VWO
B
DEEL 1

GETAL & RUIMTE

1

NOORDHOFF UITGEVERS

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo B deel 1
Samen met de delen 2, 3 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld.
De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur.
De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken, waarbij opgemerkt moet worden dat in het laatste hoofdstuk van deel 3 een keuzeonderwerp wordt aangeboden en dat in het vierde hoofdstuk van deel 4 de examentraining aan bod komt.
In de vier hoofdstukken van dit boek, die elk een studielast van ongeveer 30 uur hebben, komen gedeelten van de domeinen B (Functies, grafieken en vergelijkingen), C (Differentiaal- integraalrekening) en E (Meetkunde met coördinaten) aan de orde.
Afhankelijk van de verdeling van de studielast over de leerjaren kan deel 2 geheel of gedeeltelijk in de tweede helft van het vierde leerjaar worden doorgenomen.

Opbouw
Ook in de elfde editie is gekozen voor een paragraaf voorkennis waarmee elk hoofdstuk begint. In deze paragraaf wordt de voor het hoofdstuk vereiste voorkennis aangeboden. Elke paragraaf wordt afgesloten met een terugblik. In deze terugblik worden alle aspecten van de paragraaf op een rijtje gezet, vaak toegelicht met enkele voorbeelden. Aan het eind van elk hoofdstuk staat de diagnostische toets, die per paragraaf de basisvaardigheden toetst. Achter in het boek staan de gemengde opgaven, opgaven uit de Wiskunde Olympiade en het trefwoordenregister.

Testopgaven en denkopgaven
Nieuw in deze editie zijn de testopgaven en de denkopgaven.
Met de testopgaven, aangegeven met een T, wordt een vorm van differentiatie aangeboden. Leerlingen kunnen na het foutloos maken van een testopgave enkele opgaven overslaan.
De denkopgaven zijn aangegeven met een D en bieden een probleem aan dat bij de behandelde theorie hoort, maar dat vaak door de iets andere invalshoek of het ontbreken van tussenstappen een extra beroep doet op het denkvermogen van de leerling.
Met de opgaven uit de Wiskunde Olympiade krijgen de leerlingen extra training met het oplossen van wiskundeproblemen.

Online materiaal
Het docentenpakket online bevat een studiewijzer bij elk hoofdstuk. Verder is onder meer het presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen.
Nieuw in online is een oefenproefwerk bij elk hoofdstuk.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2014

Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit voorgaande hoofdstukken die je in het hoofdstuk paraat moet hebben.

O 2 **Oriënterende opgave**
Opgaven waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

T 3 [►►6] **Testopgave**
Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder gaan met de opgave die achter ►► staat.

4 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R 5 **Reflecterende opgave**
In een reflectieopgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A 6 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

D 7 **Denkopgave**
Een D-opgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt in de opgave een probleem op een iets andere manier gepresenteerd.

[►GR]
Verwijzing naar een module in de handleiding bij de grafische rekenmachine.

[►WERKBLAD]
Verwijzing naar een werkblad.

[►DEMO]
Verwijzing naar een demo.

Inhoud

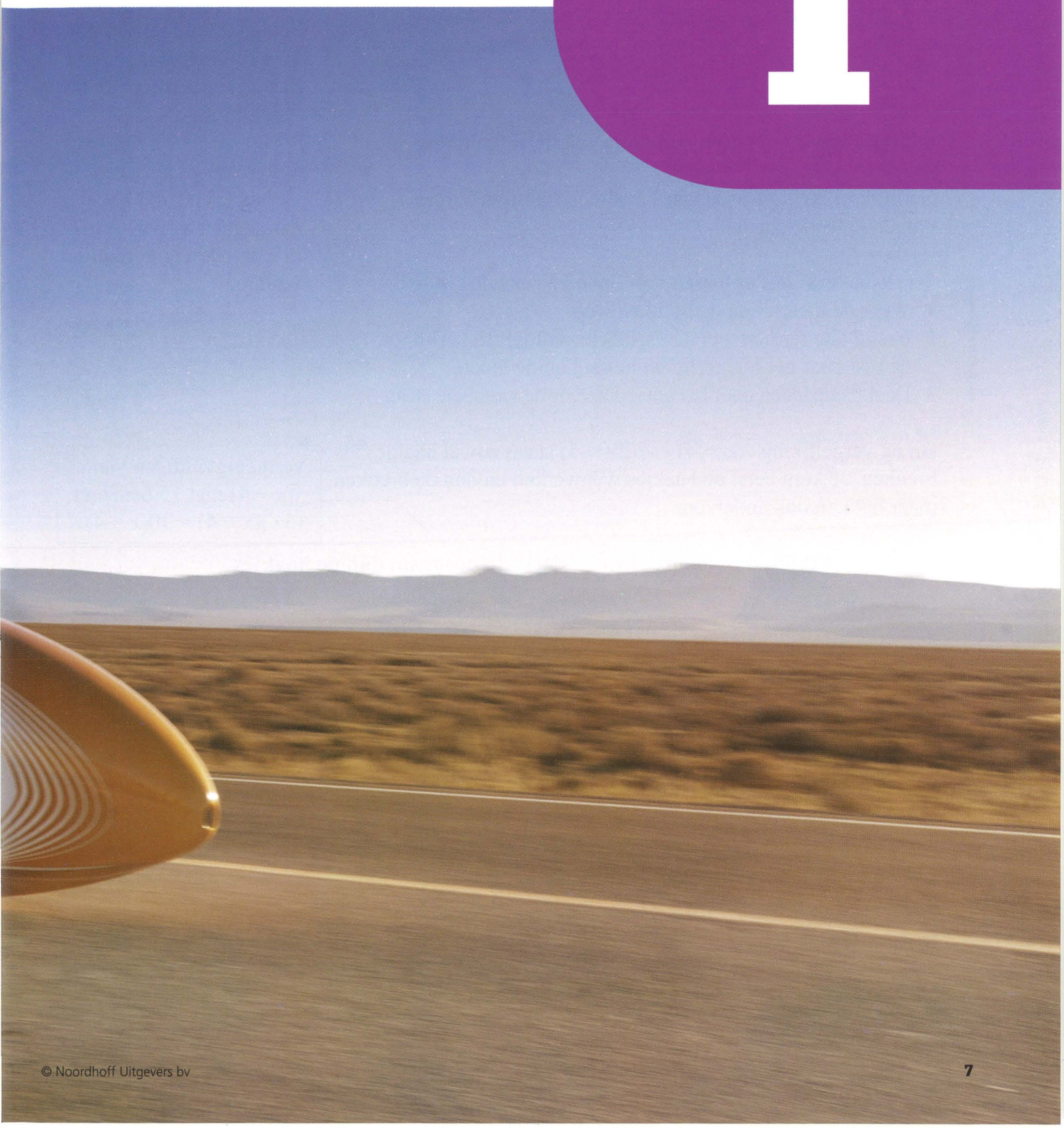
Bij een constante snelheid is de afgelegde weg een lineaire functie van de tijd. Door op twee tijdstippen te meten welke afstand is afgelegd, is de formule bij deze functie op te stellen. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn. Zo is bij elke lineaire functie de formule op te stellen als je van twee punten van de grafiek de coördinaten weet.

Wat leer je?

- Opstellen van de formule van een lijn waarvan twee punten zijn gegeven.
- Werken met functies en vergelijkingen met een parameter.
- Wat het domein en het bereik van een functie is.
- Het begrip inverse functie
- Hoe je met de grafische rekenmachine vergelijkingen en ongelijkheden oplost en extreme waarden berekent.

Functies en grafieken

1



1

Voorkennis Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden

Theorie A Lineaire vergelijkingen

De vergelijking $6x - 8 = 2x - 7$ is een voorbeeld van een lineaire vergelijking. In deze vergelijking is x de **variabele**. Je lost zo'n vergelijking als volgt op.

$6x - 8 = 2x - 7$ — Term met x naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid.

$4x = 1$ — Deel linker- en rechterlid door het getal dat voor x staat.

$x = \frac{1}{4}$

In plaats van $x = \frac{1}{4}$ is een oplossing van de vergelijking, zeggen we ook $x = \frac{1}{4}$ **voldoet**.

Gebruik bij het oplossen van lineaire vergelijkingen het volgende werkschema.

Vervang je in een vergelijking de variabele door een getal en klopt het, dan zeggen we dat het getal voldoet aan de vergelijking. Het getal is dus een oplossing van de vergelijking.

Vul je een getal in voor de variabele en klopt het niet, dan zeggen we dat het getal niet aan de vergelijking voldoet.

Werkschema: het oplossen van lineaire vergelijkingen

1 Werk de haakjes en de breuken weg.
2 Breng alle termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Bij de vergelijking $\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ staan zowel haakjes als breuken. Je kunt eerst de haakjes wegwerken en dan de breuken, maar het kan ook andersom.

Vermenigvuldigen van $\frac{2}{3}(x - 4)$ met 15 betekent $15 \cdot \frac{2}{3}(x - 4) = 10(x - 4)$.

Eerst de haakjes, dan de breuken

$\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$

$\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = \frac{2}{5}x + 1$ — $\times 15$

$10x - 40 = 6x + 15$

$4x = 55$

$x = \frac{55}{4} = 13\frac{3}{4}$

Eerst de breuken, dan de haakjes

$\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ — $\times 15$

$10(x - 4) = 3(2x + 5)$

$10x - 40 = 6x + 15$

$4x = 55$

$x = \frac{55}{4} = 13\frac{3}{4}$

1 Los op.

a $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$

b $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$

c $\dfrac{2t - 3}{4} = t - 1\frac{1}{3}$

d $1{,}6(2x - 1) = 1{,}4x - 2$

e $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$

f $5 - \dfrac{3t - 1}{6} = \dfrac{5t + 1}{4} - \dfrac{2t + 3}{3}$

Theorie B Lineaire ongelijkheden

Voorbeelden van lineaire ongelijkheden zijn $2x - 1 < 5x + 3$, $6a + 5 \geq 8 - (a + 3)$ en $\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}(p - 5) \leq p + 2$.

Denk bij het oplossen van lineaire ongelijkheden aan het omklappen van het teken < of > in het geval je het linker- en rechterlid door een negatief getal deelt.
Zo krijg je bij het oplossen van $2x - 1 < 5x + 3$

$2x - 1 < 5x + 3$
$-3x < 4$ — Omdat je beide leden door -3 deelt, klapt het teken < om in >.
$x > -1\frac{1}{3}$

$5 < 6$
$5 + 2 < 6 + 2$
$5 - 2 < 6 - 2$
$5 \cdot 2 < 6 \cdot 2$
$5 \cdot -2 > 6 \cdot -2$
$5 : -2 > 6 : -2$

Gebruik bij het oplossen van lineaire ongelijkheden het volgende werkschema.

Werkschema: het oplossen van lineaire ongelijkheden
1. Werk de haakjes en de breuken weg.
2. Breng alle termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
3. Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat. Als dit getal negatief is, dan klap je het teken < of > om.

Voorbeeld

Los op.

a $6a + 5 \geq 8 - (a + 3)$

b $\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}(p - 5) \leq p + 2$

Uitwerking

a $6a + 5 \geq 8 - (a + 3)$
$6a + 5 \geq 8 - a - 3$
$7a \geq 0$
$a \geq 0$ ← Je deelt door 7, dus het teken klapt niet om.

b $\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}(p - 5) \leq p + 2$ $\times 12$
$9p - 8(p - 5) \leq 12p + 24$
$9p - 8p + 40 \leq 12p + 24$
$-11p \leq -16$
$p \geq 1\frac{5}{11}$ ← Je deelt door -11, dus het teken klapt om.

2 Los op.

a $3x > 5x$

b $\frac{1}{6}x + 3 < \frac{1}{2}x - 2$

c $\frac{3p - 4}{3} \leq 2p - 1\frac{1}{6}$

d $1{,}5(1{,}6x - 2) < 2{,}5(1{,}4x - 3)$

e $\frac{3}{8}(5x - 2) > \frac{1}{4}(2x - 5)$

f $10 - \frac{2a - 3}{6} \geq \frac{4a - 1}{5} - \frac{3a + 2}{15}$

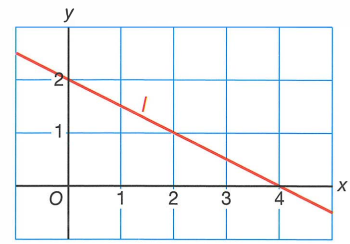
1

1.1 Lineaire functies

Theorie A De grafische rekenmachine

[▶ GR] Bij het vak wiskunde werk je regelmatig met de grafische rekenmachine (GR). In de handleiding GR staat hoe je dit apparaat kunt gebruiken.
Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

O 1 **a** Gegeven is de lijn k: $y = 2x + 3$.
Welke informatie geeft het getal 2 over de lijn k?
En het getal 3?
b In figuur 1.1 is de lijn l getekend. Stel de formule op van l.
c Stel de formule op van de lijn m die door het punt $(0, -1)$ gaat en evenwijdig is met de lijn l in figuur 1.1.



figuur 1.1

Theorie B Richtingscoëfficiënt

De algemene vorm van een **lineaire functie** f is $f(x) = ax + b$ met a ongelijk aan 0. De grafiek van f is een rechte lijn.
De **richtingscoëfficiënt** is a en het snijpunt met de y-as is $(0, b)$.

Is $a = 0$ dan heb je met een **constante functie** te maken.

Van de lijn l: $y = 3x + 4$ is de richtingscoëfficiënt 3.
Notatie $rc_l = 3$.
De lijn m: $y = 3x - 2$ is **evenwijdig** met de lijn l, want ze hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.

$rc_l = 3$ betekent:
1 naar rechts en 3 omhoog.

Van de lijn n: $y = 5$ is de richtingscoëfficiënt 0.
Dus de lijn n is een **horizontale lijn.**

n: $y = 5$ ofwel
n: $y = 0x + 5$.

De formule van een functie wordt ook het **functievoorschrift** van de functie genoemd.

De lineaire functie met functievoorschrift $f(x) = ax + b$ heeft als grafiek de rechte lijn $y = ax + b$. Van deze lijn is a de richtingscoëfficiënt en $(0, b)$ het snijpunt met de y-as.
Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

De lijn $y = b$ is de horizontale lijn door het punt $(0, b)$.
Van een horizontale lijn is de richtingscoëfficiënt 0.

Voorbeeld

Stel de formule op van de lijn k door het punt $A(18, 7)$ die evenwijdig is met de lijn m: $y = \frac{1}{2}x + 13$.

Uitwerking

Stel k: $y = ax + b$.

$k \,//\, m$, dus $a = \text{rc}_m = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(18, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 18 + b = 7 \\ 9 + b = 7 \\ b = -2 \end{array}$$

Dus k: $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Opgave 2 is een testopgave.
Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld begrijpt, maak dan de T-opgave. Gaat dit foutloos, dan kun je verder gaan met de opgave die achter ►► staat. Lukt opgave 2 niet, ga dan verder met opgave 3. Je kunt de testopgave ook overslaan en meteen met opgave 3 verdergaan.

T 2 [►► 6]

a De lijn k gaat door het punt $A(4, 3)$ en is evenwijdig met de lijn l: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
Stel de formule op van k.

b De lijn m: $y = ax + 3$ gaat door het punt $B(-4, 2)$.
Bereken a.

c De lijn n: $y = 2\frac{1}{2}x + b$ snijdt de x-as in hetzelfde punt als de lijn p: $y = -1\frac{1}{2}x + 6$.
Bereken b.

