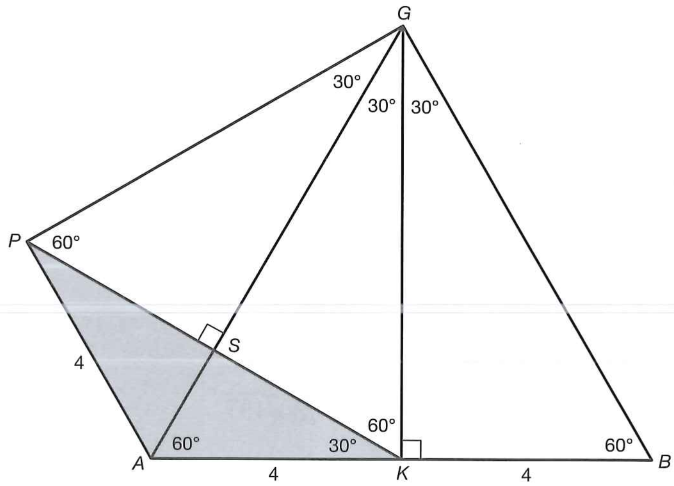
Op dezelfde manier is aan te tonen dat $\triangle PKG$ een gelijkzijdige driehoek is.

Hieruit volgt dat $\angle S = 90°$ en dat $\angle AKS = 180° - 90° - 60° = 30°$.

$AK = 4$ geeft $AS = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ en $KS = 2\sqrt{3}$.

De oppervlakte van het gekleurde gebied is

$12 \cdot O(\triangle AKS) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.



70 **a** In $\triangle ABE$ is $AB = \sqrt{2}$ en $AE = 1$.

In $\triangle BDE$ is $DE = \sqrt{3}$ en $BD = 2$.

$AD = AE + DE = 1 + \sqrt{3}$

In $\triangle ACD$ is $AC = \dfrac{AD}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

$CD = AC = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$

$BC = AC - AB = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$

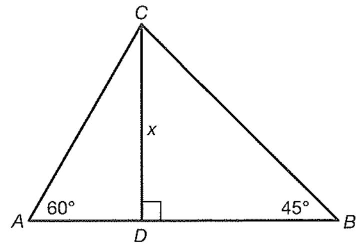
b $\sin(15°) = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$

c $\cos(15°) = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$

Bladzijde 171

71 Stel de hoogte $CD = x$, dan is

$AD = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}$ en $BD = x$



Uit $AD + DB = AB$ volgt $\frac{1}{3}x\sqrt{3} + x = 12$

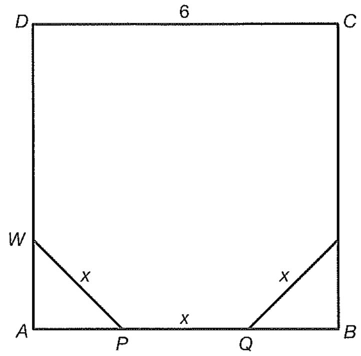
$$x\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3} + 1\right) = 12$$

$$x = \frac{12}{\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1} = \frac{36}{\sqrt{3} + 3}$$

$$O(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \tfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{36}{\sqrt{3} + 3} = \frac{216}{\sqrt{3} + 3}$$

72 Stel de zijde van de regelmatige achthoek x,

dan is $AP = BQ = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}x\sqrt{2}$.



Uit $AP + PQ + BQ = AB$ volgt $\frac{1}{2}x\sqrt{2} + x + \frac{1}{2}x\sqrt{2} = 6$

$$x\sqrt{2} + x = 6$$

$$x(\sqrt{2} + 1) = 6$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{2} + 1}$$

Bladzijde 172

73 In de rechthoekige $\triangle AEM$ is $\angle MAE = 30°$ en $ME = r$, dus $AE = r\sqrt{3}$.
Uit $AE + ED = AD$ volgt $r\sqrt{3} + r = 6$

$$r(\sqrt{3} + 1) = 6$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{3} + 1}$$

74 In $\triangle AEM$ is $ME = r$ dus $AM = 2r$ met $r = \frac{6}{\sqrt{3} + 1}$ (zie opgave 73).

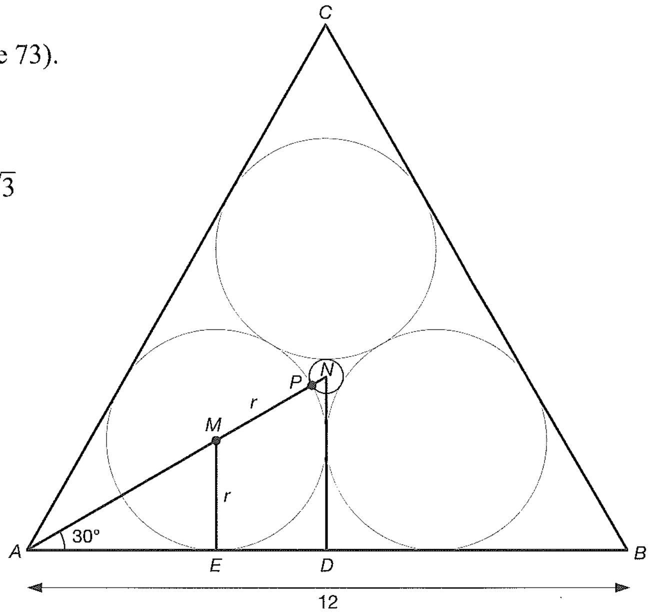
Stel de straal van de kleine cirkel x, dan is $AN = 3r + x$.

In $\triangle ADN$ is $AD = 6$ dus $AN = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot 2 = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

$3r + x = 4\sqrt{3}$ geeft $x = 4\sqrt{3} - 3r$

$$x = 4\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{6}{\sqrt{3} + 1}$$

$$x = 4\sqrt{3} - \frac{18}{\sqrt{3} + 1}$$



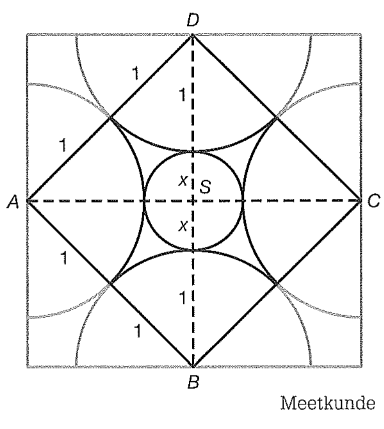
75 **a** Stel de straal van het cirkeltje x.

In $\triangle ASD$ is $AD = 2$, dus $DS = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$DS = 1 + x$

$$\left.\begin{array}{l} DS = \sqrt{2} \\ DS = 1 + x \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 + x = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} - 1 \end{array}$$

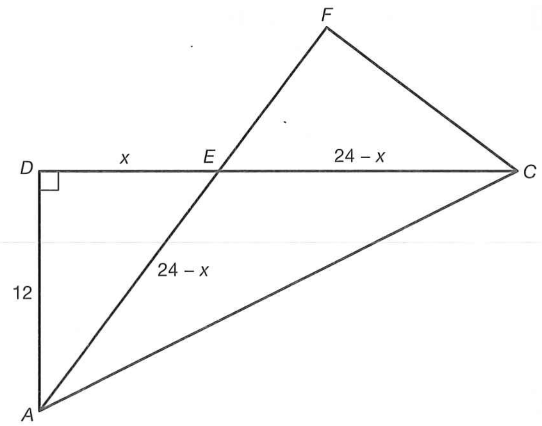
Dus de straal van het cirkeltje is $\sqrt{2} - 1$.



b Stel $DE = x$. Dan is $CE = AE = 24 - x$.
In $\triangle ACD$ is $AD^2 + DE^2 = AE^2$

$$12^2 + x^2 = (24 - x)^2$$
$$144 + x^2 = 576 - 48x + x^2$$
$$48x = 432$$
$$x = 9$$

Dus de zijde van de ruit is $24 - 9 = 15$.

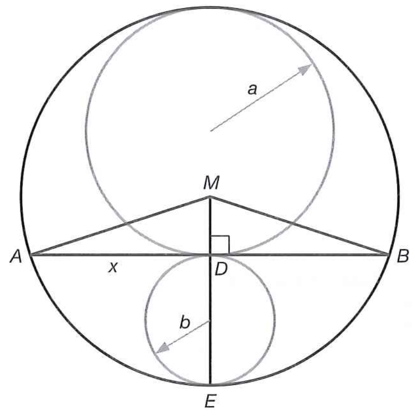


Bladzijde 173

76 Noem de straal van de grote gele cirkel a en van de kleine gele cirkel b, dan is de straal van de buitenste cirkel $\frac{2a + 2b}{2} = a + b$, dus $EM = a + b$.
De oppervlakte van het blauwe gedeelte is
$\pi(a + b)^2 - \pi a^2 - \pi b^2 = 2ab\pi$, dus $2ab\pi = 2\pi$ geeft $ab = 1$.
Zie de figuur hiernaast met M het middelpunt van de buitenste cirkel.
Stel $AD = x$.
$DM = EM - DE = a + b - 2b = a - b$
In $\triangle ADM$ is $AD^2 + DM^2 = AM^2$

$$x^2 + (a - b)^2 = (a + b)^2$$
$$x^2 + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$x^2 = 4ab$$
$$x = 2\sqrt{ab}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\sqrt{ab} \\ ab = 1 \end{array}\right\} x = 2\sqrt{1} = 2, \text{ dus } AB = 4.$$



77 **a** $CD = 6 - 2 \cdot AE$
In $\triangle AED$ is $\angle A = 60°$ en $DE = 3$, dus $AE = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.
Dus $CD = 6 - 2\sqrt{3}$.

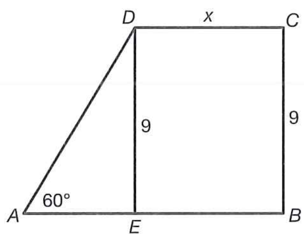
b $O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE$

$$= \tfrac{1}{2}\left(6 + 6 - 2\sqrt{3}\right) \cdot 3$$
$$= 1\tfrac{1}{2}\left(12 - 2\sqrt{3}\right)$$
$$= 18 - 3\sqrt{3}$$

Bladzijde 174

78 Stel $CD = x$, dan is $AB = AE + x$.
In $\triangle AED$ is $\angle A = 60°$ en $DE = 9$, dus $AE = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$.

$$O(ABCD) = \tfrac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE = \tfrac{1}{2}\left(x + 3\sqrt{3} + x\right) \cdot 9$$
$$= 4\tfrac{1}{2}\left(2x + 3\sqrt{3}\right)$$
$$= 9x + 13\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

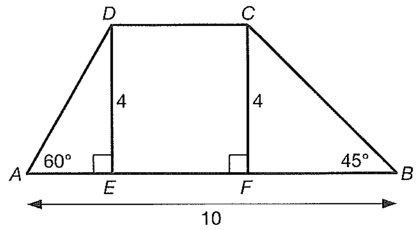


$O(ABCD) = 54$ geeft $9x + 13\frac{1}{2}\sqrt{3} = 54$

$$9x = 54 - 13\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$x = \frac{54 - 13\frac{1}{2}\sqrt{3}}{9} = 6 - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Dus $CD = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

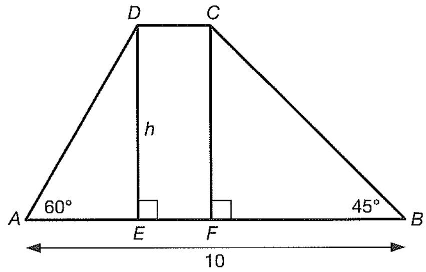
79 **a** $h = 4$ geeft $AE = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $BF = 4$.



$DC = EF = 10 - 4 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3} = 6 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$O(ABCD) = \frac{1}{2}\left(10 + 6 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \cdot 4 = 32 - 2\frac{2}{3}\sqrt{3}$

b $DE = h$ geeft $AE = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}h\sqrt{3}$ en $BF = h$.



$AE + EF + BF = 10$ geeft $\frac{1}{3}h\sqrt{3} + 2 + h = 10$

$$h\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3} + 1\right) = 8$$

$$h = \frac{8}{\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1} = \frac{24}{\sqrt{3} + 3}$$

$O(ABCD) = \frac{1}{2}(10 + 2) \cdot \frac{24}{\sqrt{3} + 3} = \frac{144}{\sqrt{3} + 3}$

c $AE = \frac{1}{3}h\sqrt{3}$ en $BF = h$.
Stel $CD = x$. Uit $AB = 10$ volgt $x = 10 - \frac{1}{3}h\sqrt{3} - h$

$$\tfrac{1}{3}h\sqrt{3} + h = 10 - x$$

$$h\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3} + 1\right) = 10 - x$$

$$h = \frac{10 - x}{\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1}$$

Uit $O(ABCD) = 25$ volgt $\frac{1}{2} \cdot (10 + x) \cdot h = 25$

$$h = \frac{50}{10 + x}$$

Dus $\frac{10 - x}{\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1} = \frac{50}{10 + x}$.

Voer in $y_1 = \frac{10 - x}{\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1}$ en $y_2 = \frac{50}{10 + x}$.
Intersect geeft $x \approx -4{,}60 \vee x \approx 4{,}60$
vold. niet vold.
Dus $CD \approx 4{,}60$.

Alternatieve oplossing
$AE = \frac{1}{3}h\sqrt{3}$, $BF = h$ en $CD = EF = 10 - \frac{1}{3}h\sqrt{3} - h$.

$O(ABCD) = \frac{1}{2}(10 + 10 - \frac{1}{3}h\sqrt{3} - h) \cdot h$

$= \frac{1}{2}h\left(20 - \frac{1}{3}h\sqrt{3} - h\right)$

$= 10h - \frac{1}{6}h^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2}h^2$

$O(ABCD) = 25$ geeft $10h - \frac{1}{6}h^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2}h^2 = 25$

Voer in $y_1 = 10x - \frac{1}{6}x^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2}x^2$ en $y_2 = 25$.
Intersect geeft $x = 3{,}425... \vee x = 9{,}254...$.

$h = 3{,}425...$ geeft $CD = 10 - \frac{1}{3} \cdot 3{,}425... \cdot \sqrt{3} - 3{,}425... \approx 4{,}60$

$h = 9{,}254...$ geeft $CD = 10 - \frac{1}{3} \cdot 9{,}254... \cdot \sqrt{3} - 9{,}254... \approx -4{,}60$ voldoet niet
Dus $CD \approx 4{,}60$.

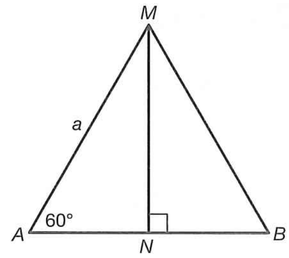
80 **a** Uit $\angle A = 60°$ en $AM = a$ volgt $AN = \frac{1}{2}a$ en $MN = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

$O(ABCDEF) = 6 \cdot O(\triangle ABM) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}a^2 \cdot \sqrt{3}$

b $O(\text{ingeschreven cirkel}) = \pi \cdot MN^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}\right)^2 = \pi \cdot \frac{1}{4}a^2 \cdot 3 = \frac{3}{4}a^2\pi$

c $O(\text{binnen zeshoek en buiten cirkel}) = O(\text{zeshoek}) - O(\text{cirkel})$
$= 1\frac{1}{2}a^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{3}{4}a^2\pi$
$O(\text{binnen zeshoek en buiten cirkel}) = 10$ geeft $1\frac{1}{2}a^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{3}{4}a^2\pi = 10$

$$a^2\left(1\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{3}{4}\pi\right) = 10$$
$$a^2 = \frac{10}{1\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\pi} = 41{,}34...$$
$$a \approx 6{,}43$$

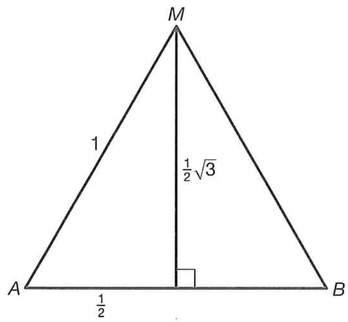


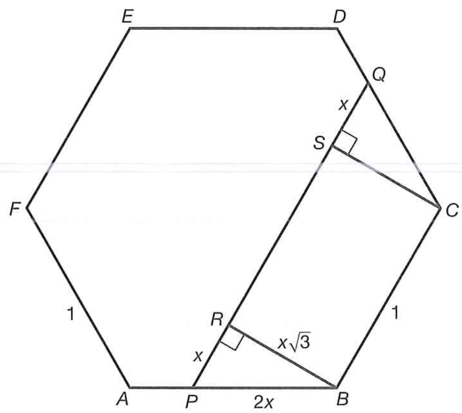
81 $O(ABCDEF) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$O(PBCQ) = \frac{1}{3} \cdot O(ABCDEF) = \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Stel $PR = x$, dan is $BR = x\sqrt{3}$.
$O(PBCQ) = \frac{1}{2}(PQ + BC) \cdot BR = \frac{1}{2}(2x + 1 + 1) \cdot x\sqrt{3}$
$= (x + 1) \cdot x\sqrt{3} = (x^2 + x)\sqrt{3}$
Dus $\frac{1}{2}\sqrt{3} = (x^2 + x)\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} = x^2 + x$
$1 = 2x^2 + 2x$
$2x^2 + 2x - 1 = 0$
$D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 12$
$x = \dfrac{-2 - \sqrt{12}}{4} = \dfrac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee x = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
voldoet niet   voldoet
$PQ = 2x + 1 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + 1 = -1 + \sqrt{3} + 1 = \sqrt{3}$





Diagnostische toets

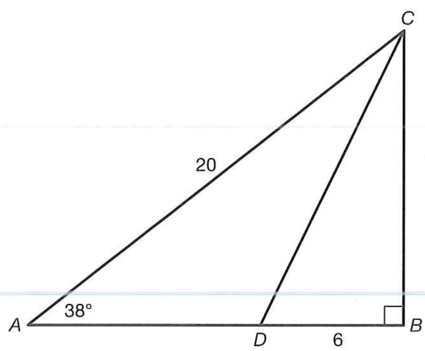
Bladzijde 176

1 In $\triangle ABC$ is $\sin(38°) = \dfrac{BC}{20}$, dus $BC = 20\sin(38°) = 12{,}31...$

In $\triangle BCD$ is $\tan(\angle BDC) = \dfrac{12{,}31...}{6}$ geeft $\angle BDC \approx 64{,}0°$.