3 **a** De lijn l gaat door het punt $A(-2, 3)$ en $\text{rc}_l = -2$.
Stel de formule op van l.

b De lijn k gaat door het punt $B(-5, 21)$ en is evenwijdig met de lijn m: $y = 4x - 6$.
Stel de vergelijking op van k.

In plaats van de formule van de lijn zeggen we ook wel de vergelijking van de lijn.

4 De lijn p gaat door het punt $C(-18, 30)$ en is evenwijdig met de lijn q: $y = -\frac{1}{3}x$.

a Stel de formule op van p.

b In welk punt snijdt p de x-as? En in welk punt de y-as?

5 Gegeven is de lijn k: $y = ax + 10$.

a Bereken a in het geval k de x-as in het punt $P(-20, 0)$ snijdt.

b Bereken a in het geval k door het punt $Q(2, -4)$ gaat.

c Is er een a waarvoor k door het punt $O(0, 0)$ gaat? Licht toe.

A 6 Gegeven zijn de lijnen k: $y = \frac{1}{2}x + 2$, l: $y = ax - 4$ en m: $y = -2x + b$.

a Voor welke b ligt het punt $P(-8, 0)$ op m?

b Voor welke a en b zijn m en l evenwijdige lijnen en ligt het punt $Q(10, 7)$ op m?

c Voor welke a en b gaan alle drie de lijnen door het punt $R(8, 6)$?

d Voor welke a en b snijden k, l en m elkaar in hetzelfde punt op de x-as?

D 7 Gegeven zijn de lijnen k: $y = ax + 1$ en l: $y = 2ax - 2a$. Alle lijnen k gaan door het punt A en alle lijnen l gaan door het punt B.

a Geef de coördinaten van A en B.

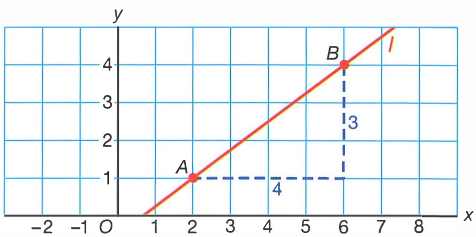
b Voor welke waarde van a snijden k en l elkaar in het punt A? En voor welke a in het punt B?

c Voor welke waarde van a snijden k en l elkaar in het punt C met $x_C = 10$? Wat is de y-coördinaat van C?

O 8 De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$. Zie figuur 1.2.

a Voor de lijn l geldt:
ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus
ga je 1 naar rechts, dan ga je ... omhoog.
Dus $rc_l = ...$

b In figuur 1.2 zie je $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$ en $y_B - y_A = 4 - 1 = 3$.
Hoe kun je met $y_B - y_A$ en $x_B - x_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?



figuur 1.2 Met behulp van de coördinaten van de punten A en B kun je rc_l berekenen.

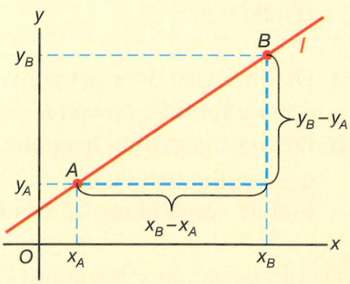
Theorie C Een lijn door twee gegeven punten

Van een lijn l waarvan de coördinaten van twee punten bekend zijn, is de richtingscoëfficiënt te berekenen.

Voor de lijn l in figuur 1.3 geldt:
Ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog.
Dus ga je 1 naar rechts, dan ga je $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog,

dus $rc_l = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Dus de richtingscoëfficiënt van de lijn l door A en B bereken je door de toename van de y-coördinaten te delen door de toename van de x-coördinaten.

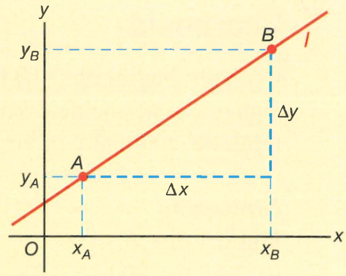


figuur 1.3

Dus $\text{rc}_l = \dfrac{\text{toename van de } y\text{-coördinaten}}{\text{bijbehorende toename van de } x\text{-coördinaten}}$.

Voor de toename van de y-coördinaten schrijven we Δy.
De bijbehorende toename van de x-coördinaten is Δx.

$$\text{rc}_l = \frac{y(\text{rechterpunt}) - y(\text{linkerpunt})}{x(\text{rechterpunt}) - x(\text{linkerpunt})}$$



figuur 1.4

De richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten A en B is
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Voorbeeld

Stel de formule op van de lijn l door de punten $A(2, -1)$ en $B(6, 5)$.

Uitwerking
Stel l: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5 - -1}{6 - 2} = 1\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, -1) \end{array}\right\}$ $1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1$
$3 + b = -1$
$b = -4$

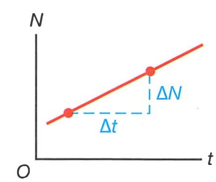
Dus l: $y = 1\frac{1}{2}x - 4$.

Neem je $\Delta y = -1 - 5 = -6$
dan is de bijbehorende
$\Delta x = 2 - 6 = -4$.
Ook nu is $\text{rc}_l = 1\frac{1}{2}$.

Voor het berekenen van b
kun je ook de coördinaten
van B gebruiken.

Bij toepassingen worden meestal andere letters
dan x en y gebruikt.
In de formule $N = at + b$ is N **uitgedrukt in** t.
De formule geeft een **lineair verband** tussen N en t.
We zeggen ook wel N is een lineaire functie van t.

Zijn bij twee waarden van t de bijbehorende waarden
van N gegeven, dan kun je de formule van N als functie
van t opstellen.



$$\text{rc} = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}}$$

Is N een lineaire functie van t, dan is
$$N = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

Bij $y = ax + b$ is
- y een functie van x
- y uitgedrukt in x.

1

Voorbeeld

Een auto begint op $t = 0$ te remmen zo, dat de snelheid lineair afneemt.
Op $t = 2$ is de snelheid 90 km/uur, drie seconden later is de snelheid 45 km/uur.
Druk de snelheid v in km/uur uit in de tijd t in seconden.

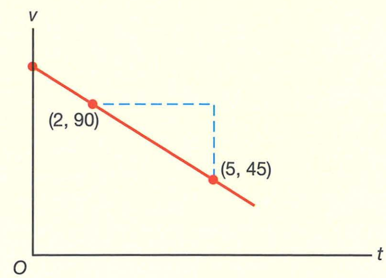
Uitwerking

Stel $v = at + b$.

$$\left.\begin{array}{l} t = 2 \text{ en } v = 90 \\ t = 5 \text{ en } v = 45 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{45 - 90}{5 - 2} = -15$$

$$\left.\begin{array}{l} v = -15t + b \\ t = 2 \text{ en } v = 90 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -15 \cdot 2 + b = 90 \\ -30 + b = 90 \\ b = 120 \end{array}$$

Dus $v = -15t + 120$.



T 9 [▶▶13]

a De lijn k gaat door de punten $A(8, 8)$ en $B(20, 11)$ en de lijn l gaat door de punten $C(2, 14)$ en $D(50, -10)$.
Stel van de lijnen k en l de formule op en bereken de coördinaten van het snijpunt E van deze lijnen.

b Tussen M en N bestaat een lineair verband.
Voor $M = 5$ is $N = 62$ en voor $M = 20$ is $N = 86$.
Druk N uit in M en druk M uit in N.

10 Stel de vergelijking op van de lijn

a l door de punten $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$
b k door de punten $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$
c m door de punten $E(5, 3)$ en $F(-7, 3)$
d n door de punten $G(180, 360)$ en $H(160, 250)$.

11 **a** K is een lineaire functie van m.
Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.
Schrijf K als functie van m.

b F is een lineaire functie van R.
Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$.
Stel de formule op van F.

c In een assenstelsel met een horizontale n-as en een verticale g-as is de lijn door de punten $(6, 35)$ en $(10, 49)$ getekend.
Stel de formule op van deze lijn.

12 Tussen p en q bestaat een lineair verband.
Bij $q = 150$ hoort $p = 7{,}75$ en bij $q = 425$ hoort $p = 2{,}25$.

a Druk p uit in q en druk q uit in p.
b Bereken p voor $q = 250$ en bereken q voor $p = 4{,}25$.

A 13 Een auto rijdt met constante snelheid. Om 14:12 uur passeert de auto hectometerpaal 164,0 en om 14:18 uur paal 152,8.
Tussen het getal h op de hectometerpalen en de tijd t in minuten bestaat een lineair verband.
Neem $t = 0$ om 14:00 uur.

a Stel de formule op van h als functie van t.
b Hoe laat passeert de auto hectometerpaal 156,7?

D 14 Toon aan dat elke lijn door de punten $A(p, p + 1)$ en $B(2p, p + 2)$ met $p \neq 0$ de negatieve x-as snijdt.

O 15 De functie f geeft voor elke x de afstand tussen de getallen x en 0 op de getallenlijn. Dus $f(3) = 3$ en $f(-3) = 3$.

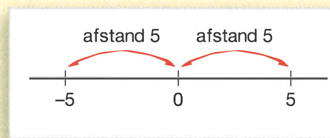
a Vul de tabel verder in.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$		3						3	

b Teken de grafiek van f.

Theorie D Modulusfuncties

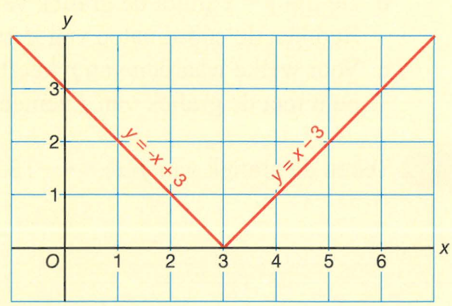
Er zijn twee getallen op de getallenlijn met afstand 5 tot 0.
Dat zijn -5 en 5.
We zeggen dat de **modulus** van 5 gelijk is aan 5 en dat de modulus van -5 gelijk is aan 5. Notatie $|5| = 5$ en $|-5| = 5$.
In plaats van modulus zeggen we ook wel **absolute waarde**.
Dus de absolute waarde van -10 is 10.



$|x|$ is de absolute waarde ofwel de modulus van x.
$|x|$ is de afstand van het getal x tot 0 op de getallenlijn.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ als } x \geq 0 \\ -x \text{ als } x < 0 \end{cases}$$

Voor de **modulusfunctie** $f(x) = |x - 3|$ geldt dus
$f(x) = x - 3$ als $x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 3$ en
$f(x) = -x + 3$ als $x - 3 < 0$, dus als $x < 3$.
De grafiek van f bestaat uit twee halve lijnen, zie figuur 1.5.



figuur 1.5

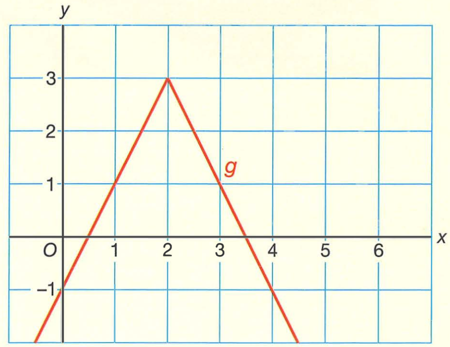
Voorbeeld

Teken de grafiek van $g(x) = 3 - |2x - 4|$.

Uitwerking

$g(x) = 3 - |2x - 4| = 3 - (2x - 4) = 3 - 2x + 4 = -2x + 7$ als $2x - 4 \geq 0$, dus als $x \geq 2$.

$g(x) = 3 - |2x - 4| = 3 - (-2x + 4) = 3 + 2x - 4 = 2x - 1$ als $2x - 4 < 0$, dus als $x < 2$.



16 Teken in verschillende figuren de grafiek van

a $f(x) = |\frac{1}{2}x - 1|$

b $g(x) = -|2x - 6|$

c $h(x) = 2 - |\frac{1}{3}x - 2|$

d $k(x) = 5 - |6 - 1\frac{1}{2}x|$

17 Gegeven is de functie f met het functievoorschrift $f(x) = x + 2 - |2x - 1|$.

a Teken de grafiek van f.

b Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafiek van f en de x-as.

A 18 De grafiek van $f(x) = ax - 1 - |3x - 4|$ gaat door het punt $(1, 0)$.

a Bereken a en teken de grafiek van f.

b De lijn $y = x$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B. Bereken de coördinaten van A en B.

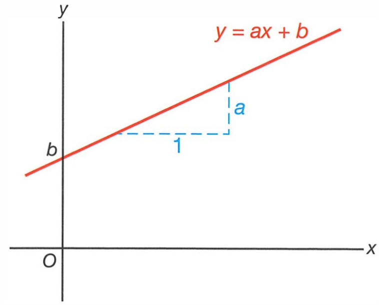
c Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = px$ geen enkel punt met de grafiek van f gemeen?

D 19 Teken de grafiek van $f(x) = 4 - |3 - |2x - 6||$.

Terugblik

Richtingscoëfficiënt

Bij een lineaire functie hoort een formule van de vorm $y = ax + b$ met $a \neq 0$.
De grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt a.
$\text{rc} = a$ betekent 1 naar rechts en a omhoog.



De lijn $y = ax + b$ snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

De lijn k: $y = 4$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 4)$.
Van een horizontale lijn is $\text{rc} = 0$.

Het opstellen van de formule van een lijn

Van de lijn m door $B(-1, 4)$ en $C(5, -8)$ krijg je de formule als volgt.

Stel m: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \dfrac{4 - -8}{-1 - 5} = -2$.

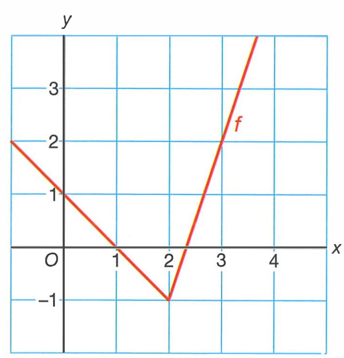
$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } B(-1, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -1 + b = 4 \\ 2 + b = 4 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus m: $y = -2x + 2$.

Bij toepassingen komen andere letters dan x en y voor.
Is het te betalen bedrag B een lineaire functie van het gasgebruik g, dan hoort hierbij de formule $B = ag + b$ met $a = \dfrac{\Delta B}{\Delta g}$.

Modulusfuncties

De functie $f(x) = x - 3 + |2x - 4|$ is een voorbeeld van een modulusfunctie.
Omdat $|2x - 4| = 2x - 4$ als $2x - 4 \geq 0$, dus als $x \geq 2$, is $f(x) = x - 3 + 2x - 4 = 3x - 7$ als $x \geq 2$.
Omdat $|2x - 4| = -2x + 4$ als $2x - 4 < 0$, dus als $x < 2$, is $f(x) = x - 3 - 2x + 4 = -x + 1$ als $x < 2$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.



1.2 Tweedegraadsvergelijkingen

O 20 **a** Het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25x = 0$ gaat anders dan het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25 = 0$.
Licht dit toe.
b Wat kun je zeggen van de oplossing van de vergelijking $4x^2 + 25 = 0$?
c Licht toe dat het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 0$ anders gaat dan het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 8$.

Theorie A Typen tweedegraadsvergelijkingen

De algemene vorm van een **kwadratische vergelijking**, ofwel **tweedegraadsvergelijking** is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$. Bij het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen kun je gebruikmaken van onderstaand schema. In het schema wordt onderscheid gemaakt tussen vergelijkingen met twee en met drie termen.

> $a \neq 0$ betekent
> a niet gelijk aan nul.

<table>
<tr><th colspan="2">Het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen</th></tr>
<tr><th colspan="2">Twee termen</th></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx = 0$
Aanpak: breng x buiten haakjes.
a $5x^2 - 7x = 0$
$x(5x - 7) = 0$
$x = 0 \vee 5x = 7$
$x = 0 \vee x = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$
b $3x = x^2$
$3x - x^2 = 0$
$x(3 - x) = 0$
$x = 0 \vee x = 3$</td><td>$ax^2 + c = 0$
Aanpak: herleid tot de vorm $x^2 = $ getal.
a $3x^2 - 30 = 0$
$3x^2 = 30$
$x^2 = 10$
$x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$
b $4x^2 + 40 = 0$
$4x^2 = -40$
$x^2 = -10$
geen oplossing</td></tr>
<tr><th colspan="2">Drie termen $ax^2 + bx + c = 0$</th></tr>
<tr><td>Het linkerlid is te ontbinden
Aanpak: ontbind het linkerlid.
a $x^2 - 6x - 7 = 0$
$(x + 1)(x - 7) = 0$
$x = -1 \vee x = 7$
b $x^2 = x + 6$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x + 2)(x - 3) = 0$
$x = -2 \vee x = 3$</td><td>Het linkerlid is niet te ontbinden
Aanpak: gebruik de abc-formule of ga kwadraatafsplitsen.
a $2x^2 - 5x - 7 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$
$x = \frac{5 - 9}{4} = -1 \vee x = \frac{5 + 9}{4} = 3\frac{1}{2}$
b $x^2 + 7x + 2 = 0$
$(x + 3\frac{1}{2})^2 - (3\frac{1}{2})^2 + 2 = 0$
$(x + 3\frac{1}{2})^2 = 10\frac{1}{4}$
$x + 3\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{41}{4}} \vee x + 3\frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{41}{4}}$
$x = -3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{41} \vee x = -3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{41}$</td></tr>
</table>

Het stap voor stap oplossen van een vergelijking, zoals in het schema op de vorige bladzijde is gedaan, heet **algebraïsch oplossen**.
De opdracht **bereken exact de oplossingen** betekent dat je langs algebraïsche weg de oplossingen berekent en deze niet benadert.

Je laat dus oplossingen als $x = \sqrt{3}$ en $x = \frac{1}{7}$ staan.

Oplossingen als $x = \dfrac{18}{12}$ en $x = \dfrac{2 - \sqrt{36}}{4}$ vereenvoudig je.

Dus $x = \dfrac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ en $x = \dfrac{2 - \sqrt{36}}{4} = \dfrac{2 - 6}{4} = -1$.

Door bij de oplossing $x = \dfrac{8 - \sqrt{48}}{4}$ een **factor voor het wortelteken te brengen**, krijg je

$$x = \frac{8 - \sqrt{48}}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}.$$

Denk er dus aan om bij wortels een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken te brengen.

Bij de ***abc*-formule** is aan de **discriminant** D te zien hoeveel oplossingen er zijn:
voor $D < 0$ is er geen oplossing
voor $D = 0$ is er één oplossing
voor $D > 0$ zijn er twee oplossingen.

Breng een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken,
dus niet $\sqrt{48} = 2\sqrt{12}$,
maar wel $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

De *abc*-formule
$ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$
geeft

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

met $D = b^2 - 4ac$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $(2x + 1)^2 = 25$
b $3x^2 - 6 = 3x$
c $4x^2 = 6x - 2$
d $x^2 - 3 = 5x$

Uitwerking

a $(2x + 1)^2 = 25$
$2x + 1 = 5 \vee 2x + 1 = -5$
$2x = 4 \vee 2x = -6$
$x = 2 \vee x = -3$

b $3x^2 - 6 = 3x$
$3x^2 - 3x - 6 = 0$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x + 1)(x - 2) = 0$
$x = -1 \vee x = 2$

c $4x^2 = 6x - 2$
$4x^2 - 6x + 2 = 0$
$2x^2 - 3x + 1 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$
$x = \dfrac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \dfrac{3 + 1}{4} = 1$

d $x^2 - 3 = 5x$
$x^2 - 5x - 3 = 0$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 - (2\frac{1}{2})^2 - 3 = 0$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 = 9\frac{1}{4}$
$x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{37}{4}} \vee x - 2\frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{37}{4}}$
$x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37} \vee x = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37}$

1

Probeer bij een tweedegraadsvergelijking met drie termen eerst te ontbinden in factoren. Lukt dat niet, gebruik dan pas de *abc*-formule of kwadraatafsplitsen.

R 21 In deze opgave ga je de *abc*-formule bewijzen. Dat gaat met behulp van kwadraatafsplitsen. Je begint met $ax^2 + bx + c = 0$.

Links en rechts delen door a geeft $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Vervolgens krijg je $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$.

a Licht de laatste stap toe.
b Maak het bewijs af.

T 22 [▶ ▶ 27] Los algebraïsch op.
a $2x^2 - 13x = 3(x - 10)$
b $3x^2 + 2x + 7 = 7(x + 1)$
c $100(x^2 - 1) = 525$
d $2(x - 3)^2 = 3x - 10$
e $5(4x - 1)(6x - 5) = 0$
f $\frac{1}{4}(2x - 3)^2 - 3 = 1$

23 Bereken exact de oplossingen.
a $(3x - 2)^2 = 36$
b $(4 - \frac{1}{2}x)^2 = 9$
c $x^2 + 6 = 5x$
d $x(x - 1) = 12$
e $2x^2 = 5x$
f $x^2 + 4 = 1$

24 Los algebraïsch op.
a $3x^2 - 6x = 24$
b $3x^2 - 6x = -3(x - 6)$
c $2x^2 - 3x = 2$
d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$
e $x^2 - 3x = 5(x - 3)$
f $2x^2 - 5x = 3x$

25 Bereken exact de oplossingen.
a $6 - x^2 = -2$
b $2x^2 = 9x + 5$
c $3(x + 2)^2 + 5 = 80$
d $\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 3 = 5$
e $-(2x - 1)^2 + 5 = 1$
f $8 - 3(4x - 5)^2 = 5$

26 Bereken exact de oplossingen.
a $x^2 - 5x = 0$
b $x^2 - 5x = 14$
c $x^2 - 5 = 14$
d $x^2 - 5 = 14x$
e $(2x - 1)(3x + 6) = 0$
f $(2x - 1)(3x + 6) = 9x$
g $3x(2x - 1) = 6$
h $3x(2x - 1) = 6 - 9x$

A 27 Bereken exact de oplossingen.
a $(x + 3)^2 = 16x$
b $(2x + 3)^2 = -16$
c $2(x + 3)^2 = -4x$
d $(2x + 3)(4 - x) = 9$
e $(-4x + 3)^2 = 36$
f $-4(x + 3)^2 = 4x$
g $x^2 - (x + 1)^2 = (x + 3)^2$
h $(x + 3)^2 + (x + 2)^2 = 25$

Geschiedenis Babylonisch rekenen

Ruim 5000 jaar geleden losten de Babyloniërs reeds kwadratische vergelijkingen op. Deze vergelijkingen stonden op kleitabletten en werden gesteld in de vorm van een raadsel. Wat opvalt is dat de Babyloniërs geen problemen hadden met het optellen van lengten en oppervlakten.

Voorbeeld: Wat is de zijde van een vierkant waarvan de oppervlakte vermeerderd met tien zijden gelijk is aan dertig eenheden?

Om deze zijde te berekenen moet de vergelijking $x^2 + 10x = 30$ worden opgelost. De Babyloniërs losten dit vraagstuk op met behulp van de figuur hiernaast. In onze notatie ziet de berekening er als volgt uit.

$x(x + 10) = 30$

$(x + 5)^2 = 30 + 5^2$

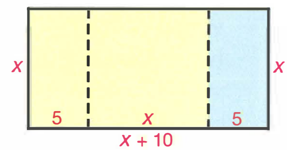
$x + 5 = \sqrt{55}$, dus $x = \sqrt{55} - 5$

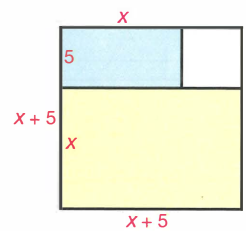
Je kunt dus zeggen dat de Babyloniërs de volgende elegante versie van de *abc*-formule gebruikten.

$x^2 + bx = c$ geeft $x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2} - \frac{1}{2}b$.

Voor het benaderen van $\sqrt{55}$ hadden de Babyloniërs de volgende methode. Neem als eerste schatting 7. Het product van 7 en $\frac{55}{7}$ is 55. Omdat 7 kleiner is dan $\sqrt{55}$, is $\frac{55}{7}$ groter dan $\sqrt{55}$. Neem als volgende schatting het gemiddelde van 7 en $\frac{55}{7}$.

Dus $\frac{1}{2}\left(7 + \frac{55}{7}\right) = 7\frac{3}{7}$ is een betere schatting van $\sqrt{55}$.





D 28 Zie het geschiedeniskader over het Babylonisch rekenen.

a Los op deze manier de vergelijkingen $x^2 + 8x = 20$ en $x^2 + 18x = 20$ op.

b Laat zien hoe met behulp van de *abc*-formule uit $x^2 + bx = c$ de oplossing $x = \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} - \frac{1}{2}b$ is af te leiden.

c Uit $x^2 + bx = c$ is met behulp van kwadraatafsplitsen de oplossing $x = \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} - \frac{1}{2}b$ af te leiden. Toon dit aan.

O 29 Gegeven is de vergelijking $x^2 + px - 6 = 0$.

a Neem $p = -1$ en bereken de oplossingen van de vergelijking.

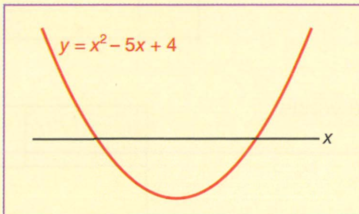
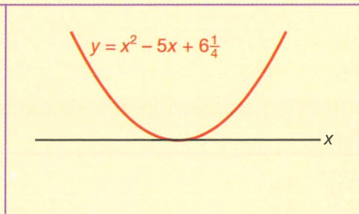
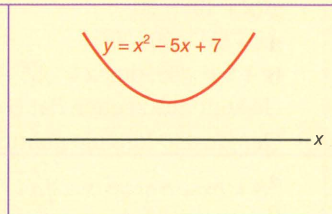
b Neem $p = 2$. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking?

c Beredeneer dat de vergelijking $x^2 + px - 6 = 0$ voor elke p twee oplossingen heeft.

Theorie B Vergelijkingen met een parameter

In de vergelijking $x^2 - 5x + p = 0$ heet p een **parameter**.
Met behulp van de parameter p worden oneindig veel vergelijkingen genoteerd.
Neem je in deze vergelijking $p = 4$, dan krijg je $x^2 - 5x + 4 = 0$.
Oplossen geeft $(x - 1)(x - 4) = 0$
$x = 1 \vee x = 4$
Neem je $p = 7$, dan krijg je $x^2 - 5x + 7 = 0$. Deze vergelijking heeft geen oplossing, want $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3 < 0$.
Met behulp van de discriminant $D = b^2 - 4ac$ van de vergelijking $x^2 - 5x + p = 0$ bereken je voor welke p de vergelijking twee, één of geen oplossingen heeft.

> Een parameter is een hulpvariabele.
> Parameter spreek je uit met de klemtoon op de tweede lettergreep.

		
De vergelijking $x^2 - 5x + 4 = 0$ heeft twee oplossingen, dus de parabool $y = x^2 - 5x + 4$ snijdt de x-as in twee punten.	De vergelijking $x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} = 0$ heeft één oplossing, dus de parabool $y = x^2 - 5x + 6\frac{1}{4}$ raakt de x-as.	De vergelijking $x^2 - 5x + 7 = 0$ heeft geen oplossing, dus de parabool $y = x^2 - 5x + 7$ ligt geheel boven de x-as.

Voorbeeld

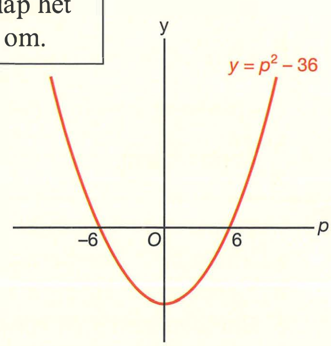
a Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 - 5x + p = 0$ twee oplossingen heeft.
b Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 + px + 9 = 0$ twee oplossingen heeft.

Uitwerking

a $\left.\begin{array}{l} D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 25 - 4p \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\}$ $25 - 4p > 0$
$-4p > -25$
$p < 6\frac{1}{4}$

Deel door –4, dus klap het teken om.

b $\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = p^2 - 36 \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\}$ $p^2 - 36 > 0$
$p^2 > 36$
$p < -6 \vee p > 6$



30 Bereken voor welke p de vergelijking twee oplossingen heeft.

a $x^2 - 7x + p = 0$
b $2x^2 - 5x - p = 0$
c $-3x^2 + 4x - p = 0$
d $\frac{1}{4}x^2 - 3x + p = 0$

31 **a** Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 + px + 25 = 0$ twee oplossingen heeft.
b Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 + px + 4 = 0$ geen oplossing heeft.
c Toon aan dat de vergelijking $-2x^2 + px + 3 = 0$ voor elke p twee oplossingen heeft.

32 **a** Van de vergelijking $x^2 + 2x + p = 0$ is $x = 1$ een oplossing. Bereken p en de andere oplossing.
b Van de vergelijking $px^2 - 11x + 10 = 0$ is $x = 2$ een oplossing. Bereken p en de andere oplossing.

33 Als geldt $p < 5$ en bovendien $p \neq 0$, dan noteren we dit als $p < 0 \vee 0 < p < 5$.
a Noteer op dezelfde manier $p > -3$ en bovendien $p \neq 0$.
b Noteer op dezelfde manier $-4 < p < 4$ en bovendien $p \neq 0$.

34 Gegeven is de vergelijking $px^2 + 3x + 1 = 0$.
a Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking voor $p = 0$?
b Licht toe dat de voorwaarde $p \neq 0$ nodig is als je de discriminant van de vergelijking wilt berekenen.
c Toon aan dat de vergelijking twee oplossingen heeft voor $p < 0 \vee 0 < p < 2\frac{1}{4}$.

35 Bereken voor welke p de vergelijking
a $px^2 + 5x + 2 = 0$ twee oplossingen heeft
b $px^2 - 3x - 4 = 0$ twee oplossingen heeft.

A 36 Bereken exact voor welke p de vergelijking
a $2x^2 + x + p = 0$ geen oplossing heeft
b $px^2 + x + p = 0$ twee oplossingen heeft
c $2x^2 + px + 1 = 0$ twee oplossingen heeft.

A 37 **a** De vergelijking $px^2 + 6x + 9 = 0$ heeft één oplossing. Bereken p en de bijbehorende oplossing.
b De vergelijking $x^2 + px + 1 = 0$ heeft één oplossing. Bereken p en de bijbehorende oplossing.

D 38 Stel een tweedegraadsvergelijking op met de parameter p die twee oplossingen heeft voor $-4 < p < 0 \vee p > 0$.

1

Terugblik

Typen tweedegraadsvergelijkingen

De algemene vorm van een tweedegraadsvergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$.
Deze vergelijkingen moet je algebraïsch, dat wil zeggen stap voor stap, kunnen oplossen.