$\angle ADC \approx 180° - 64{,}0° = 116{,}0°$

$\angle ACD \approx 180° - 116{,}0° - 38° = 26{,}0°$



2 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle ABC = \angle DBE \\ \angle CAB = \angle EDB = 90°\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DBE$

CA	AB	geeft	9	12
DE	BD		DE	8

$DE = \dfrac{9 \cdot 8}{12} = 6$

$BE = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

b $\left.\begin{array}{l}\angle ACS = \angle SDE \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle CAS = \angle SED \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ACS \backsim \triangle EDS$

$AE = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
Stel $AS = x$, dus $ES = 2\sqrt{13} - x$.

$$\begin{array}{c|c} AC & AS \\ \hline DE & ES \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 9 & x \\ \hline 6 & 2\sqrt{13} - x \end{array}$$

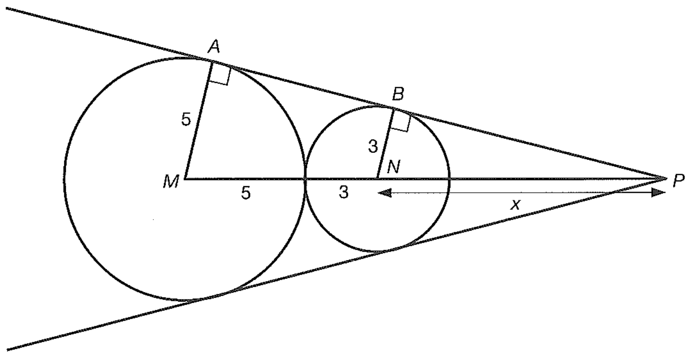
Dus $6x = 9(2\sqrt{13} - x)$
$6x = 18\sqrt{13} - 9x$
$15x = 18\sqrt{13}$
$x = 1\frac{1}{5}\sqrt{13}$
Dus $AS = 1\frac{1}{5}\sqrt{13}$.

3 $\left.\begin{array}{l}\angle APM = \angle BPN \\ \angle MAP = \angle NBP = 90°\end{array}\right\} \triangle AMP \backsim \triangle BNP$

Stel $NP = x$, dus $MP = x + 8$.

$$\begin{array}{c|c} AM & MP \\ \hline BN & NP \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 5 & x+8 \\ \hline 3 & x \end{array}$$

Dus $5x = 3(x + 8)$
$5x = 3x + 24$
$2x = 24$
$x = 12$
In $\triangle AMP$ is $AP^2 + AM^2 = MP^2$
$AP^2 = 20^2 - 5^2 = 375$
$AP = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$

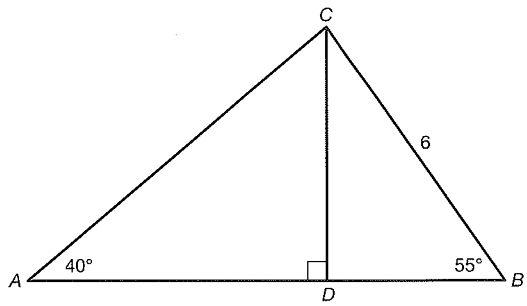


4 $\angle ACB = 180° - 40° - 55° = 85°$

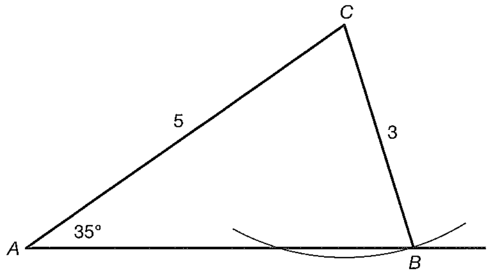
$\dfrac{6}{\sin(40°)} = \dfrac{AB}{\sin(85°)}$ geeft $AB = \dfrac{6\sin(85°)}{\sin(40°)} = 9{,}29...$

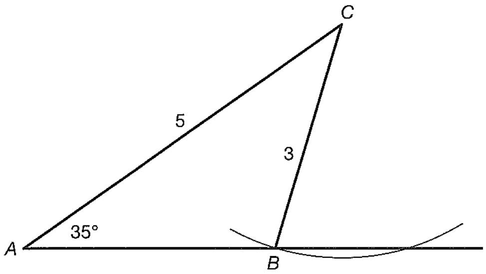
In $\triangle BCD$ is $\sin(55°) = \dfrac{CD}{6}$, dus $CD = 6\sin(55°) = 4{,}91...$

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}29... \cdot 4{,}91... \approx 22{,}85$.



5 **a**



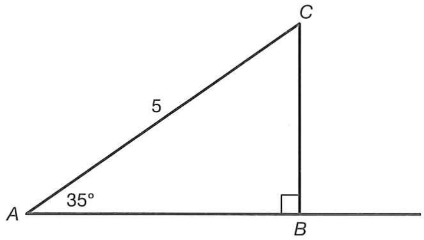


$\dfrac{3}{\sin(35°)} = \dfrac{5}{\sin(\beta)}$ geeft $\sin(\beta) = \dfrac{5\sin(35°)}{3}$

$\beta \approx 72{,}9°$

In de stomphoekige driehoek is $\beta \approx 180° - 72{,}9° = 107{,}1°$.
Dus $\gamma \approx 180° - 72{,}9° - 35° = 72{,}1°$ of $\gamma \approx 180° - 107{,}1° - 35° = 37{,}9°$.

b



$\sin(35°) = \dfrac{BC}{5}$ geeft $BC = 5\sin(35°) \approx 2{,}87$

Er is slechts één driehoek mogelijk voor $a \approx 2{,}87 \vee a \geq 5$.

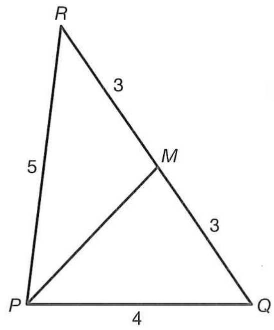
6 **a** $5^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos(\angle Q)$

$48\cos(\angle Q) = 52 - 25$

$\cos(\angle Q) = \dfrac{27}{48}$

$\angle Q \approx 55{,}8°$

b $PM^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(55{,}77...°) = 11{,}5$ geeft $PM \approx 3{,}39$.



7 **a** In $\triangle ABD$ is $8^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos(\angle ABD)$

$300\cos(\angle ABD) = 325 - 64$

$\cos(\angle ABD) = \dfrac{261}{300}$

$\angle ABD = 29{,}54...°$

In $\triangle BDE$ is $\sin(29{,}54...°) = \dfrac{DE}{10}$

$DE = 10\sin(29{,}54...°) = 4{,}93...$

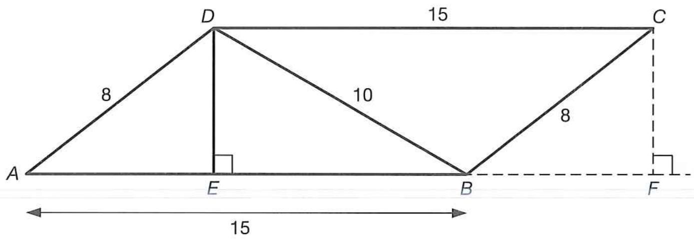
$O(ABCD) = 15 \cdot 4{,}93... \approx 73{,}96$

b $BF = \sqrt{8^2 - 4{,}93...^2} = 6{,}3$

In $\triangle AFC$ is $AC^2 = AF^2 + CF^2$

$AC = \sqrt{21{,}3^2 + 4{,}93...^2}$

$AC \approx 21{,}9$



Bladzijde 177

8 $8^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos(\angle CAB)$

$108\cos(\angle CAB) = 117 - 64$

$\cos(\angle CAB) = \dfrac{53}{108}$

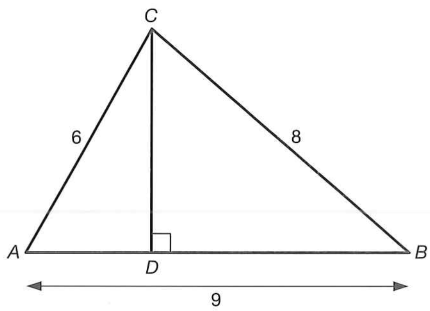
$\angle CAB = 60{,}61...°$

In $\triangle ADC$ is $\sin(60{,}61...°) = \dfrac{CD}{6}$, dus $CD = 6\sin(60{,}61...°) = 5{,}22...$

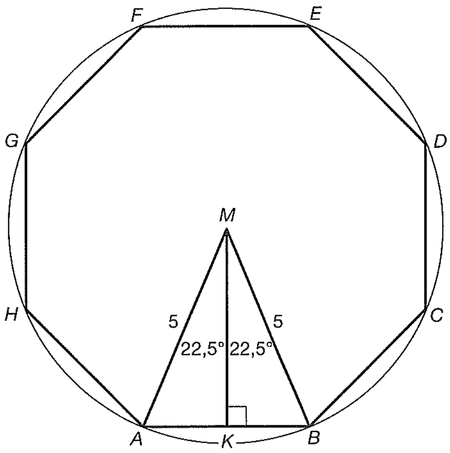
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 5{,}22... = 23{,}52...$

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$, dus de oppervlakte van het vlakdeel dat binnen de driehoek maar buiten de cirkels ligt is

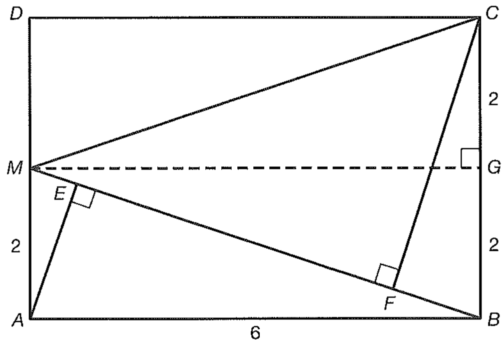
$23{,}52... - \dfrac{180}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 \approx 9{,}39.$



9 $O(\text{omgeschreven cirkel}) = 25\pi$ geeft $\pi r^2 = 25\pi$, dus $r = 5$.
$\angle AMB = \frac{360°}{8} = 45°$, dus $\angle AMK = \angle BMK = 22{,}5°$.
In $\triangle AKM$ is $\sin(22{,}5°) = \frac{AK}{5}$, dus $AK = 5\sin(22{,}5°) = 1{,}91...$
De omtrek van de achthoek is $16 \cdot 1{,}91... \approx 30{,}6$.
De oppervlakte van de achthoek is $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin(45°) \approx 70{,}7$.



10 $BM = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABM$ geeft
$BM \times AE = AB \times AM$
$2\sqrt{10} \cdot AE = 6 \cdot 2$
$AE = \frac{6 \cdot 2}{2\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{6}{10}\sqrt{10} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$
Zie de figuur hiernaast.
De zijde × hoogte-methode in $\triangle BCM$ geeft
$BM \times CF = BC \times GM$
$2\sqrt{10} \cdot CF = 4 \cdot 6$
$CF = \frac{4 \cdot 6}{2\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{12}{10}\sqrt{10} = 1\frac{1}{5}\sqrt{10}$

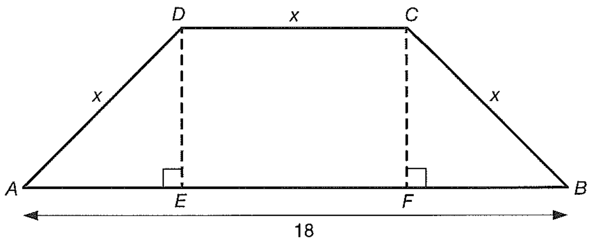


11 In $\triangle ABC$ is $AC = 12$ en $\angle ACB = 45°$, dus $AB = BC = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12}{2}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

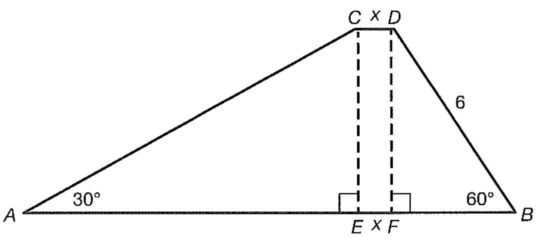
In $\triangle ABD$ is $AB = 6\sqrt{2}$ en $\angle BAD = 30°$, dus $BD = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{3}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

$O(\triangle ACD) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \left(6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right) \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot \left(6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right)$
$= 36 - 6\sqrt{12} = 36 - 6\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 36 - 12\sqrt{3}$

12 Stel $AD = x$. Dan is $BC = CD = x$.
$AE = BF = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{2}$.
$AB = AE + EF + BF = \frac{1}{2}x\sqrt{2} + x + \frac{1}{2}x\sqrt{2} = x\sqrt{2} + x$
$AB = 18$ geeft $x\sqrt{2} + x = 18$
$x(\sqrt{2} + 1) = 18$
$x = \frac{18}{\sqrt{2} + 1}$
Dus $AD = \frac{18}{\sqrt{2} + 1}$.



13 In $\triangle BDF$ is $\angle B = 60°$ en $BD = 6$, dus $BF = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ en $DF = 3\sqrt{3}$.
In $\triangle AEC$ is $\angle A = 30°$ en $CE = DF = 3\sqrt{3}$, dus $AE = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 9$.
Stel $CD = EF = x$ geeft $O(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (9 + x + 3 + x) \cdot 3\sqrt{3}$
$= (6 + x) \cdot 3\sqrt{3}$
$O(ABCD) = 36$, dus $(6 + x) \cdot 3\sqrt{3} = 36$
$6 + x = \frac{36}{3\sqrt{3}}$
$x = \frac{12}{\sqrt{3}} - 6 = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 6 = \frac{12}{3}\sqrt{3} - 6 = 4\sqrt{3} - 6$
Dus $AB = 9 + 4\sqrt{3} - 6 + 3 = 6 + 4\sqrt{3}$.



Wiskunde Olympiade

2006

A-vragen

Bladzijde 180

1 Ali heeft om te beginnen $\frac{11}{24}$ deel van al het geld. Aan het eind heeft Ali $\frac{4}{9}$. Om de verhoudingen te kunnen vergelijken zorgen we ervoor dat de breuken dezelfde noemer krijgen, in dit geval is dat 72. Ali ging van $\frac{33}{72}$ naar $\frac{32}{72}$ van het totaal. Bente bleef op $\frac{24}{72}$ van het totaal en Chris ging van $\frac{15}{72}$ naar $\frac{16}{72}$.
Dus antwoord D is het goede antwoord.

2 In de linker driehoek is de derde hoek gelijk aan $180 - 7x$ graden. In de rechter driehoek is de derde hoek gelijk aan $180 - 13x$ graden. De beide basishoeken van de middelste driehoek zijn elk gelijk aan een van die hoeken. Dus moet gelden: $5x + (180 - 7x) + (180 - 13x) = 180$ dus $15x = 180$ en dus $x = 12$.
Dus antwoord D is het goede antwoord.

3 De getallen 1 t/m 9 achter elkaar zijn negen cijfers. De getallen 10 t/m 99 achter elkaar zijn 90 getallen van twee cijfers, dus in totaal 180 cijfers. Samen zijn dat 189 cijfers. $1788 - 189 = 1599$.
Er zijn dus $\dfrac{1599}{3} = 533$ getallen van drie cijfers opgeschreven, te beginnen met 100.
Dus $n = 99 + 533 = 632$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

4 $6 = 0 + 0 + 6 = 0 + 1 + 5 = 0 + 2 + 4 = 0 + 3 + 3 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2$
Met 0, 0 en 6 kunnen we drie getallen maken, 600, 60 en 6, waarbij nullen aan het begin weggelaten zijn. Zo ook drie getallen met 0, 3 en 3 en ook met 1, 1 en 4 . Met 0, 1 en 5 kunnen we zes getallen maken; ook met 0, 2 en 4 en ook met 1, 2 en 3. Met 2, 2 en 2 kunnen we alleen het getal 222 maken.
In totaal dus $3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 1 = 28$.
Dus antwoord D is het goede antwoord.

5 Vergelijk de linker kolom met de diagonaal waarin 10 staat. In het middelste vakje (onder de N) moet 13 staan omdat moet gelden $13 + 10 = 12 + 11$. Elke rij, kolom of diagonaal is dus in totaal $11 + 13 + 15 = 39$. Midden onder moet 17 staan omdat $39 - (12 + 10) = 17$. Dus $N = 39 - 13 - 17 = 9$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

6 Door de cijfers 1, 2, 3 en 4 precies één keer te gebruiken kun je 24 verschillende getallen maken. Als je die onder elkaar zet dan heb je op de plaats van de eenheden elk van de vier cijfers 1, 2, 3 en 4 precies zes keer. Dat levert opgeteld 60. Op de plaats van de 10-tallen komen de 1, 2, 3 en 4 ook precies zes keer voor. Dat levert een bijdrage van 600 aan de som. Evenzo voor de plaats van de 100- en 1000-tallen. De cijfers op de plaats van de 100-tallen dragen dus 6000 bij en de cijfers op de plaats van de 1000-tallen 60000.
Totaal: 66660.
Dus antwoord E is het goede antwoord.

Bladzijde 181

7 Om het verschil van twee breuken – weer als breuk geschreven – zo klein mogelijk te maken moet de noemer zo groot mogelijk en de teller zo klein mogelijk zijn. De noemer kan maximaal 90 worden, de noemer van de ene breuk is dan 10 en de andere noemer is 9. De teller is minimaal 1. Die waarden worden aangenomen bij $\frac{1}{9} - \frac{1}{10}$ en bij $\frac{9}{10} - \frac{8}{9}$ en is dus $\frac{1}{90}$.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

8 $\angle PRB = 90° - \frac{1}{2}\angle B$ en $\angle QRA = 90° - \frac{1}{2}\angle A$

$\angle PRQ = 180° - \angle PRB - \angle QRA$

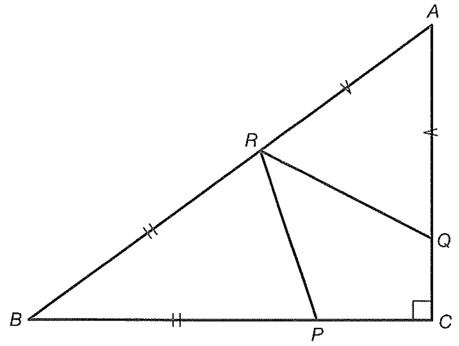
$= 180° - (90° - \frac{1}{2}\angle B) - (90° - \frac{1}{2}\angle A)$

$= \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle A$

$= \frac{1}{2}(\angle B + \angle A)$

$= \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$

Dus antwoord B is het goede antwoord.



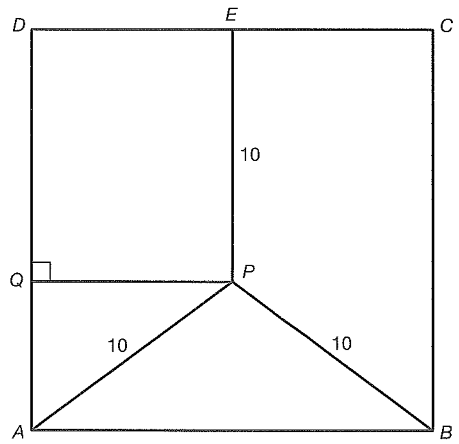
B-vragen

1 Vanuit A heb je twee mogelijkheden: òf naar B òf naar D. Vanuit B (en ook vanuit D) heb je voor de volgende beurt weer twee mogelijkheden òf naar A òf naar C (ook vanuit D weer naar A of naar C). Vanuit A (en ook vanuit C) heb je voor de derde beurt weer twee mogelijkheden: naar B of naar D (ook weer naar B of D vanuit C). Bij elke stap dus twee mogelijkheden. Na 9 stappen ben je in B of D. Voor de tiende stap heb je dan maar één mogelijkheid naar A òf vanuit B òf vanuit D. In totaal dus $2^9 = 512$ verschillende wandelingen.