Overzicht tweedegraadsvergelijkingen	
Twee termen	
$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ Breng x buiten haakjes. $3x^2 - 7x = 0$ $x(3x - 7) = 0$ $x = 0 \vee 3x = 7$ $x = 0 \vee x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$	$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ Herleid tot de vorm $x^2 =$ getal. $3x^2 - 75 = 0$ $3x^2 = 75$ $x^2 = 25$ $x = 5 \vee x = -5$
Drie termen $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$	
Het linkerlid is te ontbinden Ontbind het linkerlid. $x^2 - 5x - 14 = 0$ $(x + 2)(x - 7) = 0$ $x = -2 \vee x = 7$	Het linkerlid is niet te ontbinden Gebruik de *abc*-formule of ga kwadraatafsplitsen. $3x^2 - 2x - 2 = 0$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 28$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ $x = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \vee x = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$

Als er exacte oplossingen worden gevraagd, dan ga je algebraïsch te werk en benader je de oplossingen niet.

Vergelijkingen met een parameter

Het getal p in de vergelijking $2x^2 + px + 8 = 0$ heet een parameter.
Op deze manier zijn oneindig veel vergelijkingen genoteerd.
Zo krijg je voor $p = 10$ de vergelijking $2x^2 + 10x + 8 = 0$.
Deze vergelijking heeft twee oplossingen want $D = 10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 36 > 0$.
Neem je $p = 5$ dan krijg je $2x^2 + 5x + 8 = 0$.
Deze vergelijking heeft geen oplossing, want $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = -39 < 0$.
Om te berekenen voor welke p de vergelijking $2x^2 + px + 8 = 0$ twee oplossingen heeft, gebruik je dat moet gelden $D > 0$. Je krijgt $p^2 - 64 > 0$, ofwel $p^2 > 64$ en hieruit volgt $p < -8 \vee p > 8$.

Om te berekenen voor welke p de vergelijking $px^2 + 6x + 3 = 0$ twee oplossingen heeft, bedenk je eerst dat voor $p = 0$ de vergelijking over gaat in $6x + 3 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing. Voor $p \neq 0$ krijg je $D = 36 - 12p$.

$D > 0$ geeft $36 - 12p > 0$
$-12p > -36$
$p < 3$

Dus de vergelijking $px^2 + 6x + 3 = 0$ heeft twee oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < 3$.

1.3 Extreme waarden en inverse functies

O 39 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx$ met $a \neq 0$.

a Los op $f(x) = 0$ en licht toe dat hieruit volgt $x_{top} = -\dfrac{b}{2a}$.

b Licht toe dat ook voor de parabool $y = ax^2 + bx + c$ geldt $x_{top} = -\dfrac{b}{2a}$.

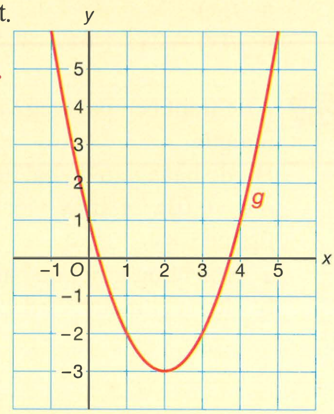
Theorie A Extreme waarden

De algemene vorm van een **tweedegraadsfunctie**, ofwel **kwadratische functie** f is $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$.
De grafiek is een **parabool**.
Voor $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool** en voor $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.
Van de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is de x-coördinaat van de top te berekenen met de formule $x_{top} = -\dfrac{b}{2a}$.
Let erop dat deze formule alleen voor tweedegraadsfuncties geldt.

Van de grafiek van de tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is $x_{top} = -\dfrac{b}{2a}$. Verder is $y_{top} = f(x_{top})$.

Bij de functie $g(x) = x^2 - 4x + 1$ krijg je
$x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ en
$y_{top} = g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$. Zie figuur 1.6.

Omdat -3 de kleinste functiewaarde is van g zeggen we: het **minimum** van g is -3. Notatie: min. is $g(2) = -3$.
Bij een bergparabool is er sprake van een **maximum**.
Maxima en minima heten **extreme waarden** of kortweg **extremen**.



figuur 1.6

Voorbeeld

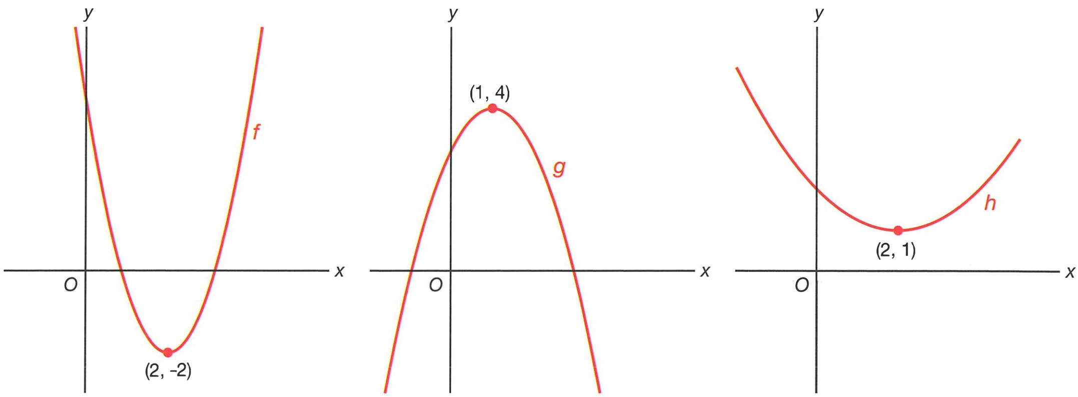
Bereken de extreme waarde van de functie $f(x) = -0{,}6x^2 + 2{,}4x - 1$.

Uitwerking

$x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2{,}4}{-1{,}2} = 2$ geeft $y_{top} = -0{,}6 \cdot 2^2 + 2{,}4 \cdot 2 - 1 = 1{,}4$
$-0{,}6 < 0$, dus bergparabool en max. is $f(2) = 1{,}4$.

Een maximum is een grootste functiewaarde, dus een maximum is een y-coördinaat.

40 In figuur 1.7 zijn de grafieken van de functies f, g en h getekend.
De coördinaten van de toppen staan in de figuur.
De extreme waarde van f noteer je als min. is $f(2) = -2$.
Geef de extreme waarden van g en h.



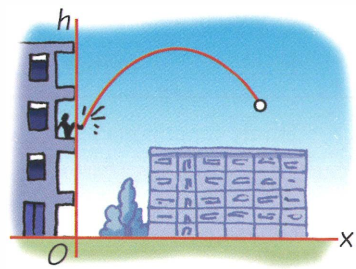
figuur 1.7

41 Bereken de extreme waarde.

a $f(x) = x^2 - 4x + 1$
b $g(x) = 2x^2 + 6x + 3$
c $h(x) = -0{,}3x^2 + 6x - 2$
d $k(x) = 4x^2 + 14x$

O 42 Arie trapt een bal weg vanaf een balkon op 5 meter hoogte.
Bij de baan van de bal hoort de formule $h = -0{,}01x^2 + 0{,}4x + 5$. Hierin zijn h en x in meter. Zie figuur 1.8.

a Hoe hoog komt de bal maximaal?
b Hoeveel meter verderop komt de bal op de grond?



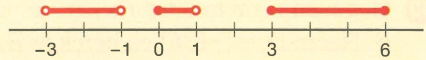
figuur 1.8

Theorie B Domein en bereik

In praktische situaties heb je vaak maar met een gedeelte van een parabool te maken. In opgave 42 heb je hiervan een voorbeeld gezien.
Omdat de bal 50 meter verderop op de grond komt, geldt de formule dus voor $0 \leq x \leq 50$. We zeggen dat het **domein** het **gesloten interval** nul vijftig is.
Notatie domein = [0, 50].
Een **interval** is een stuk van de getallenlijn.
Met gesloten geven we aan dat de getallen 0 en 50 er bij horen. In de notatie zie je dat aan de teksthaken [en].
In opgave 42 heb je gezien dat de maximale hoogte van de bal 9 meter is.
Voor de baan van de bal geldt dus $0 \leq h \leq 9$. We zeggen dat het **bereik** het gesloten interval nul negen is. Notatie bereik = [0, 9].

Het domein van een functie bestaat uit alle originelen.
Het bereik van een functie bestaat uit alle functiewaarden.

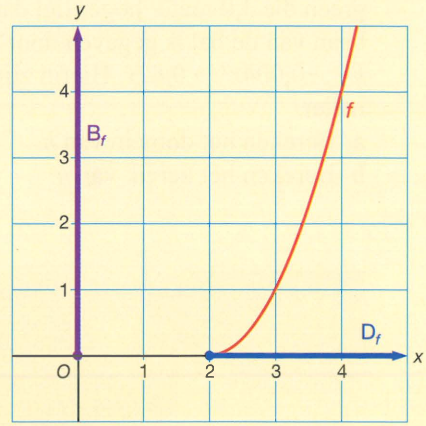
Behalve gesloten intervallen zijn er ook open intervallen. Bij een **open interval** horen de grenzen er niet bij. Open intervallen worden met de haken ⟨ en ⟩ genoteerd. Zo bestaat het interval ⟨-3, -1⟩ uit alle getallen tussen -3 en -1. In figuur 1.9 is dit interval aangegeven boven een getallenlijn. Aan de open rondjes bij -3 en -1 zie je dat de getallen -3 en -1 niet bij het interval horen.
Ook zie je de intervallen [0, 1⟩ en [3, 6].



figuur 1.9 De intervallen, ⟨-3, -1⟩, [0, 1⟩ en [3, 6].

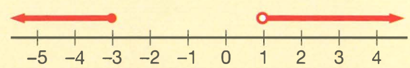
Het interval [0, 1⟩ spreek je uit als het links gesloten rechts open interval nul één.

Verder zijn er **oneindig grote intervallen**.
Heb je te maken met de functie $f(x) = (x - 2)^2$ waarbij $x \geq 2$ dan wordt het domein van f genoteerd als $D_f = [2, \rightarrow\rangle$. Spreek uit: het domein van f is het links gesloten interval twee oneindig.
Het bereik van f is $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.



figuur 1.10

In figuur 1.11 zie je nog de intervallen ⟨←, -3] en ⟨1, →⟩.
Bij ⟨← , -3] is de uitspraak: het rechts gesloten interval min oneindig min drie.
Het interval ⟨←, →⟩ wordt genoteerd als $\mathbb{R}$.



figuur 1.11 De intervallen ⟨ ← , -3] en ⟨1, → ⟩.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}4x^2 - 2{,}8x + 2$.
Neem $D_f = [0, 8]$ en bereken B_f.

Aanpak
Bereken van de grafiek de coördinaten van de eindpunten en de top.
Schets de grafiek en lees het bereik af uit de schets.

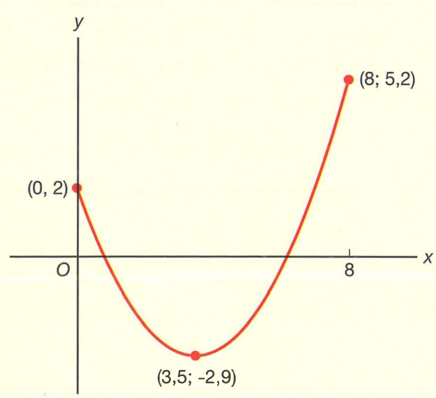
Uitwerking
$f(0) = 2$ en $f(8) = 0{,}4 \cdot 8^2 - 2{,}8 \cdot 8 + 2 = 5{,}2$

$x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2{,}8}{0{,}8} = 3{,}5$ en

$y_{top} = f(3{,}5) = 0{,}4 \cdot 3{,}5^2 - 2{,}8 \cdot 3{,}5 + 2 = -2{,}9$

Zie de schets hiernaast.

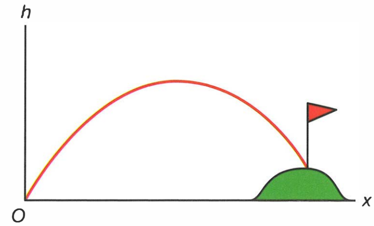
$B_f = [-2{,}9; 5{,}2]$



43 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x - 3$.
a Neem $D_f = [-1, 6]$ en bereken B_f.
b Neem $D_f = [4, 8]$ en bereken B_f.

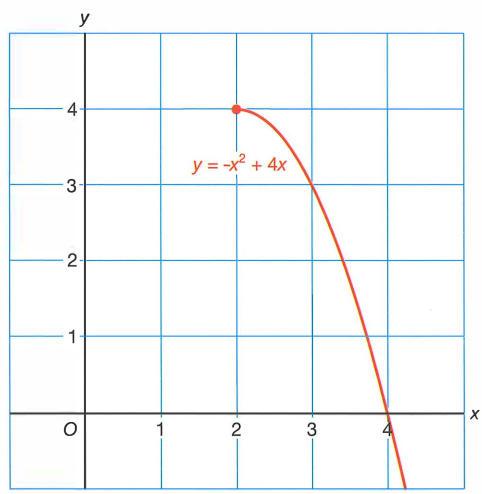
44 Bereken het bereik van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ met $D_f = [-3, 4]$.

A 45 Joost slaat een golfbal vanaf de tee naar een green die 3,0 meter hoger ligt dan de tee. De baan van de bal is gegeven door de formule $h = -0{,}004x^2 + 0{,}62x$. Hierin zijn h en x in meter.
a Bereken het domein van h.
b Bereken het bereik van h.



figuur 1.12

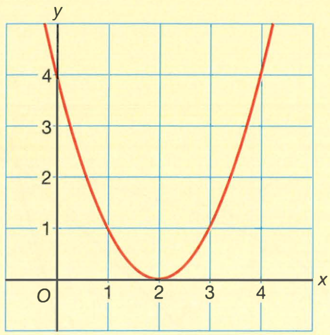
O 46 In figuur 1.13 is de grafiek van de halve parabool $y = -x^2 + 4x$ getekend.
Neem deze figuur over en teken het spiegelbeeld van de halve parabool bij spiegeling in de lijn $y = x$.

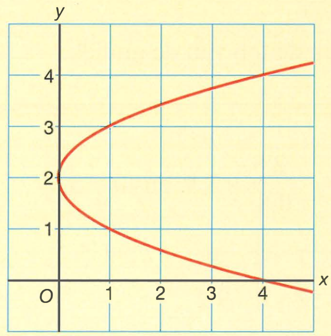


figuur 1.13

Theorie C Functie en inverse functie

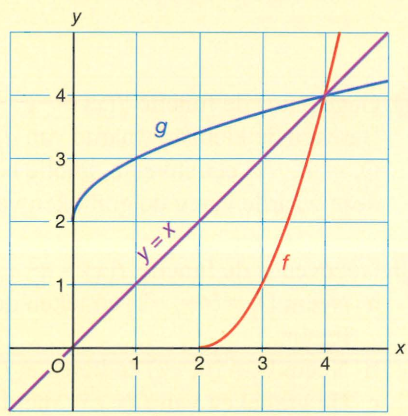
In figuur 1.14a is de parabool $y = (x - 2)^2$ getekend. Deze parabool is de grafiek van een functie. Je hebt met een functie (van x naar y) te maken als bij elke waarde van x hoogstens één waarde van y hoort. De grafiek in figuur 1.14b is dus niet de grafiek van een functie, er horen immers bij positieve waarden van x telkens twee waarden van y.





figuur 1.14 Bij de grafiek in figuur a hoort de formule $y = (x - 2)^2$ en bij de grafiek in figuur b hoort de formule $x = (y - 2)^2$. De grafiek in figuur a is de grafiek van een functie van x naar y. De grafiek in figuur b is niet de grafiek van een functie van x naar y.

De grafieken in figuur 1.14 zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.
Ook de grafieken van f en g in figuur 1.15 zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$. Hier zijn f en g beide een functie. De grafiek van f is de helft van de parabool $y = (x - 2)^2$. Het domein is $[2, \rightarrow\rangle$.



figuur 1.15 De grafieken van de functies f en g zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

Door bij een tweedegraadsfunctie het domein te beperken kan de grafiek na spiegeling in de lijn $y = x$ de grafiek van een functie zijn. We zeggen dan dat de functie een **inverse** heeft. De **inverse functie** van een functie f noteren we met f^{inv}.

Functies f en g met de eigenschap dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ zijn elkaars inverse.
Notatie: $g = f^{\text{inv}}$ en $f = g^{\text{inv}}$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}4x^2 - 2{,}8x + 2$.
Bereken de kleinste waarde van a waarvoor de functie f met $D_f = [a, \rightarrow\rangle$ een inverse functie heeft en teken in één figuur voor deze waarde van a de grafieken van f en f^{inv}.

Aanpak
Gebruik de coördinaten van de top van de grafiek.

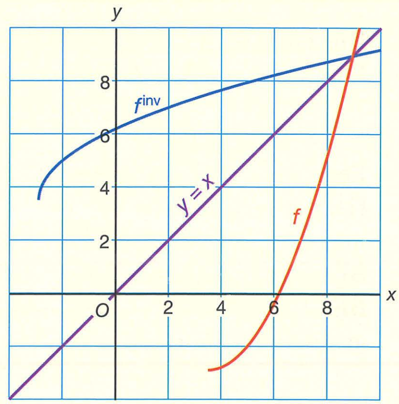
Uitwerking

Parabool met $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2{,}8}{0{,}8} = 3{,}5$, dus $a = 3{,}5$.

x	3,5	5	7	9
$f(x)$	-2,9	-2	2	9,2

x	-2,9	-2	2	9,2
$f^{\text{inv}}(x)$	3,5	5	7	9

Zie de figuur hiernaast.



47 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x - 3$.
Bereken de kleinste waarde van a waarvoor de functie f met $D_f = [a, \rightarrow\rangle$ een inverse functie heeft en teken in één figuur voor deze waarde van a de grafieken van f en f^{inv}.

48 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4x$.

a Neem $D_f = \langle\leftarrow, -2]$ en teken de grafieken van f en f^{inv} in één figuur.

b Neem $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en bereken $f^{\text{inv}}(5)$.

c De grafieken van f en f^{inv} met $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ hebben precies één punt gemeenschappelijk.
Licht dit toe.

d Bereken voor welke waarden van a de grafieken van f en f^{inv} met $D_f = \langle\leftarrow, a]$ precies één punt gemeenschappelijk hebben.

D 49 **a** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}x + 2$.
Stel het functievoorschrift op van f^{inv}.

b Gegeven is de functie $g(x) = 3 - x$ met $D_g = [1, \rightarrow\rangle$.
Stel het functievoorschrift op van g^{inv}.

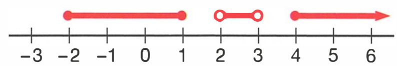
Terugblik

Extreme waarden

De grafiek van een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) is een parabool.
Voor $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.
Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool.
De functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ heeft een minimum.
Met de formule $x_{top} = -\frac{b}{2a}$ krijg je $x_{top} = -\frac{-6}{4} = 1\frac{1}{2}$, dus $y_{top} = f\left(1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$.

Dus het minimum van f is $2\frac{1}{2}$ voor $x = 1\frac{1}{2}$. Notatie: min. is $f\left(1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$.
Maxima en minima heten extreme waarden.

Intervallen



Een interval is een stuk van de getallenlijn.
Het interval $[-2, 1]$ is een voorbeeld van een gesloten interval. De getallen -2 en 1 horen bij dit interval.
Bij het open interval $\langle 2, 3 \rangle$ horen de getallen 2 en 3 niet bij het interval.
Bij $[4, \rightarrow\rangle$ heb je te maken met een oneindig groot interval, het links gesloten interval vier oneindig.

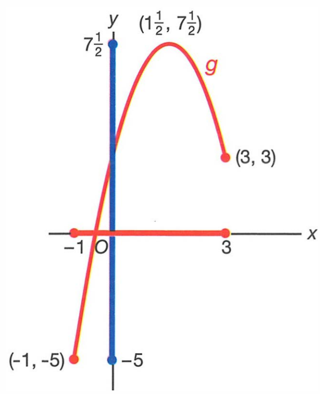
Domein en bereik

Bij een functie vormen alle originelen samen het domein van de functie. Alle functiewaarden samen vormen het bereik.
Bij een gegeven domein is het bereik te berekenen.
Om bij de functie $g(x) = -2x^2 + 6x + 3$ met $D_g = [-1, 3]$ het bereik te vinden, bereken je eerst van de grafiek de coördinaten van de eindpunten en de top. Je krijgt $g(-1) = -5$ en $g(3) = 3$, dus de eindpunten zijn $(-1, -5)$ en $(3, 3)$.

$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-4} = 1\frac{1}{2}$ en

$y_{top} = g\left(1\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot 1\frac{1}{2} + 3 = 7\frac{1}{2}$,

dus de top is $\left(1\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$.



Vervolgens maak je een schets van de grafiek. Zie hiernaast.
Lees af: het bereik is $B_g = [-5, 7\frac{1}{2}]$.

Functie en inverse functie

Functies f en g met de eigenschap dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ zijn elkaars inverse. Notatie: $g = f^{inv}$ en $f = g^{inv}$.
Beperk je bij de functie $g(x) = -2x^2 + 6x + 3$ het domein tot het interval $\langle \leftarrow, 1\frac{1}{2}]$, dan heeft g een inverse. De grafiek van de inverse functie g^{inv} krijg je door de grafiek van g te spiegelen in de lijn $y = x$. Gebruik hierbij tabellen zoals

x	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$
$g(x)$	-5	3	7	$7\frac{1}{2}$

x	-5	3	7	$7\frac{1}{2}$
$g^{inv}(x)$	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$

1.4 Tweedegraadsfuncties met een parameter

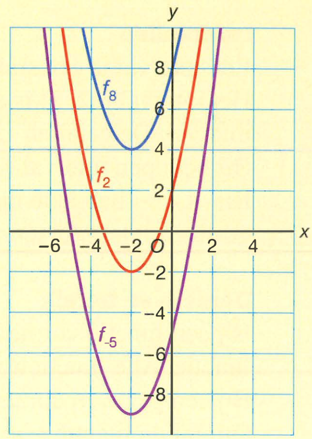
O 50 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x + p$.

a Neem $p = 1$ en bereken de coördinaten van de top van de grafiek van de functie die je krijgt.

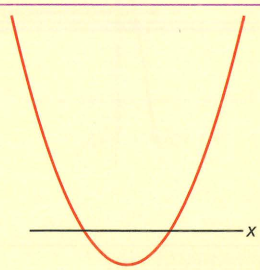
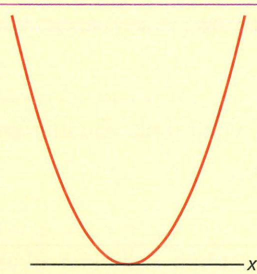
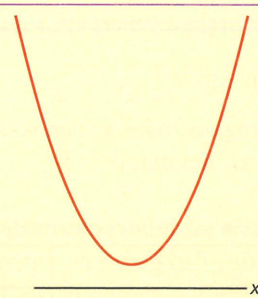
b Onderzoek bij welke waarde van p de top van de grafiek op de x-as ligt.

Theorie A Discriminanten met een parameter

Omdat je bij $f(x) = x^2 + 4x + p$ voor elke waarde van de parameter p een andere functie krijgt, heb je met oneindig veel functies te maken. Om al deze functies in één keer te noteren, schrijven we $f_p(x) = x^2 + 4x + p$.
Zo krijg je voor $p = 2$ de functie $f_2(x) = x^2 + 4x + 2$, voor $p = 8$ de functie $f_8(x) = x^2 + 4x + 8$ en voor $p = -5$ de functie $f_{-5}(x) = x^2 + 4x - 5$. In de figuur hiernaast zie je de grafieken van deze drie functies.
De ligging van de grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ ten opzichte van de x-as hangt af van p. Je kunt je bijvoorbeeld afvragen voor welke waarden van p de grafiek geen snijpunten met de x-as heeft.
Om deze vraag te beantwoorden is het schema hieronder van belang. Hierin is te zien hoe de ligging van een dalparabool $y = ax^2 + bx + c$ ten opzichte van de x-as afhangt van de discriminant $D = b^2 - 4ac$.



figuur 1.16

De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ met $a > 0$		
 twee snijpunten met de x-as $D > 0$	 één snijpunt (raakpunt) met de x-as $D = 0$	 geen snijpunt met de x-as $D < 0$

De grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ heeft geen snijpunten met de x-as als $D < 0$.

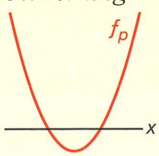
Omdat $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 16 - 4p$ krijg je
$$16 - 4p < 0$$
$$-4p < -16$$
$$p > 4$$

Dus de grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ heeft voor $p > 4$ geen snijpunten met de x-as.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2x^2 - 10x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p de functie f_p een negatief minimum heeft.

Uitwerking



$$\left.\begin{array}{l}\text{Er moet gelden } D > 0 \\ D = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 100 - 8p\end{array}\right\} \begin{array}{l}100 - 8p > 0 \\ -8p > -100 \\ p < 12\tfrac{1}{2}\end{array}$$

51 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2x^2 - 6x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p
a de grafiek van f_p de x-as raakt
b f_p een negatief minimum heeft.

R 52 Maak een schema zoals op de vorige bladzijde, maar nu voor bergparabolen.

53 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p
a de top van de grafiek van f_p op de x-as ligt
b het maximum van f_p kleiner is dan 0.

A 54 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 3x^2 + px + 3$.
Bereken algebraïsch voor welke p
a de top van de grafiek van f_p op de x-as ligt
b f_p een negatief minimum heeft.

O 55 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 4x^2 + px + 5$.
Toon aan dat $x_{top} = -\frac{1}{8}p$ en dat $y_{top} = -\frac{1}{16}p^2 + 5$.

1

Theorie B Extremen met een parameter

In opgave 55 heb je gezien dat bij de functies $f_p(x) = 4x^2 + px + 5$ geldt $y_{top} = -\frac{1}{16}p^2 + 5$.
Als gegeven is dat het minimum van f_p gelijk is aan 1, dan geldt dus $-\frac{1}{16}p^2 + 5 = 1$. Hiermee is p te berekenen.

Voorbeeld

Van de functie $f_p(x) = 2x^2 + px + 3$ is het minimum 1.
Bereken p algebraïsch.

Uitwerking

$$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}p \longleftarrow \boxed{-\frac{p}{4} = -\frac{1}{4}p}$$

$$y_{top} = f_p(-\tfrac{1}{4}p) = 2 \cdot (-\tfrac{1}{4}p)^2 + p \cdot -\tfrac{1}{4}p + 3$$

$$= 2 \cdot \tfrac{1}{16}p^2 - \tfrac{1}{4}p^2 + 3$$

$$= \tfrac{1}{8}p^2 - \tfrac{1}{4}p^2 + 3$$

$$= -\tfrac{1}{8}p^2 + 3$$

$$\left(-\tfrac{1}{4}p\right)^2 = \left(-\tfrac{1}{4}\right)^2 \cdot p^2 = \tfrac{1}{16}p^2$$

Het minimum is 1 geeft $-\frac{1}{8}p^2 + 3 = 1$

$$-\tfrac{1}{8}p^2 = -2$$

$$p^2 = 16$$

$$p = 4 \vee p = -4$$

56 Van de functie $f_p(x) = -2x^2 + px + 1$ is het maximum 9.
Bereken p algebraïsch.

57 De top van de grafiek van $f_p(x) = x^2 + px + 3$ ligt op de lijn $y = x + 1$.
Bereken p algebraïsch.

58 Van de functie $f_p(x) = px^2 + 6x + 1$ is de extreme waarde -2.
a Bereken p algebraïsch.
b Is de extreme waarde een maximum of een minimum?

D 59 De top van de grafiek van $f_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + q$ ligt op de parabool $y = x^2 + x + 1$.
a Druk q uit in p.
b Bereken voor welke p en q de x-coördinaat van de top van de grafiek van f_p gelijk is aan 2.

O 60 **a** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^2 + px + 7$.

Toon aan dat $x_{top} = -\frac{1}{2}p$ en dat hieruit volgt $p = -2x_{top}$.

Met $p = -2x_{top}$ is p uitgedrukt in x_{top}.

Druk bij de volgende functies p uit in x_{top}.

b $f_p(x) = 2x^2 + px - 3$

c $f_p(x) = -3x^2 + 4px + 4$

d $f_p(x) = px^2 + 6x - 1$

e $f_p(x) = p^2x^2 + 4px + 2$

Theorie C Kromme door toppen

Bij de functies $f_p(x) = px^2 + 4x - 3$ zijn x_{top} en y_{top} uit te drukken in p.

Je krijgt $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2p} = -\frac{2}{p}$ en

$$y_{top} = f_p\left(-\frac{2}{p}\right) = p \cdot \left(-\frac{2}{p}\right)^2 + 4 \cdot -\frac{2}{p} - 3 = p \cdot \frac{4}{p^2} - \frac{8}{p} - 3 = \frac{4}{p} - \frac{8}{p} - 3 = -\frac{4}{p} - 3.$$

Je kunt nu y_{top} uitdrukken in x_{top}.

Uit $x_{top} = -\frac{2}{p}$ volgt $p = -\frac{2}{x_{top}}$.

Substitueren betekent vervangen door.

Substitueren van $p = -\frac{2}{x_{top}}$ in $y_{top} = -\frac{4}{p} - 3$ geeft

$$y_{top} = -\frac{4}{-\frac{2}{x_{top}}} - 3 = -4 \cdot -\frac{x_{top}}{2} - 3 = 2 \cdot x_{top} - 3.$$

Hieruit volgt dat alle toppen van de parabolen $y = px^2 + 4x - 3$ op de lijn $y = 2x - 3$ liggen.

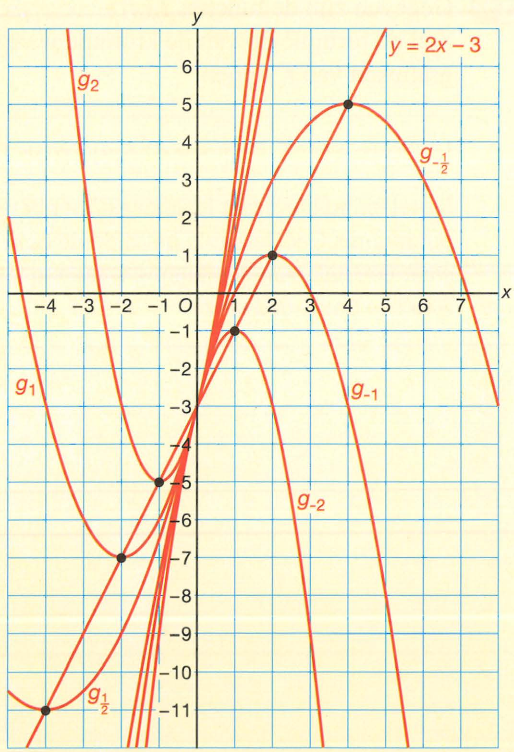
Om de formule van de lijn $y = 2x - 3$ te krijgen heb je $p = -\frac{2}{x_{top}}$ gesubstitueerd in de formule $y_{top} = -\frac{4}{p} - 3$.