2 De vier cijfers van het getal moeten een rekenkundige rij vormen. We tellen het aantal systematisch:
- eerst de getallen 1111, 2222, … , 9999. Dat zijn er negen.
- dan de getallen 1234, 2345, 3456, … , 6789 en 9876, 8765, … , 4321, 3210. Dat zijn er dertien.
- vervolgens de getallen 1357, 2468, 3579 en 9753, 8642, 7531, 6420. Dat zijn er zeven.
- vervolgens alleen nog het getal 9630.

In totaal dus $9 + 13 + 7 + 1 = 30$.

3 Q is de loodrechte projectie van P op de zijde AD.
Dan $AQ^2 + PQ^2 = AP^2 = 100$. $ABCD$ is een vierkant,
dus $2PQ = AQ + 10$ ofwel $AQ = 2PQ - 10$.
Dus $(2PQ - 10)^2 + PQ^2 = 5PQ^2 - 40PQ + 100 = 100$.
Dus $PQ = 8$, de zijde van het vierkant is 16 en de oppervlakte 256.



4 $\overline{ab}$ is te schrijven als $10a + b$, dus $\overline{ab} = K \times (a + b)$

$10a + b = Ka + Kb$

$10a - Ka = Kb - b$

$(10 - K) \cdot a = (K - 1) \cdot b$

Omdat K positief en geheel moet zijn, hoeven we alleen de waarden 1 t/m 10 voor K te onderzoeken.
Verder moet natuurlijk gelden dat $1 \leq a \leq 9$ en $0 \leq b \leq 9$.
Als $K = 1$ dan is $a = 0$, en dat mag niet. Dus $K = 1$ voldoet niet.
Als $K = 2$ dan is $8 \cdot a = b$ en dan $a = 1, b = 8$ en $\overline{ab} = 18$, dus deelbaar door 9. Dus $K = 2$ voldoet niet.
Als $K = 3$ dan is $7 \cdot a = 2 \cdot b$ dus $a = 2, b = 7$ en $\overline{ab} = 27$, dus deelbaar door 9. Dus $K = 3$ voldoet niet.
Als $K = 4$ dan is $6 \cdot a = 3 \cdot b$ dus $a = 1, b = 2$ en $\overline{ab} = 12$ of $a = 2, b = 4$ en $\overline{ab} = 24$. 12 en 24 zijn niet deelbaar door 9. Dus $K = 4$ voldoet.
Als $K = 5$ dan is $5 \cdot a = 4 \cdot b$ dus $a = 4$, $b = 5$ en $\overline{ab} = 45$ en dat is deelbaar door 9. Dus $K = 5$ voldoet niet.
Als $K = 6$ dan is $4 \cdot a = 5 \cdot b$ dus $a = 5$, $b = 4$ en $\overline{ab} = 54$ en dat is deelbaar door 9. Dus $K = 6$ voldoet niet.
Als $K = 7$ dan is $3 \cdot a = 6 \cdot b$ dus $a = 2, b = 1$ en $\overline{ab} = 21$ of $a = 4, b = 2$ en $\overline{ab} = 42$.
21 en 42 zijn niet deelbaar door 9. Dus $K = 7$ voldoet.
Als $K = 8$ dan alleen $\overline{ab} = 72$ en dat is deelbaar door 9. Dus 8 voldoet niet.
Als $K = 9$ dan alleen $\overline{ab} = 81$ en dat is deelbaar door 9. Dus 9 voldoet niet.
Als $K = 10$ dan is $b = 0$. Dat geeft wel oplossingen, bijvoorbeeld $30 = 10 \cdot (3 + 0)$. Dus $K = 10$ voldoet.
Dus 4, 7 en 10 zijn mogelijke waarden voor K.

2007

A-vragen

Bladzijde 182

1 Als M uit vier enen bestaat dan is $2007 \cdot M = 2229777$, dus de som van de cijfers is $3 \cdot (2 + 7) + 9 = 4 \cdot 9$.
Als M uit vijf enen bestaat dan is $2007 \cdot M = 22299777$; de som van de cijfers is dan $3 \cdot (2 + 7) + 9 + 9 = 5 \cdot 9$.
Als M uit 2007 enen bestaat dan is de som van de cijfers $2007 \cdot 9 = 18063$.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

2 Je hoeft hier de noemers niet gelijknamig te maken om de breuken te vergelijken. Je kunt de noemers allemaal dicht bij de 100 kiezen: $0{,}16 = \frac{16}{100}, \frac{1}{7} = \frac{14}{98}, \frac{5}{33} = \frac{15}{99}$.
Omdat bij $k < n$ geldt $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n+1}$, immers $\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n(n+1)} > 0$, vinden we $\frac{13}{97} < \frac{14}{98} < \frac{15}{99} < \frac{16}{100} < \frac{17}{101}$.
Dus antwoord E is het goede antwoord.

3 Uit de negen punten kun je op $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ manieren drie punten kiezen. Maar als drie punten op één lijn liggen, dan levert dat geen driehoek op. Dat komt acht keer voor, drie keer horizontaal, drie keer verticaal en twee keer diagonaal. Dus $84 - 8 = 76$ mogelijkheden.
Dus antwoord A is het goede antwoord.

4 $a + \frac{1}{b} = 13 \cdot \left(b + \frac{1}{a}\right)$ geeft $\frac{ab+1}{b} = 13 \cdot \frac{ba+1}{a}$ dus $a = 13b$ en dus zeven paren $(13, 1), (26, 2), \ldots, (91, 7)$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

5 Route **A** is langer dan route **B** want $\sqrt{5} > 2$. Dus **A** valt af. Route **E** is langer dan route **A**, want $\sqrt{5} > 1$, dus **E** valt af. Route **D** is langer dan route **B** want $\sqrt{13} > \sqrt{10}$. Dus **D** valt af. Route **C** en route **B** hebben een stuk met lengte $\sqrt{5}$ en een stuk met lengte 2 gemeenschappelijk. Blijft over te vergelijken de rest van **C**, $2\sqrt{5}$ en de rest van **B**, $1 + \sqrt{10}$. $\sqrt{10} + 1 < 2\sqrt{5}$, dus route **B** is het kortst.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

6 We vervolgen de rij met alleen de laatste cijfers van de getallen: we vinden 2, 2, 4, 8, ..2, ..6, ..2, ..2, ..4, ..8, ..2, ..6, ..2, enz. We zien dat een groep van zes cijfers zich telkens herhaalt.
Omdat $2007 = 334 \cdot 6 + 3$ is het laatste cijfer van het 2007^e getal gelijk aan dat van het derde getal, dus 4.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

Bladzijde 183

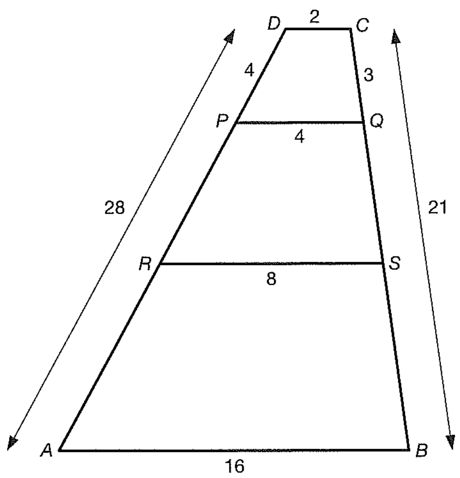
7 $9^n + 9^n + 9^n = 3 \cdot 9^n = 3 \cdot 3^{2n} = 3^{2n+1}$. Dus $n = 1003$.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

8 Laat in gedachten eerst de zes leerlingen een stoel pakken en op een rij gaan zitten. Vervolgens kiezen de leraren met hun stoel een plaats tussen de leerlingen. De heer Aap kan dan zijn stoel op vijf plaatsen tussen de zes leerlingen neerzetten en gaan zitten. De heer Noot kan daarna zijn stoel op vier plaatsen neerzetten en gaan zitten en voor mevrouw Mies zijn er dan nog drie plaatsen over.
Het aantal mogelijkheden is dus $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

B-vragen

1 Ga uit van het ongunstigste geval. Dan pak je alle kaartjes met een 1 t/m een 9 en dat zijn er 45. Van alle andere kaartjes, met nummers 10 t/m 50, pak je er telkens negen met hetzelfde nummer. Dat zijn er $41 \cdot 9 = 369$. Je hebt dan in totaal al $45 + 369 = 414$ kaartjes gepakt. Als je $414 + 1 = 415$ kaartjes pakt, dan moeten er dus ten minste tien bij zijn met hetzelfde nummer.

2 Zie de figuur hiernaast.
De drie vierhoeken $ABSR$, $RSQP$ en $PQCD$ zijn gelijkvormig.
Daarom geldt: $\frac{DC}{PQ} = \frac{PQ}{RS} = \frac{RS}{AB}$ geeft $\frac{2}{PQ} = \frac{PQ}{RS} = \frac{RS}{16}$ dus
$PQ^2 = 2 \cdot RS$ en $RS^2 = 16 \cdot PQ$ geeft $PQ^3 = 64$, dus $PQ = 4$ en $RS = 8$.
De zijden van vierhoek $RSQP$ zijn dus twee maal zo lang als de overeenkomstige zijden van vierhoek $PQCD$ en de zijden van vierhoek $ABSR$ zijn weer twee maal zo lang als de overeenkomstige zijden van vierhoek $RSQP$.
$PR = 2 \cdot DP$ en $AR = 2 \cdot PR = 4 \cdot DP$, dus $AD = 7 \cdot DP$, dus $DP = 4$.
Evenzo vind je $CQ = 3$.
De gevraagde omtrek van vierhoek $PQCD$ is $4 + 4 + 2 + 3 = 13$.



3 $8 \otimes 5 = (5 + 3) \otimes 5, \frac{5 \otimes (5 + 3)}{5 \otimes 3} = \frac{5 + 3}{3} = \frac{8}{3}$ en $8 \otimes 5 = \frac{8}{3} \cdot (5 \otimes 3)$

$5 \otimes 3 = (3 + 2) \otimes 3, \frac{3 \otimes (3 + 2)}{3 \otimes 2} = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2}$ en $5 \otimes 3 = \frac{5}{2} \cdot (3 \otimes 2)$

$3 \otimes 2 = (2 + 1) \otimes 2, \frac{2 \otimes (2 + 1)}{2 \otimes 1} = \frac{2 + 1}{1} = 3$ en $3 \otimes 2 = 3 \cdot (2 \otimes 1)$

$2 \otimes 1 = (1 + 1) \otimes 1, \frac{1 \otimes (1 + 1)}{1 \otimes 1} = \frac{1 + 1}{1} = 2$ en $2 \otimes 1 = 2 \cdot (1 \otimes 1)$. $1 \otimes 1 = 1 + 2 = 3$, dus

$2 \otimes 1 = 2 \cdot 3 = 6$, dus $3 \otimes 2 = 3 \cdot 6 = 18$, dus $5 \otimes 3 = \frac{5}{2} \cdot 18 = 45$, dus $8 \otimes 5 = \frac{8}{3} \cdot 45 = 120$.

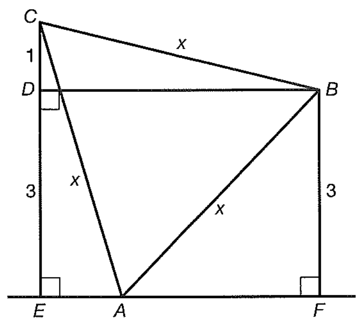
4 Noem de lengte van de zijden van de gelijkzijdige driehoek x.
Zie de figuur hiernaast.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = BD^2 + 1 \\ BD = EA + AF \\ x^2 = EA^2 + 4^2 \text{ geeft } EA = \sqrt{x^2 - 16} \\ x^2 = AF^2 + 3^2 \text{ geeft } AF = \sqrt{x^2 - 9} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 = \left(\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9}\right)^2 + 1 \\ x^2 = 2x^2 - 25 + 2\sqrt{x^2 - 16} \cdot \sqrt{x^2 - 9} + 1 \\ -x^2 + 24 = 2\sqrt{x^2 - 16} \cdot \sqrt{x^2 - 9} \end{array}$$

kwadrateren geeft

$$x^4 - 48x^2 + 576 = 4(x^4 - 25x^2 + 144)$$
$$3x^4 - 52x^2 = 0$$
$$\underset{\text{vold. niet}}{x = 0} \quad \vee \quad \underset{\text{vold.}}{x = \sqrt{\frac{52}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{39}}$$

Dus de lengte van de zijde van de vlag is $\frac{2}{3}\sqrt{39}$.



2008

A-vragen

Bladzijde 184

1 Als we de gegevens in een tabel zetten, zien we dat de lootjes van Birgit en Cedric nog over zijn. Nu trekt Ersin niet het lootje van Cedric, dus wel dat van Birgit. Dus trekt Alex juist het lootje van Cedric.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

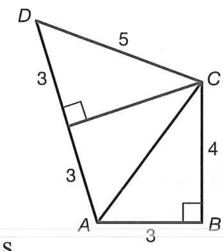
A	B	C	D	E
?	A	D	E	?

2 Zie de tabel.
Uit $F + 10 + 3 = F + D + 7$ volgt $D = 6$.
Uit $7 + E + 3 = C + D + E = C + 6 + E$ volgt $C = 7 + 3 - 6 = 4$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

A	B	7
C	D	E
F	10	3

3 Het getal 720 bevat alleen de priemfactoren 2, 3 en 5. Het priemgetal 2 komt viermaal voor (eenmaal in 2, tweemaal in 4 en eenmaal in 6), het priemgetal 3 tweemaal (in 3 en in 6) en 5 eenmaal. De delers zonder factor 3 en 5 zijn 1, 2, 4, 8 en 16. De delers met één factor 3 en geen factor 5 zijn 3, 6, 12, 24 en 48. Met factor 9 en geen factor 5: 9, 18, 36, 72 en 144. Zonder de factor 5 zijn er dus 15 delers. Deze 15 delers geven elk vermenigvuldigd met 5 de resterende 15 delers. In totaal 30 delers.
Dus antwoord D is het goede antwoord.

4 Volgens de stelling van Pythagoras is $|AC| = 5$. Driehoek ACD is dus gelijkbenig met top C. In deze driehoek verdeelt de hoogtelijn uit C de driehoek in twee driehoeken met zijden 3, 4 en 5. Vierhoek $ABCD$ is dus op te delen in drie driehoeken met zijden 3, 4 en 5. De gevraagde oppervlakte is dus $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 18$.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

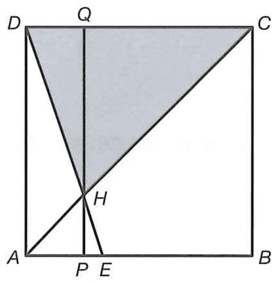


5 Als x een positief veelvoud van 6 is dat eindigt op een 4 (zoals 24), dan eindigen de eerstvolgende veelvouden van 6 op een 0 ($x + 6$), een 6 ($x + 12$), een 2 ($x + 18$), een 8 ($x + 24$), een 4 ($x + 30$), dus het eerstvolgende veelvoud van 6 dat weer op een 4 eindigt is $x + 30$. Bij elke groep van dertig opeenvolgende getallen zit dus precies één veelvoud van 6 dat op een 4 eindigt.
Omdat in totaal 90 000 getallen liggen tussen 10 000 en 99 999, zijn er onder deze getallen $90\,000 : 30 = 3000$ zulke zesvouden eindigend op een 4.
Dus antwoord C is het goede antwoord.

6 Trek een lijn door H evenwijdig aan AD.
Noem de snijpunten van deze lijn met AB en CD respectievelijk P en Q.

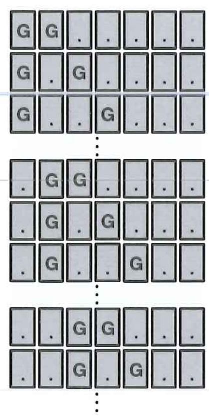
Nu geldt $\dfrac{|HP|}{|HQ|} = \dfrac{|AE|}{|CD|} = \dfrac{1}{3}$, dus $|HQ| = \frac{3}{4} \cdot |PQ| = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$.

De oppervlakte van driehoek CDH is dus $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$.
Dus antwoord E is het goede antwoord.



Bladzijde 185

7 Voor de twee G-blokjes zijn er $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ mogelijkheden om op de 7 plaatsen gelegd te worden (zie figuur). Bij elke keuze zijn er voor de twee N-blokjes $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ mogelijkheden; daarna liggen de drie E-blokjes vast. In totaal dus $21 \cdot 10 = 210$.
Dus antwoord A is het goede antwoord.



8 $((x^2 - 2)^2 - 5)^2 = 1$
$(x^2 - 2)^2 - 5 = 1 \vee (x^2 - 2)^2 - 5 = -1$
$(x^2 - 2)^2 = 6 \vee (x^2 - 2)^2 = 4$
$x^2 - 2 = \sqrt{6} \vee x^2 - 2 = -\sqrt{6} \vee x^2 - 2 = 2 \vee x^2 - 2 = -2$
twee opl. geen opl. twee opl. één opl.
Dus in totaal $2 + 0 + 2 + 1 = 5$ oplossingen.
Dus antwoord B is het goede antwoord.

B-vragen

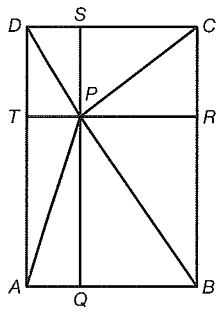
1 In de eerste kolom komen van boven naar beneden achtereenvolgens te liggen
$1 \cdot 1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 3, \ldots 1 \cdot 8$ graankorrels.
In totaal dus in de eerste kolom: $1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
In de tweede kolom liggen er: $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
In de derde kolom liggen er: $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
.
.
.
In de achtste kolom ten slotte: $8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
Totaal dus: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
Omdat $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ zijn er in totaal dus $36^2 = 1296$ graankorrels.

2 Als je alle 50 oneven getallen uit de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ pakt dan zijn die bij elkaar opgeteld $\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (1 + 99) = 2500$. Dat is 400 te weinig. Vervang dus de kleinste oneven getallen door de grootst mogelijke even getallen, telkens per twee omdat 400 even is. Als we 1 en 3 vervangen door 100 en 98 krijgen we 2694. Daarna $2694 - 5 - 7 + 96 + 94 = 2872$. We moeten dus nog ten minste één zo'n stap doen. En die lukt: $2872 - 9 - 11 = 2852$, dus plaats bijvoorbeeld 20 en 28 terug; dan hebben we som 2900 gevonden met 6 even getallen en bovendien hebben we laten zien dat het met minder niet lukt.
Het antwoord is dus 6.

3 Uit $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$ volgt dat

$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 5^3 - 3 \cdot 5 = 110$, dus $n = 110$.

4 Zie de figuur hiernaast.
$|AQ|^2 + |QP|^2 = 36$ en $|BQ|^2 + |SP|^2 = 25$ (want $|BQ| = |CS|$),
Dus $|AQ|^2 + |QP|^2 + |BQ|^2 + |SP|^2 = 61$. Verder $|BQ|^2 + |QP|^2 = 49$.
Dus $|DS|^2 + |SP|^2 = |AQ|^2 + |SP|^2 = 61 - 49 = 12$ en $|DP| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.



Gemengde opgaven

1 Functies en grafieken

Bladzijde 186

1 Stel k: $y = ax + b$.

$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4-2}{7-2} = \frac{2}{5}$

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } A(2, 2) \end{array}\right\} \frac{2}{5} \cdot 2 + b = 2$

$\frac{4}{5} + b = 2$

$b = 1\frac{1}{5}$, dus k: $y = \frac{2}{5}x + 1\frac{1}{5}$.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = ax + 11 \\ \text{door } B(7, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 7 + 11 = 4 \\ 7a = -7 \end{array}$

$a = -1$, dus l: $y = -x + 11$.

$\left.\begin{array}{l} m\text{: } y = 2x + b \\ \text{door } A(2, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + b = 2 \\ 4 + b = 2 \end{array}$

$b = -2$, dus m: $y = 2x - 2$.

Snijpunt berekenen van l en m.

$-x + 11 = 2x - 2$

$-3x = -13$

$x = \dfrac{-13}{-3} = 4\frac{1}{3}$ geeft $y = -4\frac{1}{3} + 11 = 6\frac{2}{3}$, dus $C\left(4\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3}\right)$.

m snijden met de x-as, $y = 0$ geeft $2x - 2 = 0$

$2x = 2$

$x = 1$, dus $D(1, 0)$.

l snijden met de x-as, $y = 0$ geeft $-x + 11 = 0$

$-x = -11$

$x = 11$, dus $E(11, 0)$.

P is het midden van DE dus $P(6, 0)$.

Stel n: $y = ax + b$.

$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6\frac{2}{3} - 0}{4\frac{1}{3} - 6} = \dfrac{6\frac{2}{3}}{-1\frac{2}{3}} = -4$

$\left.\begin{array}{l} y = -4x + b \\ \text{door } P(6, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 6 + b = 0 \\ -24 + b = 0 \end{array}$

$b = 24$, dus n: $y = -4x + 24$.

Snijpunt berekenen van k en n.

$\frac{2}{5}x + 1\frac{1}{5} = -4x + 24$

$4\frac{2}{5}x = 22\frac{4}{5}$

$x = 5\frac{2}{11}$, geeft $y = -4 \cdot 5\frac{2}{11} + 24 = 3\frac{3}{11}$, dus $\left(5\frac{2}{11}, 3\frac{3}{11}\right)$.

2 **a** Stel $H = at + b$.

$\left.\begin{array}{l} t = -5 \text{ en } H = 485 \\ t = 20 \text{ en } H = 200 \end{array}\right\} a = \dfrac{\Delta H}{\Delta t} = \dfrac{200 - 485}{20 - -5} = -11{,}4$

$\left.\begin{array}{l} H = -11{,}4t + b \\ \text{door } (20, 200) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -11{,}4 \cdot 20 + b = 200 \\ -228 + b = 200 \end{array}$

$b = 428$

Dus $H = -11{,}4t + 428$.

b Stel $K = at + b$.

$$\left.\begin{array}{l} t = \text{-}2 \text{ en } K = 253 \\ t = 20 \text{ en } K = 220 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{220 - 253}{20 - \text{-}2} = \text{-}1{,}5$$

$$\left.\begin{array}{l} K = \text{-}1{,}5t + b \\ \text{door } (20, 220) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{-}1{,}5 \cdot 20 + b = 220 \\ \text{-}30 + b = 220 \\ b = 250 \end{array}$$

Dus $K = \text{-}1{,}5t + 250$.

c Stel $N = at + b$.

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \text{ en } N = 15{,}0 \\ t = 20 \text{ en } N = 16{,}7 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{16{,}7 - 15{,}0}{20} = 0{,}085$$

$$\left.\begin{array}{l} N = 0{,}085t + b \\ \text{door } (0;\ 15{,}0) \end{array}\right\} b = 15$$

Dus $N = 0{,}085t + 15$.

d $\text{-}1{,}5t + 250 = \text{-}11{,}4t + 428$

$9{,}9t = 178$

$t \approx 18$

Dus in het jaar 2008.

e N is in miljoenen, dus $10N$ is in honderdduizendtallen.

$A = H \cdot 10N$

$= (\text{-}11{,}4t + 428) \cdot 10(0{,}085t + 15)$

$= (\text{-}11{,}4t + 428) \cdot (0{,}85t + 150)$

$= \text{-}9{,}69t^2 - 1710t + 363{,}8t + 64\,200$

$= \text{-}9{,}69t^2 - 1346{,}2t + 64\,200$

Dus $a = \text{-}9{,}69$, $b = \text{-}1346{,}2$ en $c = 64\,200$.

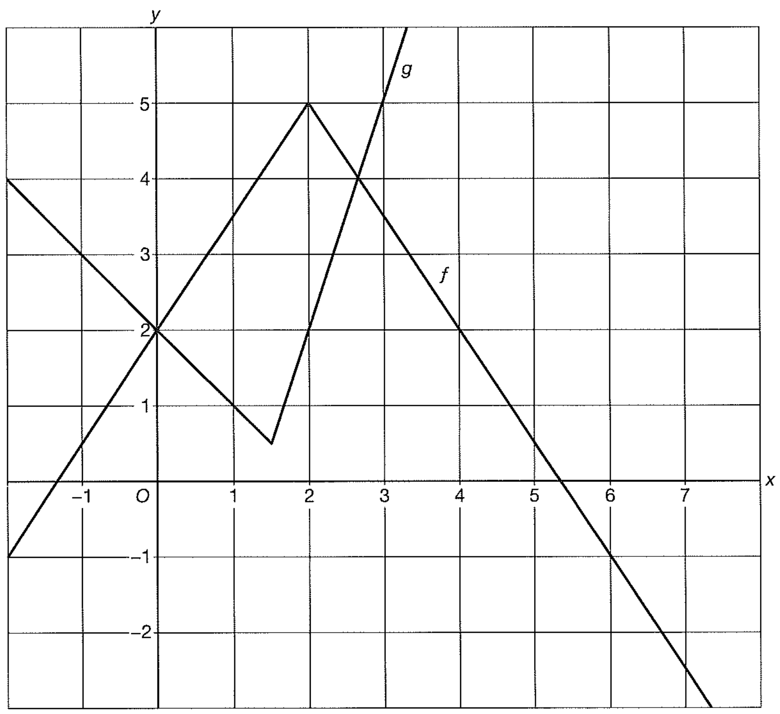
Bladzijde 187

3 **a** $f(x) = 5 - \left|1\tfrac{1}{2}x - 3\right| = 5 - 1\tfrac{1}{2}x + 3 = \text{-}1\tfrac{1}{2}x + 8$ als $1\tfrac{1}{2}x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 2$ en

$f(x) = 5 - \left|1\tfrac{1}{2}x - 3\right| = 5 + 1\tfrac{1}{2}x - 3 = 1\tfrac{1}{2}x + 2$ als $1\tfrac{1}{2}x - 3 < 0$, dus als $x < 2$.

$g(x) = x - 1 + |2x - 3| = x - 1 + 2x - 3 = 3x - 4$ als $2x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 1\tfrac{1}{2}$ en

$g(x) = x - 1 + |2x - 3| = x - 1 - 2x + 3 = \text{-}x + 2$ als $2x - 3 < 0$, dus als $x < 1\tfrac{1}{2}$.



b $\text{-}x + 2 = 1\tfrac{1}{2}x + 2$

$\text{-}2\tfrac{1}{2}x = 0$

$x = 0$

$x = 0$ geeft $f(0) = 1\tfrac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$

$-1\frac{1}{2}x + 8 = 3x - 4$

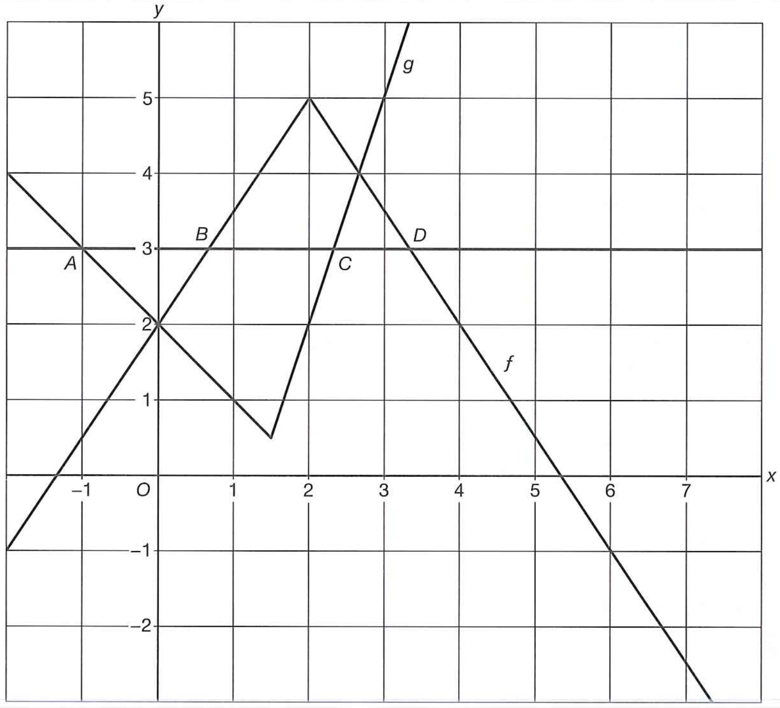
$-4\frac{1}{2}x = -12$

$x = \dfrac{-12}{-4\frac{1}{2}} = 2\frac{2}{3}$

$x = 2\frac{2}{3}$ geeft $g\left(2\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot 2\frac{2}{3} - 4 = 4$

Dus de snijpunten zijn $(0, 2)$ en $\left(2\frac{2}{3}, 4\right)$.

c $\left.\begin{array}{l} g(x) = -x + 2 \\ A(x_A, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -x_A + 2 = 3 \\ -x_A = 1 \\ x_A = -1 \end{array}$



$\left.\begin{array}{l} f(x) = 1\frac{1}{2}x + 2 \\ B(x_B, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2}x_B + 2 = 3 \\ 1\frac{1}{2}x_B = 1 \\ 3x_B = 2 \\ x_B = \frac{2}{3} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} g(x) = 3x - 4 \\ C(x_C, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x_C - 4 = 3 \\ 3x_C = 7 \\ x_C = 2\frac{1}{3} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = -1\frac{1}{2}x + 8 \\ D(x_D, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2}x_D + 8 = 3 \\ -1\frac{1}{2}x_D = -5 \\ 3x_D = 10 \\ x_D = 3\frac{1}{3} \end{array}$

$AB = \frac{2}{3} - -1 = 1\frac{2}{3}, BC = 2\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ en

$CD = 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} = 1.$

Dus CD heeft de kleinste lengte.

d $h(x) = \left(1\frac{1}{2}x + 2\right)(-x + 2) = -1\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ als $x < 1\frac{1}{2}$

$x_{\text{top}} = -\dfrac{1}{2 \cdot -1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ geeft $y_{\text{top}} = h\left(\frac{1}{3}\right) = 4\frac{1}{6}.$

$y = -1\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ met $D = \langle\leftarrow, 1\frac{1}{2}\rangle$ en $B = \langle\leftarrow, 4\frac{1}{6}]$.

$h(x) = \left(1\frac{1}{2}x + 2\right)(3x - 4) = 4\frac{1}{2}x^2 - 8$ als $1\frac{1}{2} \leq x < 2$

$h\left(1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{8}$ en $h(2) = 10.$

$y = 4\frac{1}{2}x^2 - 8$ met $D = [1\frac{1}{2}, 2\rangle$ en $B = [2\frac{1}{8}, 10\rangle$.

$h(x) = \left(-1\frac{1}{2}x + 8\right)(3x - 4) = -4\frac{1}{2}x^2 + 30x - 32$ als $x \geq 2$

$x_{\text{top}} = -\dfrac{30}{2 \cdot -4\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{3}$ geeft $y_{\text{top}} = h\left(3\frac{1}{3}\right) = 18.$

$y = -4\frac{1}{2}x^2 + 30x - 32$ met $D = [2, \rightarrow\rangle$ en $B = \langle\leftarrow, 18]$.

4 **a** $7x^2 = 5x$

$7x^2 - 5x = 0$

$x(7x - 5) = 0$

$x = 0 \vee 7x = 5$

$x = 0 \vee x = \frac{5}{7}$

b $2x^2 + x = 3$

$2x^2 + x - 3 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25$

$x = \dfrac{-1 - 5}{4} = -1\frac{1}{2} \vee x = \dfrac{-1 + 5}{4} = 1$

c $(x + 2)(x - 6) = 9$

$x^2 - 6x + 2x - 12 = 9$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$(x - 7)(x + 3) = 0$

$x = 7 \vee x = -3$

d $(x-3)^2-(x+1)^2=x^2-1$
$x^2-6x+9-(x^2+2x+1)=x^2-1$
$x^2-6x+9-x^2-2x-1=x^2-1$
$-x^2-8x+9=0$
$x^2+8x-9=0$
$(x+9)(x-1)=0$
$x=-9 \vee x=1$

e $(2x-3)^2=36$
$2x-3=6 \vee 2x-3=-6$
$2x=9 \vee 2x=-3$
$x=4\frac{1}{2} \vee x=-1\frac{1}{2}$

f $4-(x-2)^2=7x-3$
$4-(x^2-4x+4)=7x-3$
$4-x^2+4x-4=7x-3$
$-x^2-3x+3=0$
$x^2+3x-3=0$
$D=3^2-4\cdot 1\cdot -3=21$
$x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2} \vee x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$
$x=-1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21} \vee x=-1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}$

5 **a** $p=0$ geeft $6x=0$, dus één oplossing.
Voor $p\neq 0$ is $D=6^2-4\cdot p\cdot 3p=36-12p^2$
twee oplossingen als $D>0$

$$\left.\begin{array}{l}\end{array}\right\} \begin{array}{l}36-12p^2>0\\ -12p^2>-36\\ p^2<3\\ -\sqrt{3}<p<\sqrt{3}\end{array}$$

De vergelijking heeft twee oplossingen voor $-\sqrt{3}<p<0 \vee 0<p<\sqrt{3}$.

b $x=6$ geeft $6^2+p\cdot 6-6p^2=0$
$36+6p-6p^2=0$
$-6p^2+6p+36=0$
$p^2-p-6=0$
$(p-3)(p+2)=0$
$p=3 \vee p=-2$

$p=3$ geeft $x^2+3x-6\cdot 3^2=0$
$x^2+3x-54=0$
$(x-6)(x+9)=0$
$x=6 \vee x=-9$

$p=-2$ geeft $x^2-2x-6\cdot(-2)^2=0$
$x^2-2x-24=0$
$(x-6)(x+4)=0$
$x=6 \vee x=-4$

Voor $p=3$ is de andere oplossing $x=-9$ en voor $p=-2$ is de andere oplossing $x=-4$.

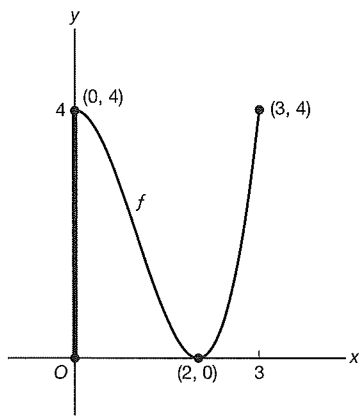
c Voor $p\neq 0$ is $D=(-2p)^2-4\cdot p\cdot 4=4p^2-16p$
één oplossing als $D=0$

$$\left.\begin{array}{l}\end{array}\right\} \begin{array}{l}4p^2-16p=0\\ p(4p-16)=0\\ p=0 \vee 4p=16\\ p=0 \vee p=4\end{array}$$

$p=0$ geeft $4=0$, geen oplossingen
$p=4$ geeft $4x^2-2\cdot 4x+4=0$
$4x^2-8x+4=0$
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)(x-1)=0$
$x=1$
Dus voor $p=4$ is de oplossing $x=1$.

6 **a** Voer in $y_1=x^3-3x^2+4$.
De optie maximum geeft $x=0$ en $y=4$.
De optie minimum geeft $x=2$ en $y=0$.
Dus min. is $f(2)=0$ en max. is $f(0)=4$.

b



$f(0)=f(3)=4$ is de grootste functiewaarde en $f(2)=0$ is de kleinste functiewaarde.
Dus $B_f=[0,4]$.

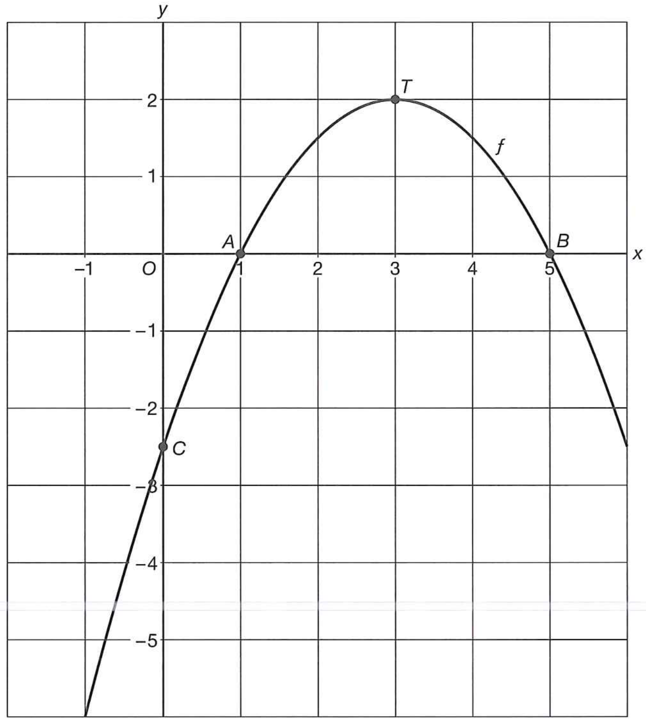
7 **a** Voer in $y_1 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 - 12x$.
Optie minimum geeft $x = -3$ en $y = 6{,}75$ en geeft $x \approx 2{,}56$ en $y \approx -31{,}74$.
Optie maximum geeft $x \approx -1{,}56$ en $y \approx 9{,}15$.
Dus min. is $f(-3) = 6{,}75$ en min. is $f(2{,}56) \approx -31{,}74$ en max. is $f(-1{,}56) \approx 9{,}15$.

b $26 \leq a \leq 31$

Bladzijde 188

8 **a**

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-6	$-2\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$



b $x_{top} = -\dfrac{3}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 3$ en $y_{top} = f(3) = 2$, dus max. is $f(3) = 2$.

$B_f = \langle \leftarrow, 2]$

c $T(3, 2)$ en $y_c = f(0) = -2\frac{1}{2}$, dus $C(0, -2\frac{1}{2})$.
Stel $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2 - -2\frac{1}{2}}{3 - 0} = 1\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(0, -2\frac{1}{2}) \end{array}\right\} b = -2\frac{1}{2}$

Dus $y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$.