Je had $p = -\frac{2}{x_{top}}$ ook kunnen invullen in de formule $y_{top} = p \cdot x_{top}^2 + 4 \cdot x_{top} - 3$.

Dit geeft $y_{top} = -\frac{2}{x_{top}} \cdot x_{top}^2 + 4 \cdot x_{top} - 3 =$

$-2 \cdot x_{top} + 4 \cdot x_{top} - 3 = 2 \cdot x_{top} - 3$.

Met $y = 2x - 3$ is de formule gevonden van de kromme waarop de toppen van de parabolen $y = px^2 + 4x - 3$ liggen.
De gevraagde kromme is hier een lijn.



figuur 1.17

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px - 5$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

Uitwerking

$$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -\frac{p}{\frac{1}{2}} = -2p, \text{ dus } p = -\tfrac{1}{2}x_{top}.$$

$$\left.\begin{aligned} y_{top} &= \tfrac{1}{4}x_{top}^{\;2} + px_{top} - 5 \\ p &= -\tfrac{1}{2}x_{top} \end{aligned}\right\} \; y_{top} = \tfrac{1}{4}x_{top}^{\;2} + -\tfrac{1}{2}x_{top} \cdot x_{top} - 5$$

$$y_{top} = \tfrac{1}{4}x_{top}^{\;2} - \tfrac{1}{2}x_{top}^{\;2} - 5$$

$$y_{top} = -\tfrac{1}{4}x_{top}^{\;2} - 5$$

Dus de formule van de kromme is $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

61 Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

a $f_p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + px - 6$

b $f_p(x) = px^2 + 6x + p$

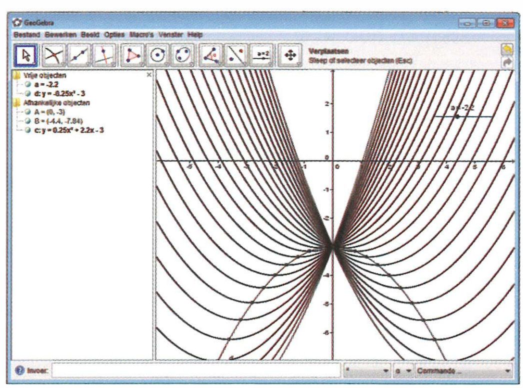
c $f_p(x) = p^2x^2 - 2px + 3$

d $f_p(x) = px^2 - px + 1$

A 62 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -x^2 + px + 2p$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

Informatief Parameters met GeoGebra

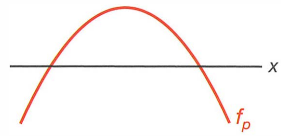
De tekening hiernaast is gemaakt met het programma GeoGebra. In het digitale boek staat een link naar een filmpje waarin je kunt zien hoe dat is gedaan.



Terugblik

Discriminanten met een parameter

Met $f_p(x) = -x^2 + 3x + p$ worden oneindig veel functies aangegeven.
Neem je de parameter $p = 2$ dan krijg je $f_2(x) = -x^2 + 3x + 2$.
Zoek je functies f_p met een positief maximum, dan gebruik je $D > 0$.
Je hebt immers te maken met een bergparabool waarvan de top boven de x-as ligt. Zie de figuur hiernaast.
Omdat $D = 3^2 - 4 \cdot -1 \cdot p = 9 + 4p$ krijg je
$9 + 4p > 0$, dus $p > -2\frac{1}{4}$.



Extremen met een parameter

Om te berekenen voor welke waarde van p het maximum van de functie $f_p(x) = -x^2 + px + p$ gelijk is aan 3, druk je eerst x_{top} en vervolgens y_{top} uit in p.

Je krijgt $x_{top} = -\dfrac{p}{-2} = \frac{1}{2}p$, dus

$y_{top} = -(\frac{1}{2}p)^2 + p \cdot \frac{1}{2}p + p = -\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p^2 + p = \frac{1}{4}p^2 + p$.

Omdat het maximum gelijk is aan 3 krijg je $\frac{1}{4}p^2 + p = 3$.

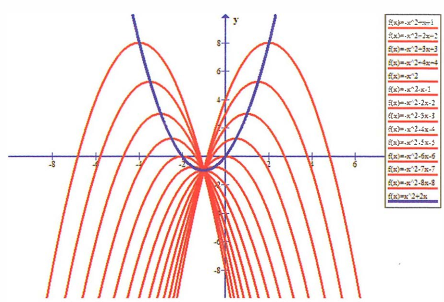
Dit geeft $p^2 + 4p - 12 = 0$
$(p - 2)(p + 6) = 0$
$p = 2 \vee p = -6$

Dus het maximum van de functie $f_p(x) = -x^2 + px + p$ is gelijk aan 3 voor $p = 2 \vee p = -6$.

Kromme door toppen

De toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = -x^2 + px + p$ liggen op een kromme. De formule van deze kromme krijg je door eerst p uit te drukken in x_{top} en vervolgens y_{top} uit te drukken in x_{top}.
Uit $x_{top} = \frac{1}{2}p$ volgt $p = 2 \cdot x_{top}$.
Substitutie van $p = 2 \cdot x_{top}$ in de formule van f geeft

$$\begin{aligned} y_{top} &= -x_{top}{}^2 + 2 \cdot x_{top} \cdot x_{top} + 2 \cdot x_{top} \\ &= -x_{top}{}^2 + 2 \cdot x_{top}{}^2 + 2 \cdot x_{top} \\ &= x_{top}{}^2 + 2 \cdot x_{top} \end{aligned}$$



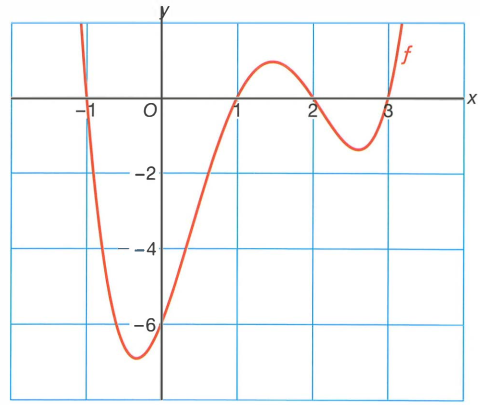
Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = x^2 + 2x$.

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

O 63 In figuur 1.18 is de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ getekend.

a Lees de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x-as af uit de figuur.

b Controleer dat de afgelezen x-coördinaten oplossingen zijn van de vergelijking $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.

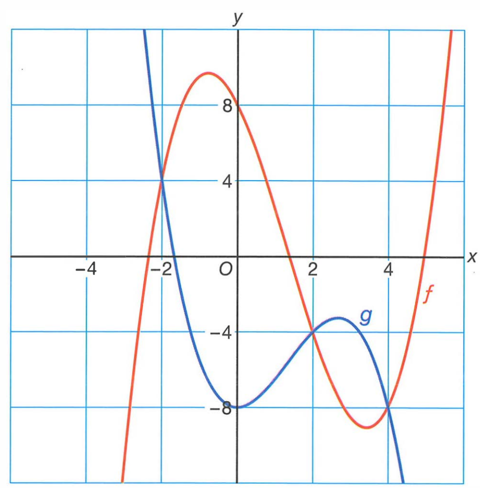


figuur 1.18

O 64 In figuur 1.19 zijn de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8$ getekend.

a Lees de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken af uit de figuur.

b Geef de oplossing van de vergelijking $\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8$.



figuur 1.19

Theorie A Toppen en snijpunten met de GR

Op de GR kun je grafieken van functies **plotten** en vervolgens benaderingen berekenen van x-coördinaten van snijpunten.
Deze x-coördinaten zijn oplossingen van een vergelijking.
Het oplossen van een vergelijking op de GR met behulp van grafieken heet **grafisch-numeriek oplossen**. Aan de vraagstelling is te zien of je een vergelijking algebraïsch moet oplossen, of dat je grafisch-numeriek te werk mag gaan.

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je met drie soorten opdrachten te maken krijgen.

- Bij de opdracht 'Los algebraïsch op' moet je de vergelijking stap voor stap oplossen. De oplossingen moet je soms benaderen.
- Bij de opdracht 'Bereken exact de oplossingen' moet je algebraïsch te werk gaan en mag je de oplossingen niet benaderen.
- Bij de opdracht 'Los op' of 'Bereken de oplossingen' mag je de werkwijze zelf kiezen. Het is dus toegestaan om grafisch-numeriek op te lossen. Je krijgt dan meestal benaderingen van oplossingen.

[▶ GR] Neem de module **Formules, grafieken en tabellen** en de module **Toppen en snijpunten** door.

Werkschema: Hoe noteer je de uitwerking bij het gebruik van de GR?

1 Vermeld de formules die je invoert.
2 Noteer de gebruikte optie en het resultaat dat de GR geeft.
3 Beantwoord de gestelde vraag.

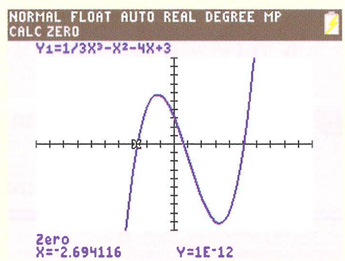
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 3$.
Rond in deze opgave de antwoorden af op twee decimalen.

a Los op $f(x) = 0$.
b Bereken de extreme waarden van f.
c Los op $f(x) = x - 2$.

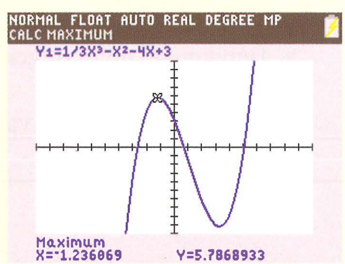
Uitwerking

a Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 3$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft
$x \approx -2{,}69 \vee x \approx 0{,}66 \vee x \approx 5{,}03$.



b De optie maximum geeft $x \approx -1{,}24$ en $y \approx 5{,}79$.
De optie minimum geeft $x \approx 3{,}24$ en $y \approx -9{,}12$.
Dus max. is $f(-1{,}24) \approx 5{,}79$ en min. is $f(3{,}24) \approx -9{,}12$.

c Voer in $y_2 = x - 2$.
Intersect geeft $x \approx -3{,}19 \vee x \approx 0{,}89 \vee x \approx 5{,}30$.



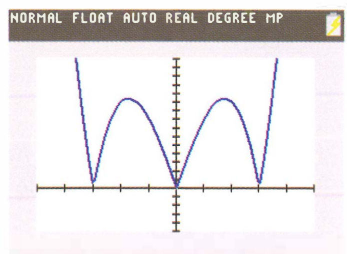
1

65 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 4$.
Rond in deze opgave de antwoorden af op twee decimalen.
a Los op $f(x) = 0$.
b Bereken de extreme waarden van f.
c Los op $f(x) = -x + 3$.

66 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.
a $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$
b $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$
c $0{,}4x^3 + 2x^2 + x - 2 = x + 2$
d $0{,}2x^5 - x^4 + 4x^2 = 0{,}2x + 3$

67 Bereken van de volgende functies de extreme waarden. Rond af op twee decimalen.
a $f(x) = 0{,}2x^4 - x^3 - x^2 + 8x + 2$
b $g(x) = -1\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 40x - 28$

68 Gegeven is de functie $f(x) = |x^3 - 9x|$.
Op het GR-scherm hiernaast is de grafiek van f geplot.
Hiervoor is ingevoerd $y_1 = \text{abs}(x^3 - 9x)$ met Xmin = −5, Xmax = 5, Ymin = −5 en Ymax = 15.
Op de TI zit abs in het MATH-NUM-menu.
Op de Casio zit Abs in het OPTN-NUM-menu.
Los de volgende vergelijkingen op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.
a $|x^3 - 9x| = 5$
b $|x^3 - 9x| = x + 5$

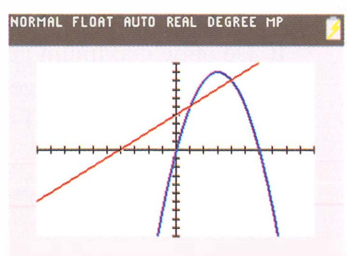


figuur 1.20

A 69 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.
a $0{,}5x^3 - 5x^2 + 20 = 0$
b $0{,}1x^4 + 0{,}1x^3 - 12x^2 + 50 = 25x$
c $|x^4 - x^3 + x - 5| = x + 3$
d $|x^3 - 5x^2 - 2x + 24| = 20$

A 70 De top van de grafiek van $f_p(x) = 2x^2 + p^2x + p$ ligt op de lijn $y = 8x + 4$.
Bereken p en de bijbehorende extreme waarde. Rond zo nodig af op drie decimalen.

O 71 Op het GR-scherm hiernaast zijn de grafieken van $f(x) = -x^2 + 6x$ en $g(x) = x + 4$ geplot.
a Bereken de oplossingen van de vergelijking $-x^2 + 6x = x + 4$.
b Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g?



figuur 1.21

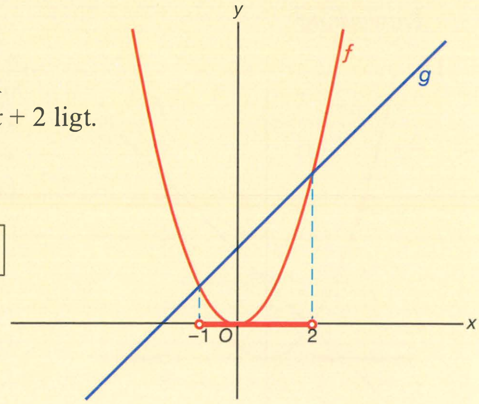
Theorie B Ongelijkheden oplossen

In opgave 71 heb je gekeken voor welke waarden van x de grafiek van $f(x) = -x^2 + 6x$ boven die van $g(x) = x + 4$ ligt. Daarmee heb je de ongelijkheid $-x^2 + 6x > x + 4$ opgelost.

De oplossing van de ongelijkheid $x^2 < x + 2$ is uit figuur 1.22 af te lezen. Je kijkt voor welke waarden van x de grafiek van $f(x) = x^2$ onder die van $g(x) = x + 2$ ligt. Op de x-as lees je af $x^2 < x + 2$ geeft $-1 < x < 2$.

x ligt tussen −1 en 2.

Ook kun je aflezen $x^2 \geq x + 2$ geeft $x \leq -1 \vee x \geq 2$.



figuur 1.22 Op de x-as is aangegeven waar $f(x) < g(x)$ is.

Bij het oplossen van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ heb je de oplossing van de vergelijking $f(x) = g(x)$ en een schets van de grafieken van f en g nodig. Nadat je de vergelijking hebt opgelost, lees je uit de schets af voor welke waarden van x de grafiek van f onder die van g ligt.

Bij het oplossen van een ongelijkheid lees je het antwoord af op de x-as.
Bij $f(x) < g(x)$ kijk je waar de grafiek van f onder die van g ligt.
Bij $f(x) > g(x)$ kijk je waar de grafiek van f boven die van g ligt.

Ook bij het oplossen van ongelijkheden kun je aan de vraagstelling zien of je algebraïsch te werk moet gaan, of dat je de grafisch-numerieke aanpak mag kiezen.