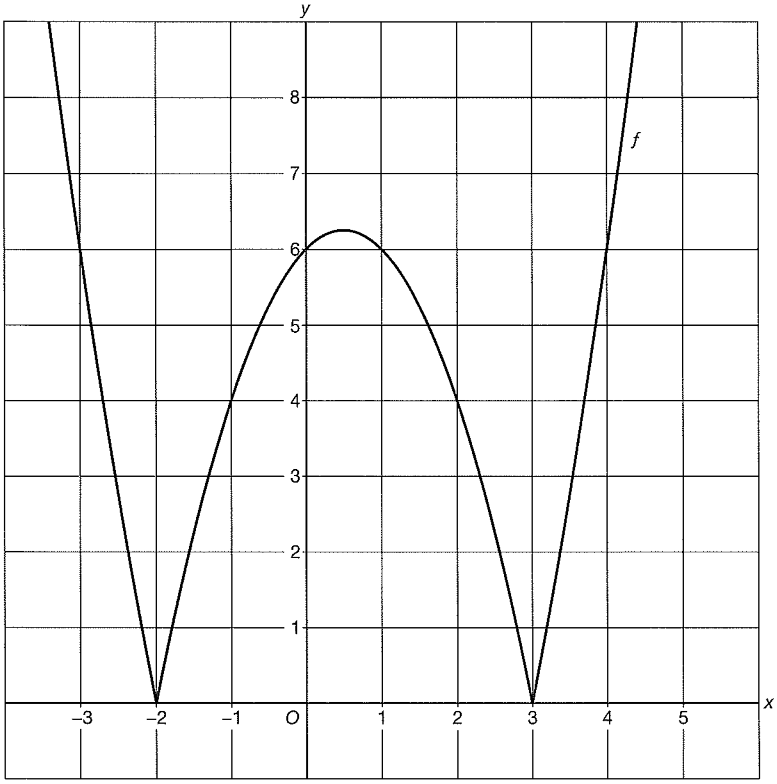
d $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\frac{1}{2} = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x - 1)(x - 5) = 0$
$x = 1 \vee x = 5$
$O(\triangle ABT) = \frac{1}{2} \cdot (5 - 1) \cdot 2 = 4$

e $f(x) = -4$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\frac{1}{2} = -4$
$x^2 - 6x + 5 = 8$
$x^2 - 6x - 3 = 0$
$(x - 3)^2 - 9 - 3 = 0$
$(x - 3)^3 = 12$
$x - 3 = \sqrt{12} \vee x - 3 = -\sqrt{12}$
$x = 3 + \sqrt{12} \vee x = 3 - \sqrt{12}$
$x = 3 + 2\sqrt{3} \vee x = 3 - 2\sqrt{3}$
voldoet niet voldoet

Dus $a = 3 - 2\sqrt{3}$.

9 **a** Voer in $y_1 = |x^2 - x - 6|$.

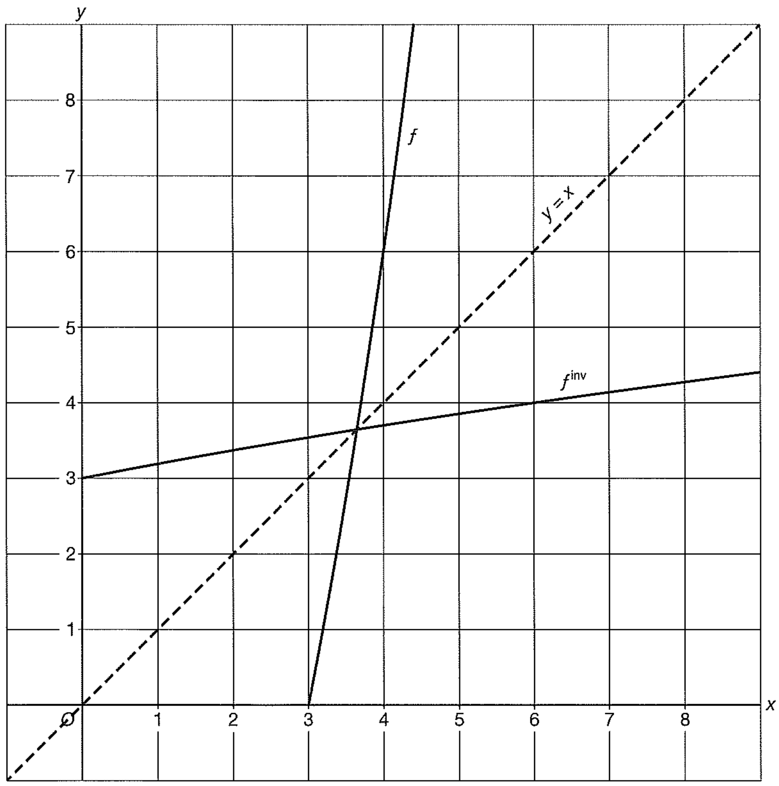
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	6	0	4	6	6	4	0	6



b Optie maximum geeft $x = 0{,}5$ en $y = 6{,}25$, dus $B_f = [0; 6{,}25]$.

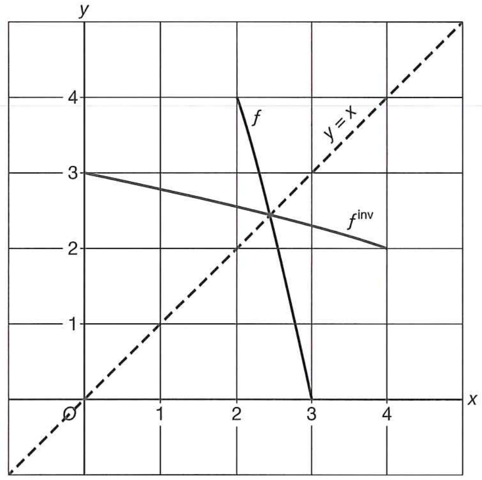
c $a = 3$

x	0	6
$f^{\text{inv}}(x)$	3	4

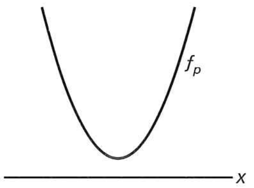


d $b = 3$

x	4	0
$f^{\text{inv}}(x)$	2	3



10 **a**



Er moet gelden $D < 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Er moet gelden } D < 0 \\ D = p^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 4 = p^2 - 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p^2 - 8 < 0 \\ p^2 < 8 \\ -\sqrt{8} < p < \sqrt{8} \\ -2\sqrt{2} < p < 2\sqrt{2} \end{array}$$

b $x_{\text{top}} = -\dfrac{p}{1} = -p$

$y_{\text{top}} = f_p(x_{\text{top}}) = \frac{1}{2} \cdot (-p)^2 + p \cdot -p + 4 = \frac{1}{2}p^2 - p^2 + 4 = -\frac{1}{2}p^2 + 4$

$y_{\text{top}} = -5$ geeft $-\frac{1}{2}p^2 + 4 = -5$

$-\frac{1}{2}p^2 = -9$

$p^2 = 18$

$p = \sqrt{18} \vee p = -\sqrt{18}$

$p = 3\sqrt{2} \vee p = -3\sqrt{2}$

c $x_{\text{top}} = -p$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{2}p^2 + 4$ invullen bij $y = -3x + 8$ geeft $-\frac{1}{2}p^2 + 4 = -3 \cdot -p + 8$

$-\frac{1}{2}p^2 + 4 = 3p + 8$

$-\frac{1}{2}p^2 - 3p - 4 = 0$

$p^2 + 6p + 8 = 0$

$(p + 2)(p + 4) = 0$

$p = -2 \vee p = -4$

d $x_{\text{top}} = -\dfrac{p}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -p$, dus $p = -x_{\text{top}}$.

$$\left.\begin{array}{l} y_{\text{top}} = \frac{1}{2}x_{\text{top}}^{\;2} + px_{\text{top}} + 4 \\ p = -x_{\text{top}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_{\text{top}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{top}}^{\;2} + -x_{\text{top}} \cdot x_{\text{top}} + 4 \\ y_{\text{top}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{top}}^{\;2} + -x_{\text{top}}^{\;2} + 4 \\ y_{\text{top}} = -\frac{1}{2}x_{\text{top}}^{\;2} + 4 \end{array}$$

Dus de formule van de kromme is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.

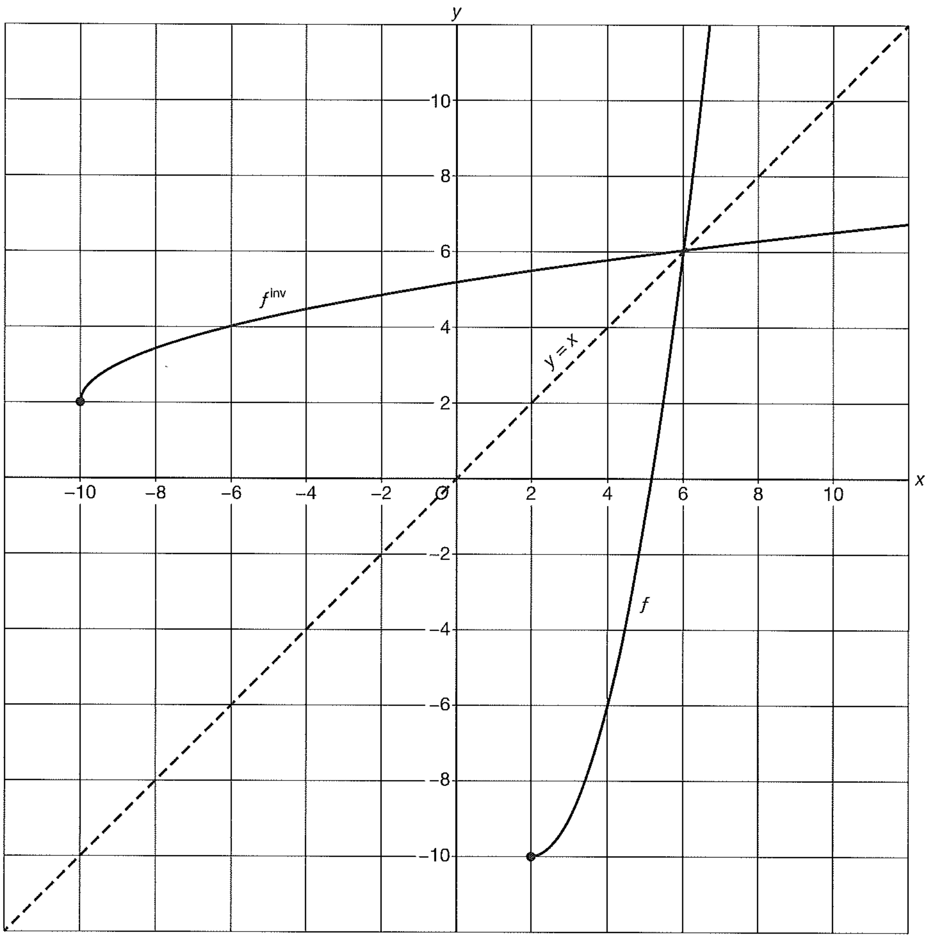
11 **a** $f_{-1}(x) = x^2 - 4x - 6$

$x_{top} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 1} = 2$, dus $a = 2$.

x	2	3	4	5	6
$f_{-1}(x)$	-10	-9	-6	-1	6

en

x	-10	-9	-6	-1	6
$f_{-1}^{\text{inv}}(x)$	2	3	4	5	6



b De grafieken snijden elkaar op de lijn $y = x$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4x - 6 \\ y = x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 - 4x - 6 = x \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \\ (x - 6)(x + 1) = 0 \\ x = 6 \vee x = -1 \\ \text{vold.} \quad \text{vold. niet} \end{array}$$

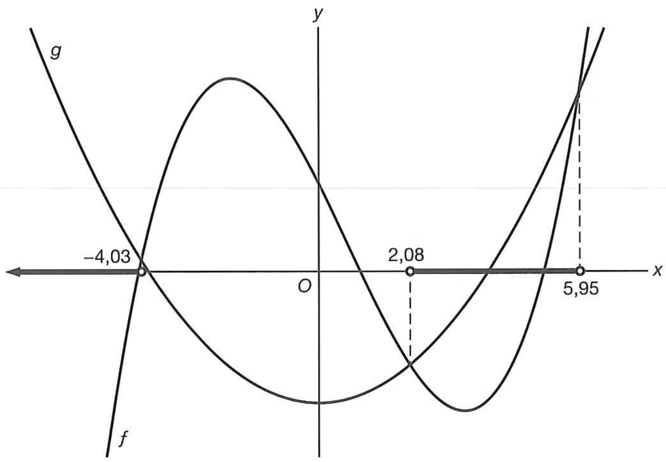
$x = 6$ geeft $y = 6$, dus $A(6, 6)$.

c $x_{top} = -\dfrac{4p}{2 \cdot 1} = -2p$, dus $p = -\tfrac{1}{2}x_{top}$.

$$\left.\begin{array}{l} y_{top} = x_{top}{}^2 + 4px_{top} + \dfrac{6}{p} \\ p = -\tfrac{1}{2}x_{top} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_{top} = x_{top}{}^2 + 4 \cdot -\tfrac{1}{2}x_{top} \cdot x_{top} + \dfrac{6}{-\tfrac{1}{2}x_{top}} \\ y_{top} = x_{top}{}^2 - 2x_{top}{}^2 - \dfrac{12}{x_{top}} \\ y_{top} = -x_{top}{}^2 - \dfrac{12}{x_{top}} \end{array}$$

Dus de formule van de kromme is $y = -x^2 - \dfrac{12}{x}$.

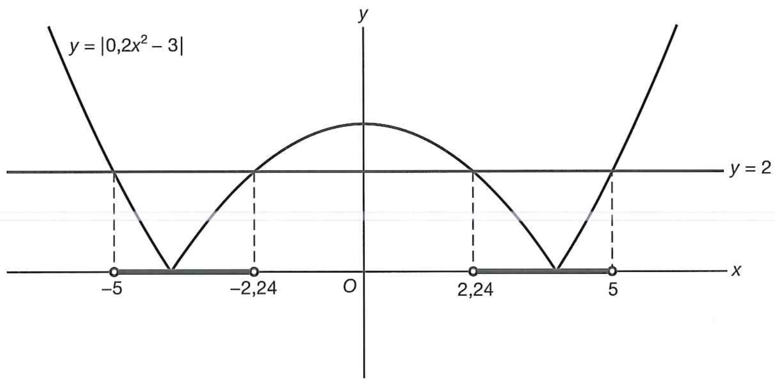
12 **a** Voer in $y_1 = 0{,}1x^3 - 0{,}2x^2 - 2x + 2$ en $y_2 = 0{,}2x^2 - 3$.
Intersect geeft $x \approx -4{,}03$, $x \approx 2{,}08$ en $x \approx 5{,}95$.



$f(x) < g(x)$ geeft $x < -4{,}03 \vee 2{,}08 < x < 5{,}95$

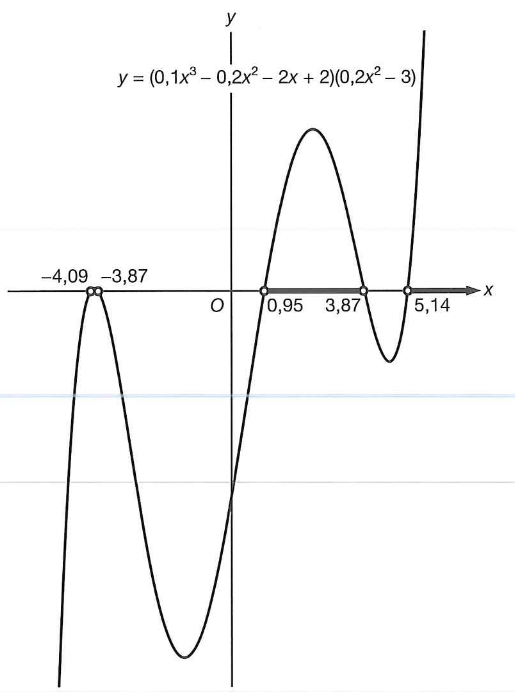
b Optie zero geeft $x \approx -4{,}09, x \approx 0{,}95$ en $x \approx 5{,}14$.
$f(x) > 0$ geeft $-4{,}09 < x < 0{,}95 \vee x > 5{,}14$.

c Voer in $y_1 = |0{,}2x^2 - 3|$ en $y_2 = 2$.
Intersect geeft $x = -5, x \approx -2{,}24, x \approx 2{,}24$ en $x = 5$.



$|g(x)| < 2$ geeft $-5 < x < -2{,}24 \vee 2{,}24 < x < 5$

d Voer in $y_1 = (0{,}1x^3 - 0{,}2x^2 - 2x + 2)(0{,}2x^2 - 3)$.
Optie zero geeft $x \approx -4{,}09, x \approx -3{,}87, x \approx 0{,}95, x \approx 3{,}87$ en $x \approx 5{,}14$.



$f(x) \cdot g(x) > 0$ geeft $-4{,}09 < x < -3{,}87 \vee 0{,}95 < x < 3{,}87 \vee x > 5{,}14$

2 De afgeleide functie

Bladzijde 189

13 a Voer in $y_1 = 500x^2/(x^2 + 400)$. Gebruik de optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio).

De snelheid op $t = 15$ is $\left[\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=15} = 15{,}36$ m/s ≈ 55 km/uur.

De snelheid op $t = 30$ is $\left[\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=30} \approx 7{,}1$ m/s ≈ 26 km/uur.

b Na 50 seconden is afgelegd $s = \dfrac{500 \cdot 50^2}{50^2 + 400} \approx 431$ m.
Gebruik de optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio).

De snelheid op $t = 50$ is $\left[\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=50} \approx 2{,}38$ m/s.

Dus na 1 minuut is afgelegd $431 + 10 \cdot 2{,}38 \approx 455$ m.

14 a Stel l: $y = ax + b$.
Voer in $y_1 = (5x + 6)/\sqrt{2x + 9}$.
De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=-4} = 19$, dus $a = 19$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 19x + b \\ f(-4) = -14, \text{ dus } A(-4, -14) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 19 \cdot -4 + b = -14 \\ -76 + b = -14 \\ b = 62 \end{array}$$

Dus l: $y = 19x + 62$.

b Stel k: $y = ax + b$.
B ligt op de y-as, dus $x_B = 0$.
De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=0} \approx 1{,}44$, dus $a \approx 1{,}44$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1{,}44x + b \\ f(0) = 2, \text{ dus } B(0, 2) \end{array}\right\} b = 2$$

Dus k: $y = 1{,}44x + 2$.

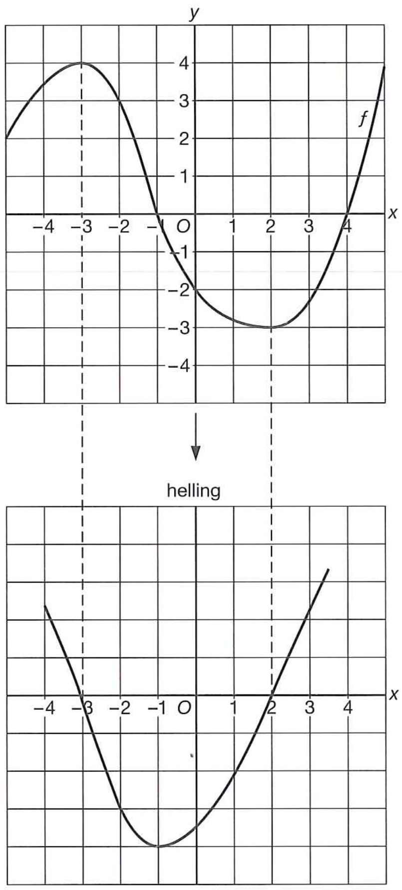
c Stel m: $y = ax + b$.
De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{y=8} = 0{,}632$, dus $a = 0{,}632$.

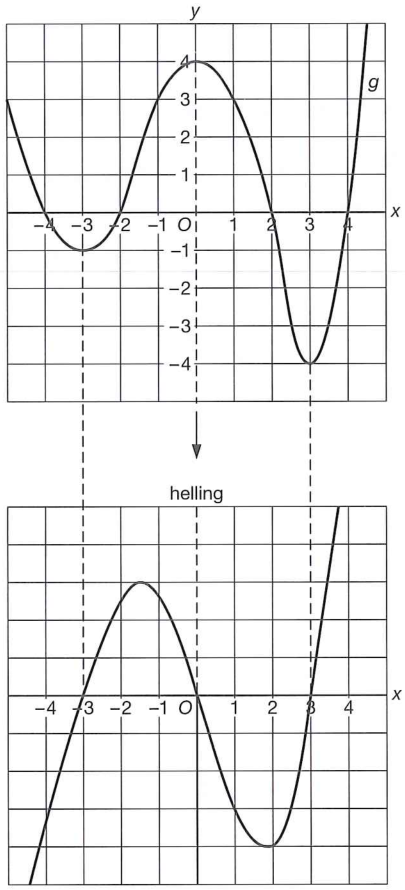
$$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}632x + b \\ f(8) = 9{,}2, \text{ dus } C(8; 9{,}2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}632 \cdot 8 + b = 9{,}2 \\ 5{,}056 + b = 9{,}2 \\ b = 4{,}144 \end{array}$$

Dus m: $y = 0{,}632x + 4{,}144$.
m snijden met de x-as geeft $0{,}632x + 4{,}144 = 0$

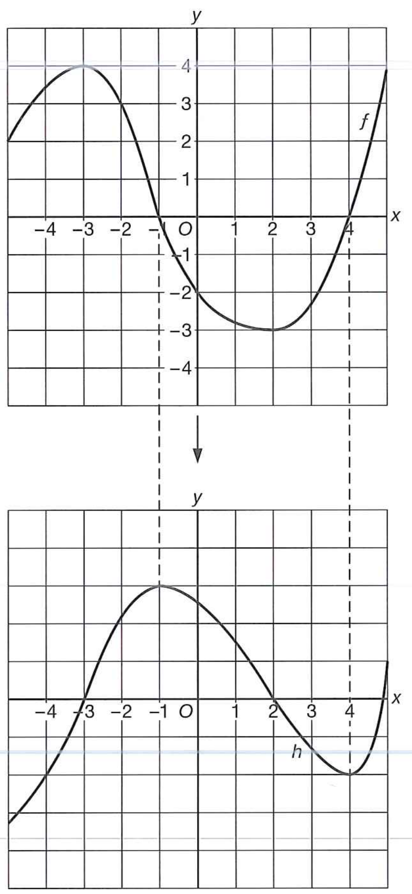
$$0{,}632x = -4{,}144$$
$$x \approx -6{,}56$$

15 **a**





b



16 a $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(x+h)^2 + 5(x+h) + 6 - (3x^2 + 5x + 6)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 5x + 5h + 6 - 3x^2 - 5x - 6}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5x + 5h + 6 - 3x^2 - 5x - 6}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{6xh + 3h^2 + 5h}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} (6x + 3h + 5) = 6x + 5$

b $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - 4(x+h) - (x^3 - 4x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h - x^3 + 4x}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3 - 4h - x^3}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4h}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 4) = 3x^2 - 4$

Bladzijde 190

17 a $f(x) = -x(2x - 7) = -2x^2 + 7x$ geeft $f'(x) = -4x + 7$

b $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - x + 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

c $f(x) = \dfrac{2x - 1}{5 - 2x}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(5 - 2x) \cdot 2 - (2x - 1) \cdot -2}{(5 - 2x)^2} = \dfrac{10 - 4x + 4x - 2}{(5 - 2x)^2} = \dfrac{8}{(5 - 2x)^2}$

d $f(x) = 7 - \dfrac{x^2 + 8x}{16} = 7 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$

e $f(x) = x(3x + 2)^2 = x(9x^2 + 12x + 4) = 9x^3 + 12x^2 + 4x$ geeft $f'(x) = 27x^2 + 24x + 4$

f $f(x) = 8 - (x - 1)^2 = 8 - (x^2 - 2x + 1) = 8 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x + 7$ geeft $f'(x) = -2x + 2$

g $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1} + x^4$ geeft

$f'(x) = \dfrac{(x + 1) \cdot (2x - 2) - (x^2 - 2x) \cdot 1}{(x + 1)^2} + 4x^3 = \dfrac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 + 2x}{(x + 1)^2} + 4x^3 = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{(x + 1)^2} + 4x^3$

h $f(x) = 3x^2 - \dfrac{4x + 3}{2x - 1}$ geeft

$f'(x) = 6x - \dfrac{(2x - 1) \cdot 4 - (4x + 3) \cdot 2}{(2x - 1)^2} = 6x - \dfrac{8x - 4 - 8x - 6}{(2x - 1)^2} = 6x + \dfrac{10}{(2x - 1)^2}$

18 a $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \dfrac{(-2)^2 + 3 \cdot -2 + 2}{(-2)^2 - 1} = \dfrac{0}{3} = 0$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 2}{x - 1} = \dfrac{-1 + 2}{-1 - 1} = \dfrac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

b Stel k: $y = ax + b$.

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot(2x+3)-(x^2+3x+2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{2x^3+3x^2-2x-3-2x^3-6x^2-4x}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{-3x^2-6x-3}{(x^2-1)^2}$$

$$a = f'(2) = \frac{-3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 - 3}{(2^2-1)^2} = \frac{-27}{9} = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ f(2) = 4, \text{ dus door } (2, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3\cdot 2 + b = 4 \\ -6 + b = 4 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus k: $y = -3x + 10$.

c $g(x) = \frac{x-3}{x^2-2x-3} = \frac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ mits $x \neq 3$.

De grafiek van g heeft een perforatie voor $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+1} = \tfrac{1}{4}$$

De perforatie is dus $\left(3, \frac{1}{4}\right)$.

$x = 3$ invullen in k geeft $y = -3\cdot 3 + 10 = -9 + 10 = 1$, dus de perforatie ligt niet op k.

19 **a** Stel k: $y = ax + b$.

$f(x) = (x^2-9)(x-1) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 9$

$a = f'(2) = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 - 9 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + b \\ f(2) = -5, \text{ dus } A(2, -5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + b = -5 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus k: $y = -x - 3$.

b Stel m: $y = ax + b$.

B ligt op de y-as, dus $x_B = 0$.

$a = f'(0) = -9$

$$\left.\begin{array}{l} y = -9x + b \\ f(0) = 9, \text{ dus } B(0, 9) \end{array}\right\} b = 9$$

Dus m: $y = -9x + 9$.

c De rc van de raaklijn in C is $f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 2\cdot -1 - 9 = -4$.

$rc_{raaklijn} = -4 \neq 0$, dus de raaklijn in C is niet horizontaal.

20 **a** Stel k: $y = ax + b$.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ geeft $f'(x) = x^2 - x - 2$

A ligt op de y-as, dus $x_A = 0$.

$a = f'(0) = -2$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(0) = 1, \text{ dus } A(0, 1) \end{array}\right\} b = 1$$

Dus k: $y = -2x + 1$.

b Raaklijn horizontaal, dus rc $= 0$, dus $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \text{ geeft } & x^2 - x - 2 = 0 \\ & (x-2)(x+1) = 0 \\ & x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$f(2) = -2\frac{1}{3}$ en $f(-1) = 2\frac{1}{6}$

De punten zijn $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$ en $\left(2, 2\frac{1}{3}\right)$.

c $rc_l = 4$ en l is evenwijdig met de raaklijn, dus $f'(x) = 4$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 4 \text{ geeft } & x^2 - x - 2 = 4 \\ & x^2 - x - 6 = 0 \\ & (x+2)(x-3) = 0 \\ & x = -2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$x_B = -2$ en $y_B = f(-2) = \frac{1}{3}$, dus $B\left(-2, \frac{1}{3}\right)$.

$x_C = 3$ en $y_C = f(3) = -\frac{1}{2}$, dus $C\left(3, -\frac{1}{2}\right)$.

21 **a** Stel k: $y = ax + b$.
$f(x) = (x^2 + 2)(1 - x) = x^2 - x^3 + 2 - 2x = -x^3 + x^2 - 2x + 2$ geeft $f'(x) = -3x^2 + 2x - 2$
$a = f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = -10$

$$\left.\begin{array}{l} y = -10x + b \\ f(2) = -6, \text{ dus } A(2, -6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -10 \cdot 2 + b = -6 \\ -20 + b = -6 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus k: $y = -10x + 14$.

b $rc_k = -10$ en k is evenwijdig met de raaklijn, dus $f'(x) = -10$.
$f'(x) = -10$ geeft $-3x^2 + 2x - 2 = -10$

$$-3x^2 + 2x + 8 = 0$$
$$D = 2^2 - 4 \cdot -3 \cdot 8 = 100$$
$$x = \frac{-2 - 10}{-6} = 2 \vee x = \frac{-2 + 10}{-6} = -1\tfrac{1}{3}$$

Dus $x_B = -1\frac{1}{3}$.

Bladzijde 191

22 **a** $s = 0{,}06t^3 + 1{,}2t^2$ geeft $v = 0{,}18t^2 + 2{,}4t$
Op $t = 4$ is de snelheid $v = 0{,}18 \cdot 4^2 + 2{,}4 \cdot 4 = 12{,}48$ m/s.
Op $t = 6$ is de snelheid $v = 0{,}18 \cdot 6^2 + 2{,}4 \cdot 6 = 20{,}88$ m/s.

b 100 km/uur $= \frac{100}{3{,}6}$ m/s
Voer in $y_1 = 0{,}18x^2 + 2{,}4x$ en $y_2 = 100/3{,}6$.
Intersect geeft $x \approx 7{,}43$.
Dus na ongeveer 7,43 seconden is de snelheid 100 km/uur.

c Na 8 seconden is $s = 0{,}06 \cdot 8^3 + 1{,}2 \cdot 8^2 = 107{,}52$ m.
Op $t = 8$ is de snelheid $v = 0{,}18 \cdot 8^2 + 2{,}4 \cdot 8 = 30{,}72$ m/s.
$300 - 107{,}52 = 192{,}48$ m
$\frac{192{,}48}{30{,}72} \approx 6{,}3$, dus na ongeveer $8 + 6{,}3 = 14{,}3$ seconden heeft de motor 300 meter afgelegd.

23 **a** Stel k: $y = ax + b$.

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+3} \text{ geeft } f'(x) = 1 + \frac{(x+3) \cdot 0 - 4 \cdot 1}{(x+3)^2}$$
$$= 1 - \frac{4}{(x+3)^2}$$

A is het snijpunt met de y-as, dus $x_A = 0$.

$$a = f'(0) = 1 - \frac{4}{(0+3)^2} = \tfrac{5}{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} k: y = \tfrac{5}{9}x + b \\ f(0) = -\tfrac{2}{3}, \text{ dus } A\left(0, -\tfrac{2}{3}\right) \end{array}\right\} b = -\tfrac{2}{3}$$

Dus k: $y = \frac{5}{9}x - \frac{2}{3}$.

b Stel l: $y = ax + b$.
$a = f'(-2) = -3$

$$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } B(-2, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -2 + b = 0 \\ 6 + b = 0 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus l: $y = -3x - 6$.
Stel m: $y = ax + b$.
$a = f'(1) = \frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} m: y = \tfrac{3}{4}x + b \\ \text{door } C(1, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \tfrac{3}{4} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -\tfrac{3}{4} \end{array}$$

Dus m: $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

$-3x - 6 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$
$-12x - 24 = 3x - 3$
$-15x = 21$
$x = \dfrac{21}{-15} = -1\frac{2}{5}$ geeft $y = -3 \cdot -1\frac{2}{5} - 6 = -1\frac{4}{5}$
Het snijpunt van l en m is $\left(-1\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5}\right)$.

24 **a** Stel k: $y = ax + b$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x-1)(2x-2) - (x^2 - 2x + 2) \cdot 1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$a = f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 2 \cdot -2}{(-2-1)^2} = \frac{8}{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{8}{9}x + b \\ f(-2) = -3\frac{1}{3}, \text{ dus } A\left(-2, -3\frac{1}{3}\right) \end{array}\right\} \frac{8}{9} \cdot -2 + b = -3\frac{1}{3}$$
$$-\frac{16}{9} + b = -3\frac{1}{3}$$
$$b = -1\frac{5}{9}$$

Dus k: $y = \frac{8}{9}x - 1\frac{5}{9}$.

b $f'(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 2 \cdot -1}{(-1-1)^2} = \dfrac{3}{4}$, dus $rc_l = \frac{3}{4}$.

$f'(3) = \dfrac{3^2 - 2 \cdot 3}{(3-1)^2} = \dfrac{3}{4}$, dus $rc_m = \frac{3}{4}$.
$rc_l = rc_m$, dus l en m zijn evenwijdig.

3 Vergelijkingen en herleidingen

25 **a** $17 - (2x - 1)^4 = 1$
$(2x - 1)^4 = 16$
$2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$
$2x = 3 \vee 2x = -1$
$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

b $x^6 - 6x^3 + 5 = 0$
Stel $x^3 = u$.
$u^2 - 6u + 5 = 0$
$(u - 1)(u - 5) = 0$
$u = 1 \vee u = 5$
$x^3 = 1 \vee x^3 = 5$
$x = 1 \vee x = \sqrt[3]{5}$

c $10x^4 = 17x^2 + 657$
$10x^4 - 17x^2 - 657 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$10u^2 - 17u - 657 = 0$
$D = (-17)^2 - 4 \cdot 10 \cdot -657 = 26569$
$u = \dfrac{17 - 163}{20} = -7\frac{3}{10} \vee u = \dfrac{17 + 163}{20} = 9$
$x^2 = -7\frac{3}{10} \vee x^2 = 9$
$x = 3 \vee x = -3$

d Stel $f(x) = x^3 + 5x$ en $g(x) = 6x^2$.

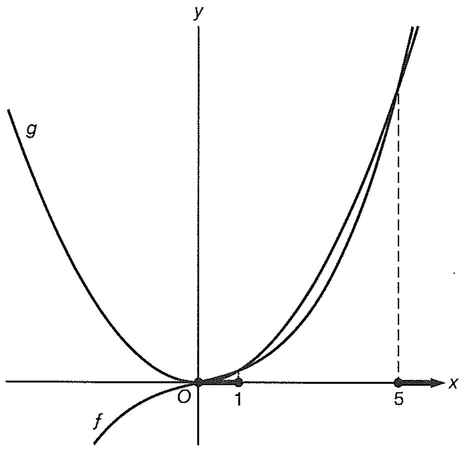
$f(x) = g(x)$ geeft $x^3 + 5x = 6x^2$

$x^3 - 6x^2 + 5x = 0$

$x(x^2 - 6x + 5) = 0$

$x(x - 5)(x - 1) = 0$

$x = 0 \vee x = 5 \vee x = 1$



$f(x) \geq g(x)$ geeft $0 \leq x \leq 1 \ \vee \ x \geq 5$

e $(2x^2 - 1)^2 = x^2$

$4x^2 - 4x^2 + 1 = x^2$

$4x^2 - 5x^2 + 1 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$

$u = \dfrac{5-3}{8} = \frac{1}{4} \ \vee \ u = \dfrac{5+3}{8} = 1$

$x^2 = \frac{1}{4} \ \vee \ x^2 = 1$

$x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = -\frac{1}{2} \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = -1$

Alternatieve oplossing

$(2x^2 - 1)^2 = x^2$

$2x^2 - 1 = x \quad \vee \ 2x^2 - 1 = -x$

$2x^2 - x - 1 = 0 \quad \vee \ 2x^2 + x - 1 = 0$

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \vee \ x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \vee (x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$x = 1 \ \vee \ x = -\frac{1}{2} \quad \vee \ x = -1 \ \vee \ x = \frac{1}{2}$

f $(2x - 1)^4 - 5(2x - 1)^2 + 4 = 0$

Stel $(2x - 1)^2 = u$.

$u^2 - 5u + 4 = 0$

$(u - 4)(u - 1) = 0$

$u = 4 \ \vee \ u = 1$

$(2x - 1)^2 = 4 \ \vee \ (2x - 1)^2 = 1$

$2x - 1 = 2 \ \vee \ 2x - 1 = -2 \ \vee \ 2x - 1 = 1 \ \vee \ 2x - 1 = -1$

$2x = 3 \ \vee \ 2x = -1 \ \vee \ 2x = 2 \ \vee \ 2x = 0$

$x = 1\frac{1}{2} \ \vee \ x = -\frac{1}{2} \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = 0$

g $\sqrt{2 - 2x} + 2x = 0$

$\sqrt{2 - 2x} = -2x$

kwadrateren geeft

$2 - 2x = (-2x)^2$

$2 - 2x = 4x^2$

$-4x^2 - 2x + 2 = 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$

$x = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \ \vee \ x = \dfrac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

$x = -1$ geeft $\sqrt{4} = 2$ voldoet

$x = \frac{1}{2}$ geeft $\sqrt{1} = -1$ voldoet niet

h $x^3 - 3x\sqrt{x} - 108 = 0$

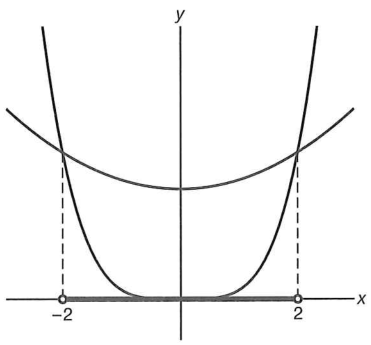
Stel $x\sqrt{x} = u$.
$u^2 - 3u - 108 = 0$
$(u - 12)(u + 9) = 0$
$u = 12 \vee u = -9$
$x\sqrt{x} = 12 \vee x\sqrt{x} = -9$
geen oplossingen
kwadrateren geeft
$x^3 = 144$
$x = \sqrt[3]{144}$

$x = \sqrt[3]{144}$ geeft

$144 - 3 \cdot \sqrt[3]{144} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{144}} - 108 = 0$ voldoet.