Werkschema: het oplossen van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$

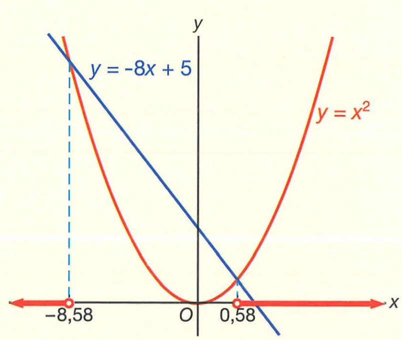
1. Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.
2. Schets de grafieken van f en g.
3. Geef op de x-as aan waar de grafiek van f onder die van g ligt.
4. Geef de oplossing van de ongelijkheid.

Voorbeeld

Los op $x^2 > -8x + 5$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

Uitwerking
Voer in $y_1 = x^2$ en $y_2 = -8x + 5$.
Intersect geeft $x \approx -8{,}58$ en $x \approx 0{,}58$.

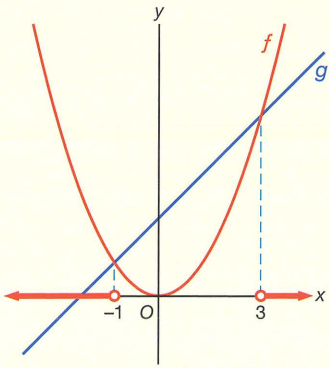
Zie de figuur hiernaast.
$x^2 > -8x + 5$ geeft $x < -8{,}58 \vee x > 0{,}58$



Voorbeeld

Los algebraïsch op $x^2 > 2x + 3$.

Uitwerking



$$\underbrace{x^2}_{f(x)} > \underbrace{2x + 3}_{g(x)}$$

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \lor x = 3$$

$x^2 > 2x + 3$ geeft $x < -1 \lor x > 3$.

72 Los op. Rond in het antwoord zo nodig af op drie decimalen.

a $x^2 - 3x \leq 14$
b $x^2 + 2x > 11$
c $8x^2 + 6x - 35 \geq 0$
d $x^3 + 4{,}5x^2 < 19x + 60$

73 Los algebraïsch op.

a $x^4 > 81$
b $x^3 < -8$
c $\frac{1}{2}x^4 + 1 < 9$
d $\frac{1}{3}(x - 1)^3 > 9$

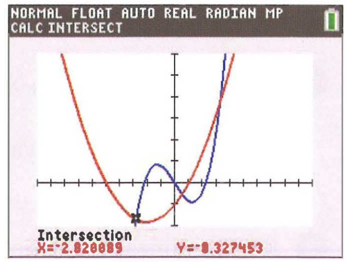
A 74 Los op. Rond in het antwoord zo nodig af op twee decimalen.

a $0{,}1x^3 - 2x^2 + 8x + 10 \geq -x + 15$
b $-0{,}5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 8 \geq x + 7$
c $|x^3 - 10x| \leq 2x + 8$
d $|x^4 + x^2 - 5x - 10| \leq 8 - |2x - 4|$

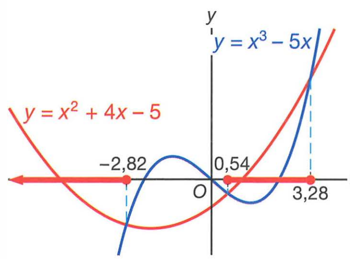
Terugblik

Vergelijkingen en ongelijkheden grafisch-numeriek oplossen

Elke vergelijking is grafisch-numeriek op te lossen. Je voert daarbij op de GR de formules y_1 = linkerlid en y_2 = rechterlid in. Vervolgens plot je de grafieken en met de optie intersect bereken je de coördinaten van de snijpunten. De x-coördinaten van de snijpunten zijn de oplossingen van de vergelijking.



Zo voer je voor het grafisch-numeriek oplossen van de vergelijking $x^3 - 5x = x^2 + 4x - 5$ de formules $y_1 = x^3 - 5x$ en $y_2 = x^2 + 4x - 5$ in. Kies het venster zo, dat alle snijpunten op het scherm te zien zijn. Zie het GR-scherm hiernaast.
De optie intersect geeft de oplossingen $x \approx -2{,}82$, $x \approx 0{,}54$ en $x \approx 3{,}28$. Hierbij is afgerond op twee decimalen.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) kun je gebruiken als het linker- of rechterlid nul is.

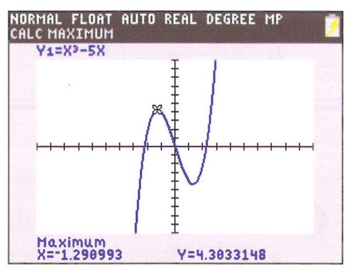


Voor het oplossen van de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ ga je als volgt te werk:

- Los op $f(x) = g(x)$.
- Schets de grafieken van f en g.
- Geef op de x-as aan waar de grafiek van f boven die van g ligt.
- Geef de oplossing van de ongelijkheid.

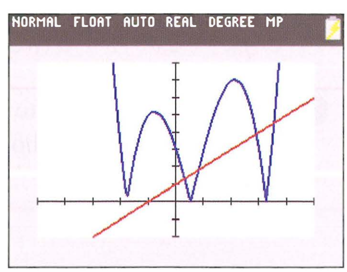
Voor de schets bij de ongelijkheid $x^3 - 5x \leq x^2 + 4x - 5$ gebruik je het GR-scherm hierboven.
$x^3 - 5x \leq x^2 + 4x - 5$ geeft $x \leq -2{,}82 \vee 0{,}54 \leq x \leq 3{,}28$

Toppen berekenen met de GR



Om de toppen van de grafiek van $f(x) = x^3 - 5x$ met de GR te berekenen, gebruik je de opties minimum en maximum.
Je krijgt max. is $f(-1{,}29) \approx 4{,}30$ en min. is $f(1{,}29) \approx -4{,}30$.

Modulusongelijkheden



Om de modulusongelijkheid $|x^3 - 2x^2 - 5x + 3| \leq x + 1$ op te lossen voer je in $y_1 = \text{abs}(x^3 - 2x^2 - 5x + 3)$ en $y_2 = x + 1$. Op de TI zit abs in het MATH-NUM-menu en op de Casio zit Abs in het OPTN-NUM-menu. In het scherm hiernaast is Xmin = −5, Xmax = 5, Ymin = −2 en Ymax = 8 genomen.
Intersect geeft $x \approx 0{,}31$, $x \approx 0{,}81$, $x \approx 2{,}90$ en $x \approx 3{,}54$.
Dus $|x^3 - 2x^2 - 5x + 3| \leq x + 1$ geeft
$0{,}31 \leq x \leq 0{,}81 \vee 2{,}90 \leq x \leq 3{,}54$.

Diagnostische toets

1.1 Lineaire functies

1 **a** De lijn k gaat door het punt $A(-1, 6)$ en $rc_k = 2$.
Stel de formule op van k.
b De lijn l gaat door het punt $B(9, 3)$ en is evenwijdig met de lijn m: $y = -\frac{1}{2}x + 4$.
Stel de formule op van l.
c De lijn n: $y = ax + 5$ snijdt de x-as in het punt $(-10, 0)$.
Bereken a.

2 **a** Stel de vergelijking op van de lijn k door de punten $A(-5, 2)$ en $B(3, -2)$.
b Stel de formule op van de lijn l door de punten $P(40, 60)$ en $Q(65, 135)$.

3 W is een lineaire functie van t.
Voor $t = 4$ is $W = 500$ en voor $t = 12$ is $W = 2900$.
a Schrijf W als functie van t.
b Bereken W voor $t = 5{,}2$.

4 Gegeven is de functie $f(x) = 2x + 1 - |3x - 6|$.
a Teken de grafiek van f.
b Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafiek van f en de x-as.

1.2 Tweedegraadsvergelijkingen

5 Bereken exact de oplossingen.
a $3x^2 - x = 0$
b $3x^2 - 9x = 12$
c $3x^2 - x = 2$
d $x^2 + 14 = 16$
e $(2x - 3)^2 = 81$
f $(3x + 2)(x - 1) = 0$
g $x^2 = 7x + 13$
h $(3x + 2)(x - 1) = x(x + 5)$
i $(x + 2)^2 = 3x + 7$
j $(x - 3)^2 - (x + 1)^2 = (x - 4)^2$

6 Bereken voor welke p de vergelijking
a $2x^2 + 4x + p = 0$ geen oplossing heeft
b $3x^2 + px + 17 = 0$ twee oplossingen heeft
c $px^2 + 2x + 5 = 0$ twee oplossingen heeft.

7 De vergelijking $px^2 - 6x + 12 = 0$ heeft één oplossing.
Bereken p en de bijbehorende oplossing.

1.3 Extreme waarden en inverse functies

8 Bereken de extreme waarde.

a $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$

b $g(x) = -0{,}4x^2 + 4x - 3$

9 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}6x^2 - 4{,}8x + 3$.

a Neem $D_f = [0, 5]$ en bereken B_f.

b Neem $D_f = [2, 10]$ en bereken B_f.

10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4\frac{1}{2}$.
Bereken de grootste waarde van a waarvoor de functie f met $D_f = \langle \leftarrow, a]$ een inverse functie heeft en teken in één figuur voor deze waarde van a de grafieken van f en f^{inv}.

1.4 Tweedegraadsfuncties met een parameter

11 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -x^2 + px - 3$.
Bereken algebraïsch voor welke p

a de top van de grafiek van f_p op de x-as ligt

b f_p een positief maximum heeft.

12 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^2 + px + 6p$.

a Bereken voor welke p de extreme waarde gelijk is aan -13.

b Bereken voor welke waarden van p de top van de grafiek van f_p op de lijn l: $y = -5x + 10$ ligt.

13 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^2 + 2px + p$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

14 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + x^2 + 2x - 5$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de nulpunten en de extreme waarden van f.

15 Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^4 - 4x^2 = 0{,}5x - 2$

b $|x^3 - 3x| = -\frac{1}{2}x + 2$

16 Los op. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

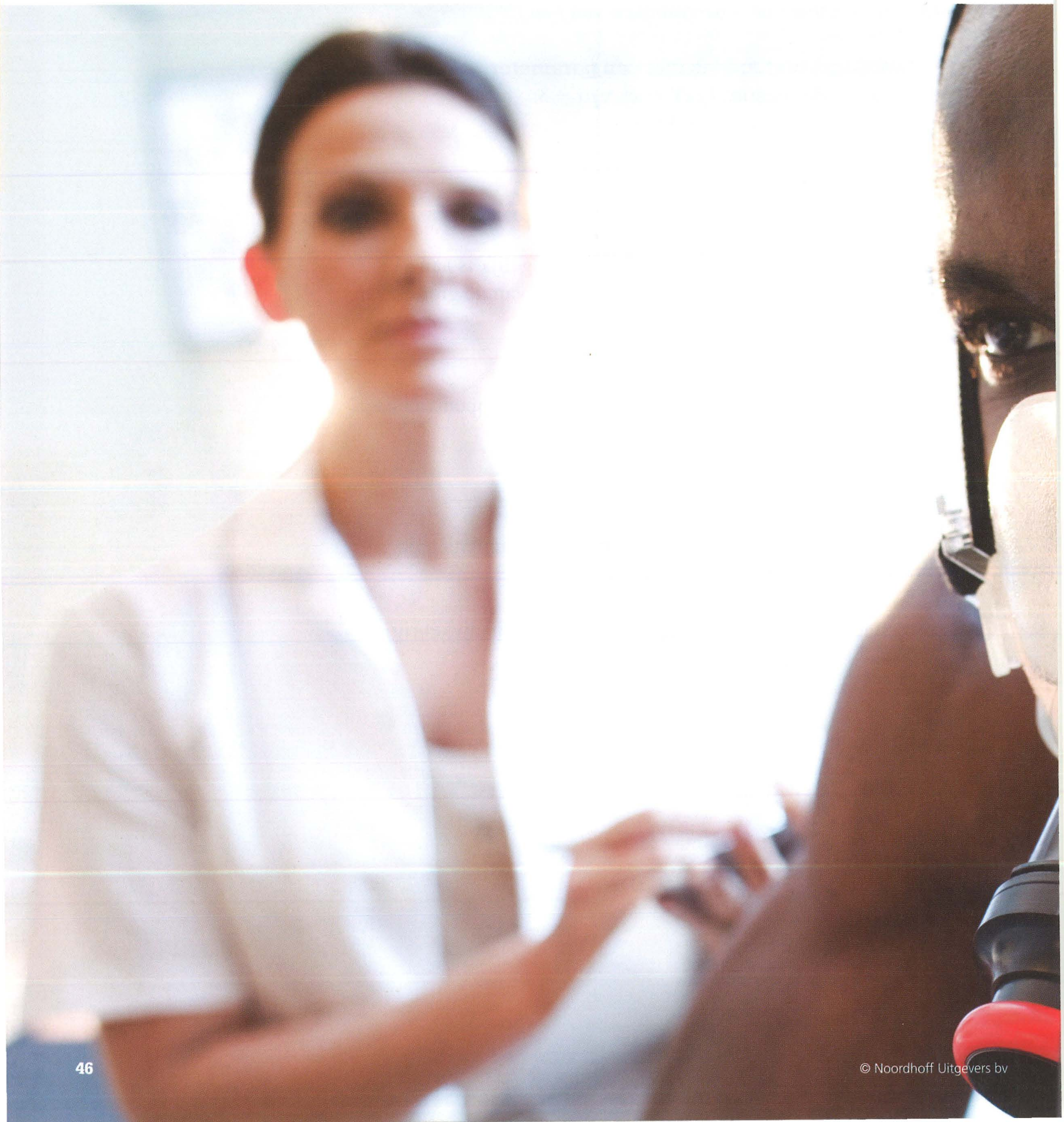
a $x^2 + 5x \leq x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

b $10 - |4 - 3x| < |x^3 - 4x^2 + x|$

Bij een keuring moeten topsporters binnen korte tijd een zware inspanning verrichten. Er wordt gemeten wat de maximale hartslag is en ook hoe snel de hartslag weer op een normaal peil komt. De snelheid waarmee de hartslag afneemt zegt iets over de conditie van de sporter.