26 **a** $x^5 - 16x^3 + 28x = 0$
$x(x^4 - 16x^2 + 28) = 0$
$x = 0 \vee x^4 - 16x^2 + 28 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$x = 0 \vee u^2 - 16u + 28 = 0$
$x = 0 \vee (u - 2)(u - 14) = 0$
$x = 0 \vee u = 2 \vee u = 14$
$x = 0 \vee x^2 = 2 \vee x^2 = 14$
$x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{14} \vee x = -\sqrt{14}$

b Stel $f(x) = x^4$ en $g(x) = x^2 + 12$.
$f(x) = g(x)$ geeft $x^4 = x^2 + 12$
$x^4 - x^2 - 12 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - u - 12 = 0$
$(u + 3)(u - 4) = 0$
$u = -3 \vee u = 4$
$x^2 = -3 \vee x^2 = 4$
geen opl. $x = 2 \vee x = -2$



$x^4 < x^2 + 12$ geeft $-2 < x < 2$

c $|x^4 - 7x^2| = 18$
$x^4 - 7x^2 = 18 \vee x^4 - 7x^2 = -18$
$x^4 - 7x^2 - 18 = 0 \vee x^4 - 7x^2 + 18 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 7u - 18 = 0 \quad \vee u^2 - 7u + 18 = 0$
$(u - 9)(u + 2) = 0 \quad D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = -23$
$u = 9 \vee u = -2 \quad$ geen oplossingen
$x^2 = 9 \vee x^2 = -2$
$x = 3 \vee x = -3$

d $\dfrac{2x + 4}{x} = \dfrac{12}{x + 1}$
$(2x + 4)(x + 1) = 12x$
$2x^2 + 4x + 2x + 4 = 12x$
$2x^2 - 6x + 4 = 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x - 2)(x - 1) = 0$
$x = 2 \vee x = 1$
vold. vold.

e $6x^5 + 10x^2 \cdot \sqrt{x} - 464 = 0$

$3x^5 + 5x^2 \cdot \sqrt{x} - 232 = 0$

Stel $x^2 \cdot \sqrt{x} = u$.
$3u^2 + 5u - 232 = 0$
$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot -232 = 2809$
$u = \dfrac{-5 - 53}{6} = -9\tfrac{2}{3} \vee u = \dfrac{-5 + 53}{6} = 8$
$x^2 \cdot \sqrt{x} = -9\tfrac{2}{3} \vee x^2 \cdot \sqrt{x} = 8$
geen opl. kwadrateren geeft
$x^5 = 64$
$x = \sqrt[5]{64}$

$x = \sqrt[5]{64}$ geeft $(\sqrt[5]{64})^2 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{64}} = 8$ voldoet.

f $\sqrt{3x - 2} + 2 = x$

$\sqrt{3x - 2} = x - 2$
kwadrateren geeft
$3x - 2 = (x - 2)^2$
$3x - 2 = x^2 - 4x + 4$
$-x^2 + 7x - 6 = 0$
$x^2 - 7x + 6 = 0$
$(x - 6)(x - 1) = 0$
$x = 6 \vee x = 1$
$x = 6$ geeft $\sqrt{16} = 4$ voldoet.

$x = 1$ geeft $\sqrt{1} = -1$ voldoet niet.

g $(2x - 3)(x^2 - 3) + 3 = 2x$
$(2x - 3)(x^2 - 3) = 2x - 3$
$2x - 3 = 0 \vee x^2 - 3 = 1$
$2x = 3 \vee x^2 = 4$
$x = 1\tfrac{1}{2} \vee x = 2 \vee x = -2$

h $\dfrac{x^2 - 9}{2x + 3} = \dfrac{x^2 - 9}{x + 4}$
$2x + 3 = x + 4 \vee x^2 - 9 = 0$
$x = 1 \vee x^2 = 9$
$x = 1 \vee x = 3 \vee x = -3$
vold. vold. vold.

Bladzijde 192

27 a $y=\frac{x^4-x^2}{x-1}=\frac{x^2(x^2-1)}{x-1}=\frac{x^2(x-1)(x+1)}{x-1}=x^2(x+1)$ mits $x \neq 1$

b $y=\frac{15x}{x+2}-2x=\frac{15x}{x+2}-\frac{2x(x+2)}{x+2}=\frac{15x-2x^2-4x}{x+2}=\frac{-2x^2+11x}{x+2}$

c $y=\frac{10-\frac{2x}{x+3}}{5+\frac{2}{x+3}}=\frac{\left(10-\frac{2x}{x+3}\right)\cdot(x+3)}{\left(5+\frac{2}{x+3}\right)\cdot(x+3)}=\frac{10(x+3)-2x}{5(x+3)+2}=\frac{8x+30}{5x+17}$ mits $x \neq -3$

d $N=\frac{3t^3+3t^2-6t}{t^2+2t}=\frac{3t(t^2+t-2)}{t(t+2)}=\frac{3t(t-1)(t+2)}{t(t+2)}=3t-3$ mits $t \neq 0 \wedge t \neq -2$

e $K=\frac{2a}{a+2}\left(\frac{a-1}{2a}-\frac{a+2}{a^2}\right)=\frac{2a}{a+2}\cdot\frac{a(a-1)-2(a+2)}{2a^2}=\frac{2a}{a+2}\cdot\frac{a^2-3a-4}{2a^2}$

$=\frac{2a(a^2-3a-4)}{2a^2(a+2)}=\frac{a^2-3a-4}{a(a+2)}$

f $P=\frac{\frac{q^2}{q^2+1}-2}{\frac{q}{q^2+1}-2q}=\frac{\left(\frac{q^2}{q^2+1}-2\right)\cdot(q^2+1)}{\left(\frac{q}{q^2+1}-2q\right)\cdot(q^2+1)}=\frac{q^2-2(q^2+1)}{q-2q(q^2+1)}=\frac{-q^2-2}{-2q^3-q}=\frac{q^2+2}{2q^3+q}$

28 a $\begin{cases} 2x+3y=58 \\ 5x-2y=12 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x+6y=116 \\ 15x-6y=36 \end{cases}$ +

$19x = 152$

$\left.\begin{array}{l} x=8 \\ 5x-2y=12 \end{array}\right\}$ $5\cdot 8-2y=12$

$40-2y=12$

$-2y=-28$

$y=14$

Dus $(x, y)=(8, 14)$.

b $2x+y=13$ geeft $y=-2x+13$

Substitutie van $y=-2x+13$ in $x^2+y^2=58$ geeft $x^2+(-2x+13)^2=58$

$x^2+4x^2-52x+169=58$

$5x^2-52x+111=0$

$D=(-52)^2-4\cdot5\cdot111=484$

$x=\frac{52-22}{10}=3 \vee x=\frac{52+22}{10}=7\frac{2}{5}$

$x=3$ geeft $y=-2\cdot3+13=7$

$x=7\frac{2}{5}$ geeft $y=-2\cdot7\frac{2}{5}+13=-1\frac{4}{5}$

Dus $(x, y)=(3, 7) \vee (x, y)=\left(7\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5}\right)$.

c $\begin{cases} 0{,}4x-0{,}32y=2 \\ 0{,}6x-0{,}28y=5 \end{cases} \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2{,}4x-1{,}92y=12 \\ 2{,}4x-1{,}12y=20 \end{cases}$ −

$-0{,}8y=-8$

$\left.\begin{array}{l} y=10 \\ 0{,}4x-0{,}32y=2 \end{array}\right\}$ $0{,}4x-0{,}32\cdot10=2$

$0{,}4x-3{,}2=2$

$0{,}4x=5{,}2$

$x=13$

Dus $(x, y)=(13, 10)$.

d $x + 5y = 17$ geeft $x = -5y + 17$.
Substitutie van $x = -5y + 17$ in $(2x - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$ geeft $(2(-5y + 17) - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$

$$(-10y + 34 - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$$
$$(-10y + 33)^2 + (3y - 1)^2 = 73$$
$$100y^2 - 660y + 1089 + 9y^2 - 6y + 1 = 73$$
$$109y^2 - 666y + 1017 = 0$$
$$D = (-666)^2 - 4 \cdot 109 \cdot 1017 = 144$$
$$y = \frac{666 - 12}{218} = 3 \vee y = \frac{666 + 12}{218} = 3\tfrac{12}{109}$$

$y = 3$ geeft $x = -5 \cdot 3 + 17 = 2$
$y = 3\tfrac{12}{109}$ geeft $x = -5 \cdot 3\tfrac{12}{109} + 17 = 1\tfrac{49}{109}$

Dus $(x, y) = (2, 3) \vee (x, y) = (1\tfrac{49}{109}, 3\tfrac{12}{109})$.

29 **a** $(4x^2 - 1)^2 - (3x - 1)^3$
$= 16x^4 - 8x^2 + 1 - (9x^2 - 6x + 1)(3x - 1)$
$= 16x^4 - 8x^2 + 1 - (27x^3 - 9x^2 - 18x^2 + 6x + 3x - 1)$
$= 16x^4 - 8x^2 + 1 - 27x^3 + 9x^2 + 18x^2 - 6x - 3x + 1$
$= 16x^4 - 27x^3 + 19x^2 - 9x + 2$

b $T = \dfrac{(2t - 1)(t + 2)}{2t^2} = \dfrac{2t^2 + 4t - t - 2}{2t^2} = \dfrac{2t^2 + 3t - 2}{2t^2} = \dfrac{2t^2}{2t^2} + \dfrac{3t}{2t^2} - \dfrac{2}{2t^2} = 1 + \dfrac{3}{2t} - \dfrac{1}{t^2}$

c $B = 12a - 6 \cdot \dfrac{\dfrac{a}{a^2 + 1} - 2}{5a} = 12a - 6 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{a}{a^2 + 1} - 2\right) \cdot (a^2 + 1)}{5a(a^2 + 1)} = 12a - 6 \cdot \dfrac{a - 2(a^2 + 1)}{5a(a^2 + 1)}$

$= 12a - 6 \cdot \dfrac{a - 2a^2 - 2}{5a(a^2 + 1)} = 12a + \dfrac{12a^2 - 6a + 12}{5a(a^2 + 1)}$

d $\left.\begin{array}{l} K = \dfrac{3y - 2}{2y - 1} \\ y = \dfrac{4x}{x - 1} \end{array}\right\}$ $K = \dfrac{3\left(\dfrac{4x}{x - 1}\right) - 2}{2\left(\dfrac{4x}{x - 1}\right) - 1} = \dfrac{\left(3\left(\dfrac{4x}{x - 1}\right) - 2\right) \cdot (x - 1)}{\left(2\left(\dfrac{4x}{x - 1}\right) - 1\right) \cdot (x - 1)} = \dfrac{3 \cdot 4x - 2(x - 1)}{2 \cdot 4x - (x - 1)} = \dfrac{10x + 2}{7x + 1}$

e $\dfrac{a + b}{b + 2} = \dfrac{3}{a}$
$a(a + b) = 3(b + 2)$
$a^2 + ab = 3b + 6$
$ab - 3b = -a^2 + 6$
$(a - 3)b = -a^2 + 6$
$b = \dfrac{-a^2 + 6}{a - 3}$

f $\dfrac{3x + 2}{x - 1} = \dfrac{6y + 1}{y + 3}$
$(3x + 2)(y + 3) = (x - 1)(6y + 1)$
$3xy + 9x + 2y + 6 = 6xy + x - 6y - 1$
$-3xy + 8x + 8y + 7 = 0$

$-3xy + 8y = -8x - 7$	$-3xy + 8x = -8y - 7$
$y(-3x + 8) = -8x - 7$	$x(-3y + 8) = -8y - 7$
$y = \dfrac{-8x - 7}{-3x + 8}$	$x = \dfrac{-8y - 7}{-3y + 8}$
$y = \dfrac{8x + 7}{3x - 8}$	$x = \dfrac{8y + 7}{3y - 8}$

Bladzijde 193

30 $(-4, 42)$ invullen geeft $42 = \frac{1}{2} \cdot (-4)^3 + a \cdot (-4)^2 + b \cdot -4 + 6$

$$42 = -32 + 16a - 4b + 6$$
$$16a - 4b = 68$$

$(2, 12)$ invullen geeft $12 = \frac{1}{2} \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 6$

$$12 = 4 + 4a + 2b + 6$$
$$4a + 2b = 2$$

$$\begin{cases} 16a - 4b = 68 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases} \left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right| \text{ geeft } \begin{cases} 16a - 4b = 68 \\ 8a + 4b = 4 \end{cases}$$

$$24a = 72 \quad (+)$$

$$\left.\begin{matrix} a = 3 \\ 4a + 2b = 2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 4 \cdot 3 + 2b = 2 \\ 12 + 2b = 2 \\ 2b = -10 \\ b = -5 \end{matrix}$$

Dus $a = 3$ en $b = -5$.

31 **a** $px^3 + 2px^2 + x^2 + 2\frac{1}{4}x = 0$

$x\left(px^2 + 2px + x + 2\frac{1}{4}\right) = 0$

$x = 0 \vee px^2 + 2px + x + 2\frac{1}{4} = 0$

$x = 0 \vee px^2 + (2p + 1)x + 2\frac{1}{4} = 0$

De vergelijking heeft drie oplossingen als $px^2 + (2p + 1)x + 2\frac{1}{4} = 0$ twee oplossingen heeft.

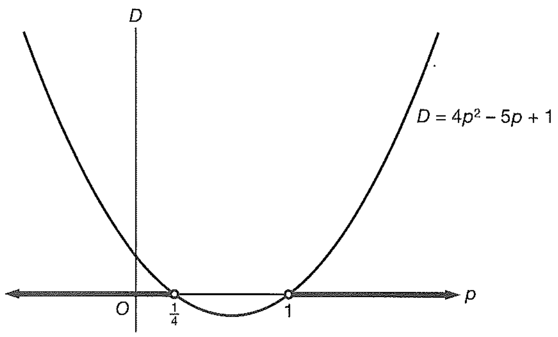
$p = 0$ geeft $x + 2\frac{1}{4} = 0$, dus één oplossing.

$$\left.\begin{matrix} \text{Voor } p \neq 0 \text{ is } D = (2p+1)^2 - 4 \cdot p \cdot 2\frac{1}{4} = 4p^2 + 4p + 1 - 9p = 4p^2 - 5p + 1 \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{matrix}\right\} 4p^2 - 5p + 1 > 0$$

$4p^2 - 5p + 1 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$

$p = \dfrac{5 - 3}{8} = \frac{1}{4} \vee p = \dfrac{5 + 3}{8} = 1$



De vergelijking heeft drie oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < \frac{1}{4} \vee p > 1$.

b $2px^4 - px^3 + 5x^3 + 2x^2 = 0$

$x^2(2px^2 - px + 5x + 2) = 0$

$x^2 = 0 \vee 2px^2 - px + 5x + 2 = 0$

$x = 0 \vee 2px^2 + (-p + 5)x + 2 = 0$

De vergelijking heeft precies één oplossing als $2px^2 + (-p + 5)x + 2 = 0$ geen oplossingen heeft.

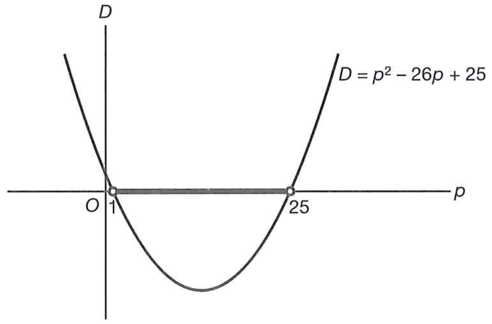
$p = 0$ geeft $5x + 2 = 0$, dus één oplossing.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Voor } p \neq 0 \text{ is } D = (-p + 5)^2 - 4 \cdot 2p \cdot 2 = p^2 - 10p + 25 - 16p = p^2 - 26p + 25 \\ \text{geen oplossingen als } D < 0\end{array}\right\} p^2 - 26p + 25 < 0$$

$p^2 - 26p + 25 = 0$

$(p - 1)(p - 25) = 0$

$p = 1 \vee p = 25$



De vergelijking heeft precies één oplossing voor $1 < p < 25$.

32 $f(x) = \dfrac{10x}{x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 1) \cdot 10 - 10x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{10x^2 + 10 - 20x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$

rc van de raaklijn gelijk aan $-\frac{4}{5}$ geeft $\dfrac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{4}{-5}$

$-5(-10x^2 + 10) = 4(x^2 + 1)^2$

$50x^2 - 50 = 4(x^4 + 2x^2 + 1)$

$50x^2 - 50 = 4x^4 + 8x^2 + 4$

$4x^4 - 42x^2 + 54 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$4u^2 - 42u + 54 = 0$

$D = 42^2 - 4 \cdot -4 \cdot -54 = 900$

$u = \dfrac{-42 - 30}{-8} = 9 \vee u = \dfrac{-42 + 30}{-8} = 1\frac{1}{2}$

$x^2 = 9 \vee x^2 = 1\frac{1}{2}$

$x = 3 \vee x = -3 \vee x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$

$x = 3 \vee x = -3 \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{6} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{6}$

vold. vold. vold. vold.

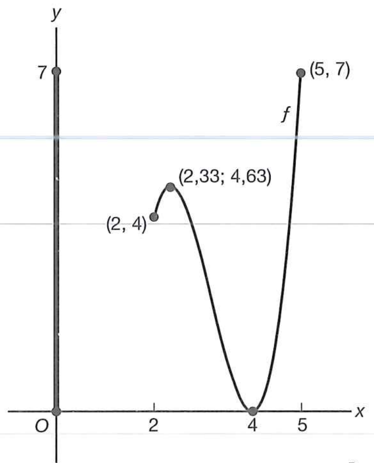
33 **a** Voer in $y_1 = (2x - 3)(x - 4)^2$.

Optie maximum geeft $x \approx 2{,}33$ en $y \approx 4{,}63$.

Optie minimum geeft $x = 4$ en $y = 0$.

Dus min. is $f(4) = 0$ en max. is $f(2{,}33) \approx 4{,}63$.

b



$f(2) = 4$ en $f(5) = 7$, dus $B_f = [0, 7]$.

c $\left.\begin{array}{l} f(x) = (2x-3)(x-4)^2 \\ k\colon y = 2x-3 \end{array}\right\}$ $(2x-3)(x-4)^2 = 2x-3$

$2x-3 = 0 \vee (x-4)^2 = 1$

$2x = 3 \vee x-4 = 1 \vee x-4 = -1$

$x = 1\frac{1}{2} \vee x = 5 \vee x = 3$

$x = 1\frac{1}{2}$ geeft $y = 2 \cdot 1\frac{1}{2} - 3 = 0$
$x = 5$ geeft $y = 2 \cdot 5 - 3 = 7$
$x = 3$ geeft $y = 2 \cdot 3 - 3 = 3$
Dus de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en k zijn $\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$, $(5, 7)$ en $(3, 3)$.

d $\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 - 8x + 16 \\ k\colon y = 2x-3 \end{array}\right\}$ $x^2 - 8x + 16 = 2x - 3$

$x^2 - 10x + 19 = 0$

$(x-5)^2 - 25 + 19 = 0$

$(x-5)^2 = 6$

$x - 5 = \sqrt{6} \vee x - 5 = -\sqrt{6}$

$x = 5 + \sqrt{6} \vee x = 5 - \sqrt{6}$

$x = 5 + \sqrt{6}$ geeft $y = 2 \cdot \left(5 + \sqrt{6}\right) - 3 = 10 + 2\sqrt{6} - 3 = 7 + 2\sqrt{6}$

$x = 5 - \sqrt{6}$ geeft $y = 2 \cdot \left(5 - \sqrt{6}\right) - 3 = 10 - 2\sqrt{6} - 3 = 7 - 2\sqrt{6}$
Dus de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van g en k zijn
$\left(5 + \sqrt{6}, 7 + 2\sqrt{6}\right)$ en $\left(5 - \sqrt{6}, 7 - 2\sqrt{6}\right)$.

e $\left.\begin{array}{l} f(x) = (2x-3)(x-4)^2 \\ g(x) = x^2 - 8x + 16 \end{array}\right\}$ $(2x-3)(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$

$(2x-3)(x-4)^2 = (x-4)^2$

$2x - 3 = 1 \vee (x-4)^2 = 0$

$2x = 4 \vee x - 4 = 0$

$x = 2 \vee x = 4$

$x = 2$ geeft $y = (2 \cdot 2 - 3)(2-4)^2 = 4$
$x = 4$ geeft $y = (2 \cdot 4 - 3)(4-4)^2 = 0$
Dus de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van g en k zijn (2, 4) en (4,0).

34 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $\dfrac{2x}{x-2} = \dfrac{24}{x+1}$

$2x(x+1) = 24(x-2)$

$2x^2 + 2x = 24x - 48$

$2x^2 - 22x + 48 = 0$

$x^2 - 11x + 24 = 0$

$(x-8)(x-3) = 0$

$x = 8 \vee x = 3$

vold. vold.

b $f(x) \cdot g(x) = -24$ geeft $\dfrac{2x}{x-2} \cdot \dfrac{24}{x+1} = -24$

$\dfrac{48x}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{-24}{1}$

$48x = -24(x-2)(x+1)$

$-2x = (x-2)(x+1)$

$-2x = x^2 - x - 2$

$-x^2 - x + 2 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2 \vee x = 1$

c $4 \cdot f(x) - g(x) = 8$ geeft $4 \cdot \dfrac{2x}{x-2} - \dfrac{24}{x+1} = 8$

$$\frac{8x(x+1) - 24(x-2)}{(x-2)(x+1)} = 8$$

$$\frac{8x^2 + 8x - 24x + 48}{(x-2)(x+1)} = 8$$

$$\frac{8x^2 - 16x + 48}{(x-2)(x+1)} = 8$$

$$\frac{x^2 - 2x + 6}{(x-2)(x+1)} = 1$$

$x^2 - 2x + 6 = (x-2)(x+1)$
$x^2 - 2x + 6 = x^2 + x - 2x - 2$
$-x + 8 = 0$
$x = 8$
voldoet

d $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x-2) \cdot 2 - 2x \cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{2x - 4 - 2x}{(x-2)^2} = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$

$g(x) = \dfrac{24}{x+1}$ geeft $g'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot 0 - 24 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{-24}{(x+1)^2}$

$1\frac{1}{2} \cdot f'(x) - g'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2} \cdot \dfrac{-4}{(x-2)^2} - \dfrac{-24}{(x+1)^2} = 0$

$$\frac{-6}{(x-2)^2} = \frac{-24}{(x+1)^2}$$

$-6(x+1)^2 = -24(x-2)^2$
$(x+1)^2 = 4(x-2)^2$
$x^2 + 2x + 1 = 4(x^2 - 4x + 4)$
$x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 16x + 16$
$-3x^2 + 18x - 15 = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x-5)(x-1) = 0$
$x = 5 \vee x = 1$

35 **a** $a + b = 150$ en $8{,}6a + 7{,}0b = 150 \cdot 7{,}9$

$$\begin{cases} a + b = 150 \\ 8{,}6a + 7{,}0b = 1185 \end{cases} \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 7a + 7b = 1050 \\ 8{,}6a + 7b = 1185 \end{cases}$$

$$-1{,}6a = -135$$

$$\left.\begin{array}{r} a = 84{,}375 \\ a + b = 150 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 84{,}375 + b = 150 \\ b = 65{,}625 \end{array}$$

Dus $a = 84{,}375$ en $b = 65{,}625$.

b Stel hij neemt x ml van de oplossing van 15% en y ml van de oplossing van 30%.
Nu moet gelden $x + y = 600$ en $0{,}15x + 0{,}3y = 600 \cdot 0{,}22$.

$$\begin{cases} x + y = 600 \\ 0{,}15x + 0{,}3y = 132 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 10 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 3y = 1800 \\ 1{,}5x + 3y = 1320 \end{cases}$$

$$1{,}5x = 480$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 320 \\ x + y = 600 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 320 + y = 600 \\ y = 280 \end{array}$$

Hij moet 320 ml van de oplossing van 15% en 280 ml van de oplossing van 30% mengen.

Bladzijde 194

36 $\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle EDC \text{ (F-hoeken)}\\ \angle ABC = \angle DEC \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DEC$

$\begin{array}{c|c} AC & AB \\ \hline CD & DE \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 8 & 5 \\ \hline 5 & DE \end{array}$

Dus $DE = \dfrac{5 \cdot 5}{8} = 3\frac{1}{8}$.

$\left.\begin{array}{l}\angle ABD = \angle BDE \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle BAE = \angle AED \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABS \backsim \triangle EDS$

Stel $DS = x$, dus $BS = 5 - x$.

$\begin{array}{c|c} AB & BS \\ \hline DE & DS \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 5 & 5 - x \\ \hline 3\frac{1}{8} & x \end{array}$

Dus $5x = 3\frac{1}{8}(5 - x)$

$5x = 15\frac{5}{8} - 3\frac{1}{8}x$

$8\frac{1}{8}x = 15\frac{5}{8}$

$x = \dfrac{15\frac{5}{8}}{8\frac{1}{8}} = \dfrac{\frac{125}{8}}{\frac{65}{8}} = \frac{125}{8} \cdot \frac{8}{65} = \frac{125}{65} = 1\frac{12}{13}$

Dus $DS = 1\frac{12}{13}$.

37 In $\triangle ABC$ is $\angle A = 45°$, dus $BC = AB = x + x + 2 = 2x + 2$

In $\triangle BCD$ is $\tan(55°) = \dfrac{2x + 2}{x + 2}$

Voer in $y_1 = \tan(55)$ en $y_2 = \dfrac{2x + 2}{x + 2}$.

Intersect geeft $x = 1{,}49...$

Dus $AB = 2 \cdot 1{,}49... + 2 \approx 4{,}99$.

In $\triangle BCD$ is $CD^2 = (x + 2)^2 + (2x + 2)^2 = (1{,}49... + 2)^2 + (2 \cdot 1{,}49... + 2)^2 = 37{,}18...$

Dus $CD = \sqrt{37{,}18...} \approx 6{,}10$.

38 $\angle ADC = 180° - 62° - 48° = 70°$

$\angle BDC = 180° - 70° = 110°$

$\angle DBC = 180° - 62° - 48° - 25° = 45°$

In $\triangle ABD$ is $\dfrac{6}{\sin(62°)} = \dfrac{AD}{\sin(48°)} = \dfrac{AC}{\sin(70°)}$

geeft $AD = \dfrac{6\sin(48°)}{\sin(62°)} = 5{,}04...$ en $AC = \dfrac{6\sin(70°)}{\sin(62°)} = 6{,}38...$

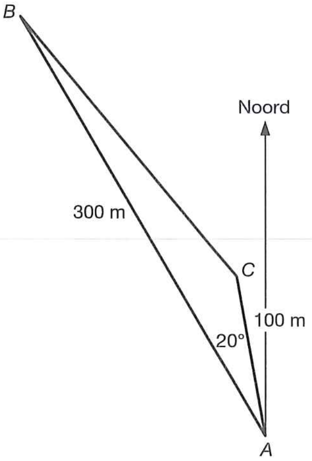
In $\triangle BCD$ is $\dfrac{6}{\sin(45°)} = \dfrac{BD}{\sin(25°)} = \dfrac{BC}{\sin(110°)}$

geeft $BD = \dfrac{6\sin(25°)}{\sin(45°)} = 3{,}58...$ en $BC = \dfrac{6\sin(110°)}{\sin(45°)} = 7{,}97...$

De omtrek van $\triangle ABC = 5{,}04... + 3{,}58... + 7{,}97... + 6{,}38... \approx 23{,}0$.

Bladzijde 195

39



In 1 minuut heeft zij 100 m afgelegd.
$BC^2 = 300^2 + 100^2 - 2 \cdot 300 \cdot 100 \cdot \cos(20°) = 43618{,}44...$ geeft $BC = 208{,}85...$ m
Maaike heeft $208{,}85... + 100 - 300 \approx 9$ meter extra afgelegd.

40 In $\triangle BCS$ is $BC = 2$ en $\angle BSC = 30°$, dus $BS = 2 \cdot 2 = 4$ en $CS = 2\sqrt{3}$.
$AS = BS = 4$ en $DS = CS = 2\sqrt{3}$
In $\triangle ABD$ is $AB^2 = BD^2 + AD^2$

$$AB^2 = \left(4 + 2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2$$

$$AB^2 = 16 + 16\sqrt{3} + 12 + 4$$

$$AB^2 = 32 + 16\sqrt{3}$$

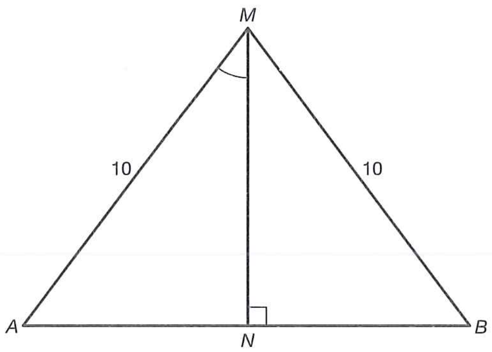
$$AB = \sqrt{32 + 16\sqrt{3}} = \sqrt{16(2 + \sqrt{3})} = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAS = \angle SCD \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ABS = \angle SDC \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABS \backsim \triangle DCS$$

$$\begin{array}{c|c} BS & AB \\ \hline DS & CD \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 4 & 4\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \hline 2\sqrt{3} & CD \end{array}$$

Dus $CD = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$.

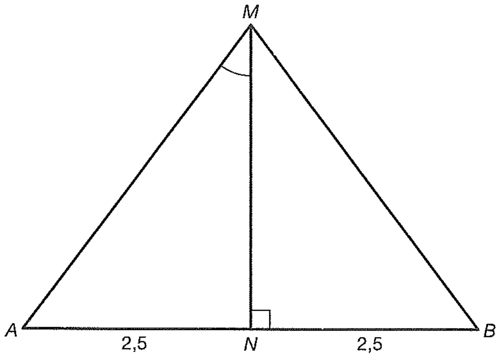
41 **a**



$\angle AMB = \dfrac{360°}{5} = 72°$, dus $\angle AMN = 36°$.

$\sin(36°) = \dfrac{AN}{10}$ geeft $AN = 10\sin(36°) = 5{,}87...$, dus $a = AB = 2 \cdot 5{,}87... \approx 11{,}8$.

b



$\sin(36°) = \dfrac{2,5}{AM}$ geeft $AM = \dfrac{2,5}{\sin(36°)} = 4,25...$

Oppervlakte gekleurde vlakdelen is $\pi \cdot 4,25...^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,25... \cdot 4,25... \cdot \sin(72°) \approx 13,8$.

Bladzijde 196

42 $O(ABCD) = DG \cdot AB = DG \cdot 14 = 112$ geeft $DG = 8$

In $\triangle AGD$ is $AG = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$, dus $BG = 8$.

In $\triangle BDG$ is $BD = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABD$ geeft

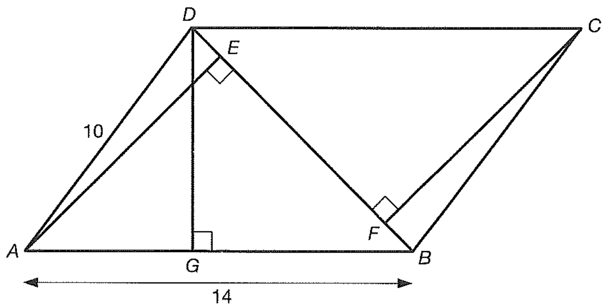
$BD \times AE = AB \times DG$

$8\sqrt{2} \cdot AE = 14 \cdot 8$

$AE = \dfrac{14 \cdot 8}{8\sqrt{2}} = \dfrac{14}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{14}{2}\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

In $\triangle ADE$ is $DE = \sqrt{10^2 - (7\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$.

$BF = DE = \sqrt{2}$, dus $EF = 8\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.



43 Stel $CS = x$.

In $\triangle BCS$ is $BS^2 + CS^2 = BC^2$

$BS^2 + x^2 = 100$

$BS^2 = 100 - x^2$

$BS = \sqrt{100 - x^2}$

$O(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$ geeft $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2\sqrt{100 - x^2} = 60$

$x\sqrt{100 - x^2 = 30}$

kwadrateren geeft

$x^2(100 - x^2) = 900$

$-x^4 + 100x^2 - 900 = 0$

$x^4 - 100x^2 + 900 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$u^2 - 100u + 900 = 0$

$(u - 90)(u - 10) = 0$

$u = 90 \vee u = 10$

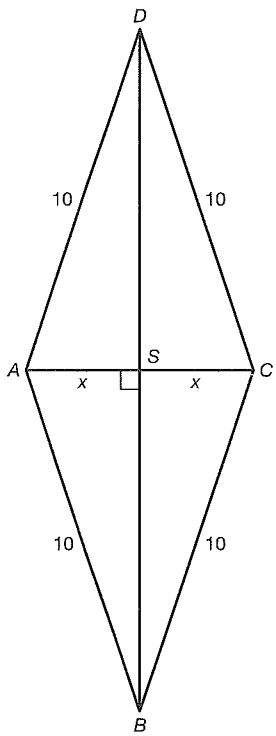
$x^2 = 90 \vee x^2 = 10$

$x = \sqrt{90} \vee x = -\sqrt{90} \vee x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$

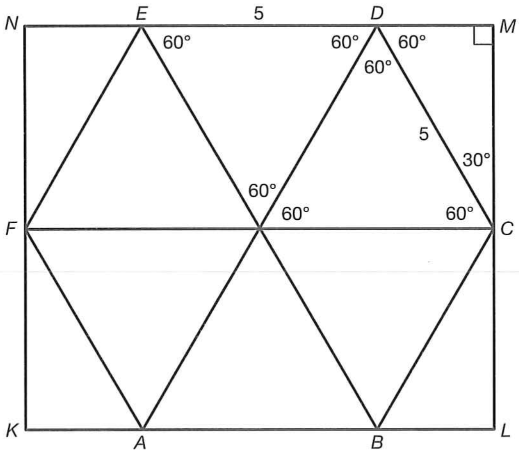
vold. vold. niet vold. vold. niet

$x = 3\sqrt{10} \vee x = \sqrt{10}$

De lengten van de diagonalen zijn $6\sqrt{10}$ en $2\sqrt{10}$.



44



In $\triangle MDC$ is $\angle M = 90°$, $\angle D = 60°$ en $DC = 5$, dus $MD = 2\frac{1}{2}$ en $MC = 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Dus $MN = 2\frac{1}{2} + 5 + 2\frac{1}{2} = 10$ en $LM = 2\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\frac{1}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Dit geeft $O(KLMN) = 10 \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$.

45 Stel $QR = x$, dan is $\left.\begin{array}{l} DR + QC = 5 - x \\ DR = QC \end{array}\right\} DR = \frac{1}{2}(5 - x)$

$AS = QR = x$, dus $DS = 5 - x$.

$O(\triangle DRS) = \frac{1}{2} \cdot DR \cdot DS = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(5 - x) \cdot (5 - x) = \frac{1}{4}(5 - x)^2$

$O(\triangle CPQ) = O(\triangle DRS) = \frac{1}{4}(5 - x)^2$

$$\begin{aligned} O(ABPQRS) &= O(ABCD) - O(\triangle DRS) - O(\triangle CPQ) \\ &= 5^2 - \tfrac{1}{4}(5 - x)^2 - \tfrac{1}{4}(5 - x)^2 \\ &= 25 - \tfrac{1}{2}(5 - x)^2 \end{aligned}$$

$O(ABPQRS) = 15$ geeft $25 - \frac{1}{2}(5 - x)^2 = 15$

$$\begin{aligned} & 10 = \tfrac{1}{2}(5 - x)^2 \\ & (5 - x)^2 = 20 \\ & 5 - x = \sqrt{20} \vee 5 - x = -\sqrt{20} \\ & x = 5 - \sqrt{20} \vee x = 5 + \sqrt{20} \end{aligned}$$

voldoet niet

Dus $AS = 5 - \sqrt{20} = 5 - \sqrt{4 \cdot 5} = 5 - 2\sqrt{5}$.

46 $SC \,//\, DE$ en $SE \,//\, DC$, dus $SCDE$ is een parallellogram.

$\left.\begin{array}{l} CS = ED = 1 \\ ES = CD = 1 \end{array}\right\} CS = ES = 1$

$BE = EC = x$ en $ES = 1$, dus $BS = x - 1$

$\left.\begin{array}{l} \angle ESC = \angle ASB \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle ECS = \angle BAS \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle ESC \backsim \triangle BSA$

AB	BS	geeft	1	$x - 1$
EC	ES		x	1

Dus $x(x - 1) = 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$

$x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

vold. niet   vold.

Dus $EC = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Bladzijde 197

47 Stel $AD = x$, dan is $AB = 2x$, $BD = x\sqrt{3}$ en $BC = x\sqrt{3}$.

$O(ABCD) = O(\triangle ABD) + O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{3} \cdot x\sqrt{3} = \frac{1}{2}x^2\sqrt{3} + 1\frac{1}{2}x^2$

$O(ABCD) = 7\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{2}x^2\sqrt{3} + 1\frac{1}{2}x^2 = 7\frac{1}{2}$

$$x^2\sqrt{3} + 3x^2 = 15$$

$$x^2(\sqrt{3} + 3) = 15$$

$$x^2 = \frac{15}{\sqrt{3} + 3}$$

$$x = \sqrt{\frac{15}{\sqrt{3} + 3}} \vee x = -\sqrt{\frac{15}{\sqrt{3} + 3}}$$

vold. niet

$BD = \sqrt{\frac{15}{\sqrt{3} + 3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{45}{\sqrt{3} + 3}}$ en $AB = 2 \cdot \sqrt{\frac{15}{\sqrt{3} + 3}}$

48 Het langste lijnstuk binnen een cirkel is een middellijn. Gedurende het rollen is er altijd een middellijn die de afstand bepaalt tot het punt dat op dat moment het verst van de vijfhoek afligt. Zolang de cirkel langs een zijde rolt, wordt de buitengrens dus een lijnstuk evenwijdig aan de zijde. Als de cirkel om een hoekpunt rolt, beschrijft de middellijn een cirkelboog. De oppervlakte van het gebied dat door de cirkel bestreken wordt, is dus gelijk aan vijf vierkantjes met zijde 4 en vijf cirkelsectoren (taartpunten) die samen een cirkel vormen met straal 4. De gevraagde oppervlakte is: $5 \cdot 4^2 + \pi \cdot 4^2 = 16(5 + \pi)$.