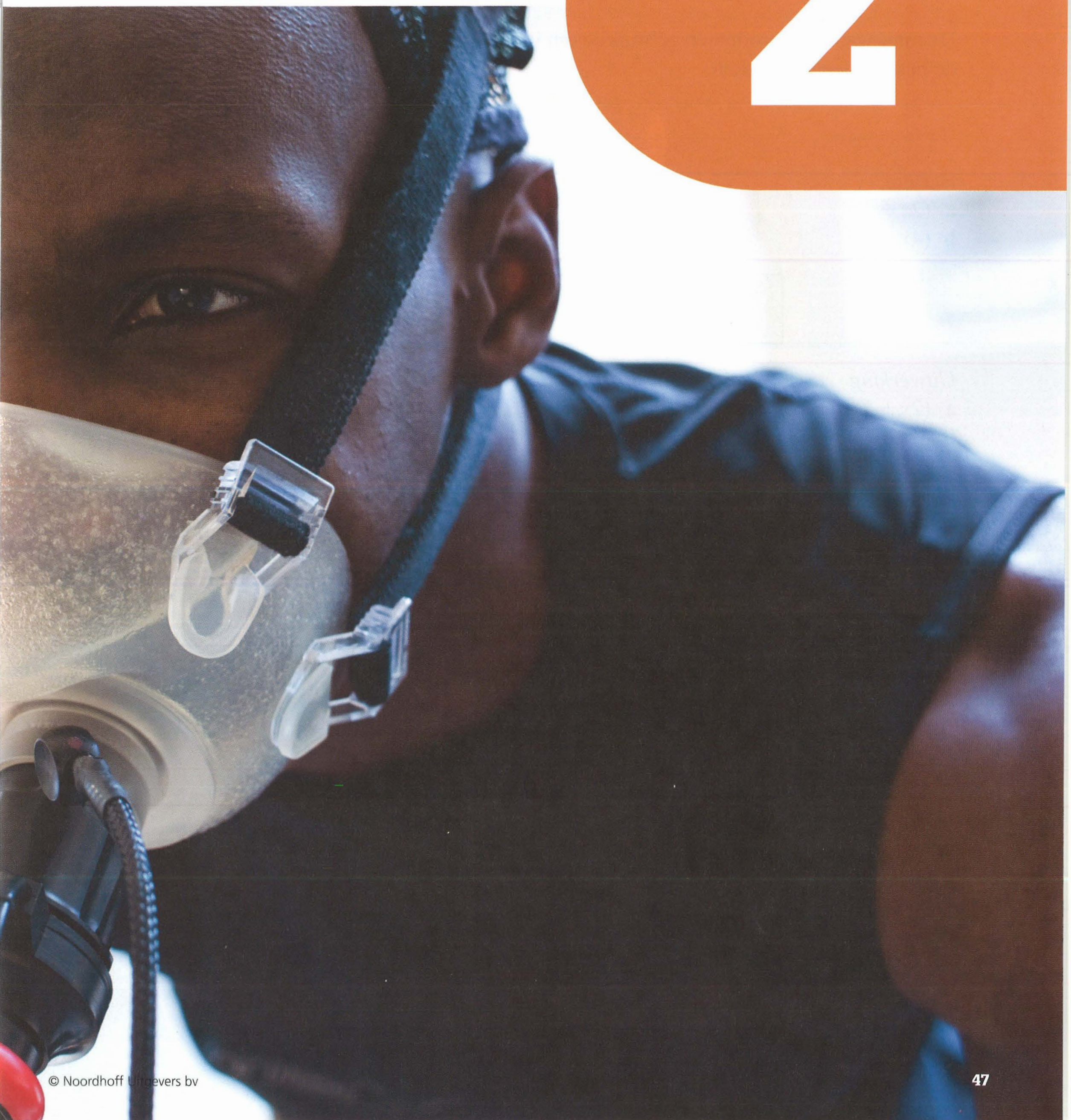
Wat leer je?

- Differentiequotiënten gebruiken om gemiddelde snelheden en de snelheid op één moment te benaderen.
- Hellinggrafieken tekenen en plotten.
- De definitie van de afgeleide gebruiken om regels voor het differentiëren af te leiden.
- Werken met de productregel en de quotiëntregel voor het differentiëren.
- De formule van een raaklijn opstellen met behulp van de afgeleide functie.



De afgeleide functie

2



Voorkennis Herleiden

2

Theorie A De merkwaardige producten

Voor het wegwerken van de haakjes in $(2x+3)^2$, $(4x-1)^2$ en $(5x+2)(5x-2)$ gebruik je de **merkwaardige producten**.

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$2AB$ heet het dubbele product van A en B.

De merkwaardige producten gebruik je om in één keer de haakjes weg te werken.

Voorbeeld

Herleid.

a $(2x+3)^2$

b $(4x-1)^2$

c $(5x+2)(5x-2)$

d $(3x+2)^2-(x-4)^2$

Het product van $2x$ en 3 is $2x \cdot 3 = 6x$, dus het dubbele product is $2 \cdot 6x = 12x$.

Uitwerking

a $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

Het kwadraat van $2x$ is $(2x)^2 = 4x^2$.

b $(4x-1)^2 = 16x^2 - 8x + 1$

c $(5x+2)(5x-2) = 25x^2 - 4$

d $(3x+2)^2-(x-4)^2 = 9x^2+12x+4-(x^2-8x+16) = 9x^2+12x+4-x^2+8x-16 = 8x^2+20x-12$

Denk aan de haakjes.

1 Herleid.

a $(2x-5)^2$

b $(3+h)^2$

c $(\frac{1}{2}x-1)(\frac{1}{2}x+1)$

d $2(3x-2)^2+3(2x-1)^2$

e $(3x+2)^2-(2x-6)^2$

f $(6x-5)^2-\frac{1}{2}(2x-4)^2$

Theorie B Substitueren

Bij de functie $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ bereken je $f(2p)$ door $x = 2p$ te substitueren in de formule van f.

$f(2p) = 2 \cdot (2p)^2 - 3 \cdot 2p + 4 = 2 \cdot 4p^2 - 6p + 4 = 8p^2 - 6p + 4$

En zo is $f(2+p) = 2 \cdot (2+p)^2 - 3 \cdot (2+p) + 4 =$

$2(4+4p+p^2) - 6 - 3p + 4 = 8 + 8p + 2p^2 - 6 - 3p + 4 = 2p^2 + 5p + 6$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$.
Herleid.

a $f(x - 4)$ **b** $f(x + h)$

Uitwerking

a $f(x - 4) = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 4(x - 4) - 3 = -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) + 4x - 16 - 3 =$

$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8 + 4x - 16 - 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 8x - 27$

b $f(x + h) = -\frac{1}{2}(x + h)^2 + 4(x + h) - 3 = -\frac{1}{2}(x^2 + 2xh + h^2) + 4x + 4h - 3 =$

$-\frac{1}{2}x^2 - xh - \frac{1}{2}h^2 + 4x + 4h - 3$

2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$.
Herleid.

a $f(2x)$ **b** $f(x + 5)$ **c** $f(3x + 1)$ **d** $f(x + h)$

Theorie C Herleiden van breuken

In de breuk $\frac{15x}{20}$ kun je de teller en de noemer delen door 5.

Je krijgt $\frac{15x}{20} = \frac{3x}{4} = \frac{3}{4}x$.

In de breuk $\frac{5ab}{8a}$ kun je de teller en de noemer delen door a,

mits $a \neq 0$. ← Delen door 0 mag niet.

Je krijgt $\frac{5ab}{8a} = \frac{5b}{8} = \frac{5}{8}b$, mits $a \neq 0$.

Mits $a \neq 0$ betekent dat de voorwaarde $a \neq 0$ geldt.

Voorbeeld

Herleid de formule $y = \frac{2{,}8xh + 1{,}4h^2}{h}$.

Uitwerking

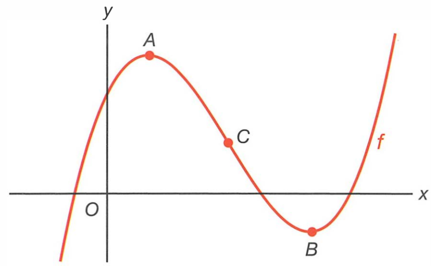
$y = \frac{2{,}8xh + 1{,}4h^2}{h} = \frac{h(2{,}8x + 1{,}4h)}{h} = 2{,}8x + 1{,}4h$, mits $h \neq 0$

3 Herleid de volgende formules.

a $y = \frac{3xh + 2h^2}{h}$ **b** $y = \frac{axh + bh^2}{h}$ **c** $y = \frac{a(x + h)^2 - ax^2}{h}$

2.1 Snelheden

O 1 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 6$. De toppen zijn $A(1, 8\frac{1}{3})$ en $B(5, -2\frac{1}{3})$. Verder zie je het punt $C(3, 3)$.
Tussen A en B daalt de grafiek, maar tussen A en C verloopt de daling anders dan tussen C en B. Omschrijf dit verschil.



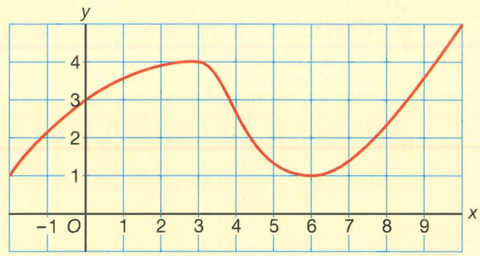
figuur 2.1

Theorie A Soorten van stijgen en dalen

De grafiek in figuur 2.2 is **stijgend** op de intervallen $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ en $\langle 6, \rightarrow \rangle$.

De grafiek is **dalend** op het interval $\langle 3, 6 \rangle$.

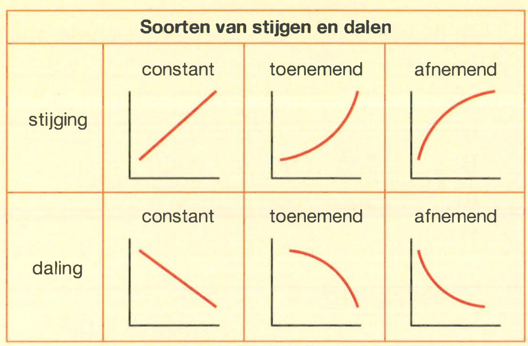
In figuur 2.2 zijn de volgende soorten van stijgen en dalen te herkennen:



figuur 2.2

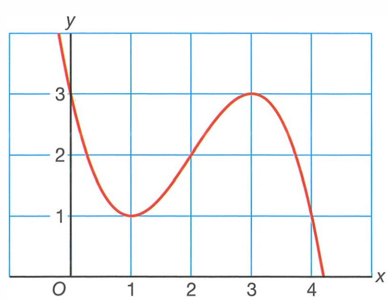
afnemend stijgend op $\langle \leftarrow, 3 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 3, 4 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 4, 6 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle 6, \rightarrow \rangle$.

Afspraak
Op de vraag op welke intervallen een grafiek stijgend/dalend is, noem je de grootst mogelijke open intervallen.



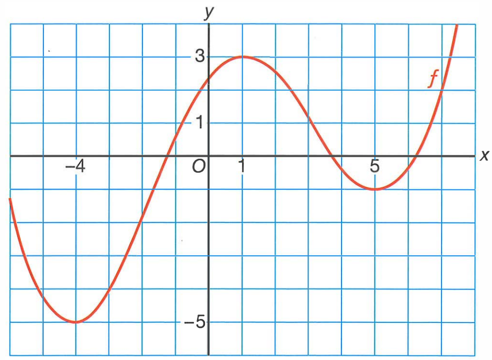
figuur 2.3

2 Welke soorten van stijgen en dalen kun je in figuur 2.4 herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.



figuur 2.4

3 Welke soorten van stijgen en dalen kun je in figuur 2.5 herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.

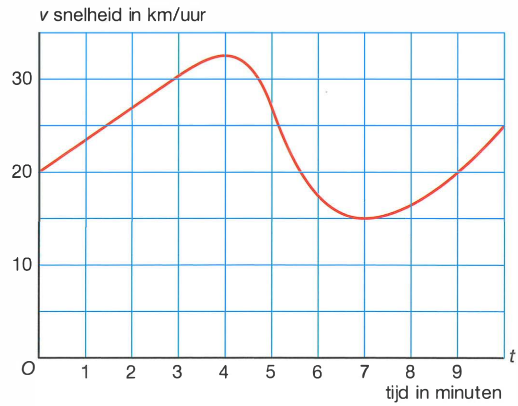


figuur 2.5

4 De grafiek van figuur 2.6 gaat over de snelheid van een fietser tijdens een 10 minuten durende tocht door een glooiend landschap.

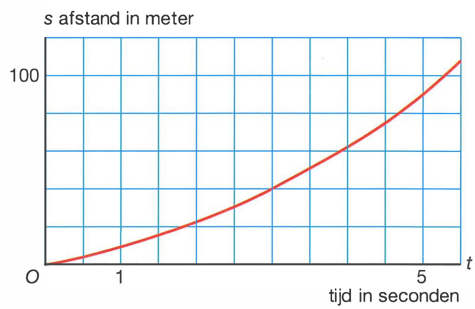
a Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.

b Na hoeveel minuten heeft de fietser tijdens deze tocht te maken met de steilste klim? Licht toe.



figuur 2.6

O 5 In figuur 2.7 is van een motorrijder de afgelegde afstand in meter uitgezet tegen de tijd t in seconden.
Bereken de gemiddelde snelheid van de motorrijder gedurende de eerste vijf seconden.

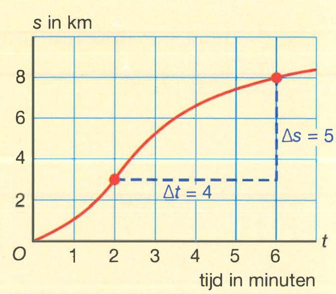


figuur 2.7

Theorie B Gemiddelde snelheid

In figuur 2.8 zie je een **tijd-afstandgrafiek**.
De **gemiddelde snelheid** op het interval [2, 6] is

$$\frac{\text{afgelegde afstand}}{\text{tijd}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8-3}{6-2} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ km per minuut.}$$



figuur 2.8

In een tijd-afstandgrafiek is de afgelegde afstand s uitgezet tegen de tijd t.
De gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

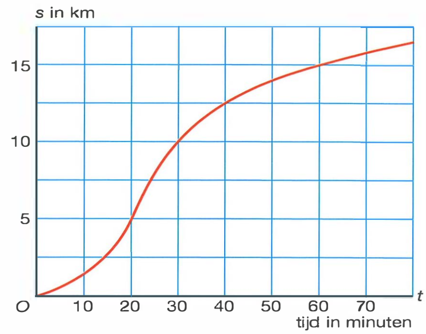
2

6 Zie de tijd-afstandgrafiek in figuur 2.9.

a Bereken de gemiddelde snelheid in km per uur op de intervallen [20, 40] en [30, 60].

b Hoe zie je aan de grafiek dat de snelheid niet constant is?

c Er is een $p \neq 20$ zo, dat de gemiddelde snelheid op het interval $[0, p]$ gelijk is aan die op het interval [0, 20].
Voor welke p is dat het geval?



figuur 2.9

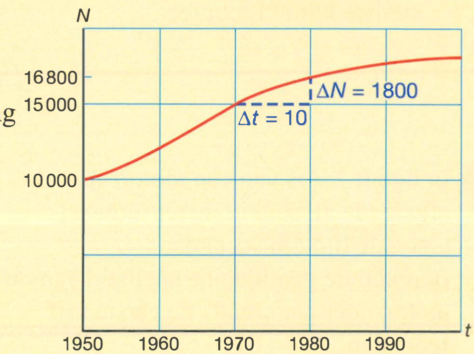
R 7 Gegeven is een tijd-afstandgrafiek die afnemend stijgend is.
Wat kun je zeggen van de gemiddelde snelheid op het interval $[0, t]$ als je t steeds groter neemt?

Theorie C Differentiequotiënten

In figuur 2.10 is het aantal inwoners van een plaats uitgezet tegen de tijd. Je ziet dat tussen 1970 en 1980 het aantal inwoners is toegenomen van 15 000 tot 16 800. De gemiddelde verandering in deze periode is

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1800}{10} = 180 \text{ inwoners per jaar.}$$

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.

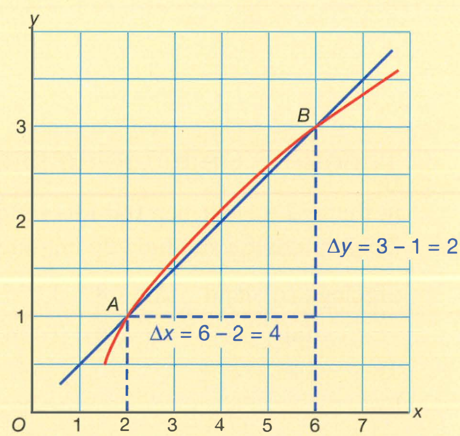


figuur 2.10

Zie figuur 2.11. Op het interval [2, 6] is
$\Delta x = 6 - 2 = 4$ en $\Delta y = 3 - 1 = 2$.

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = 0{,}5$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet het **differentiequotiënt** van y op het interval [2, 6].

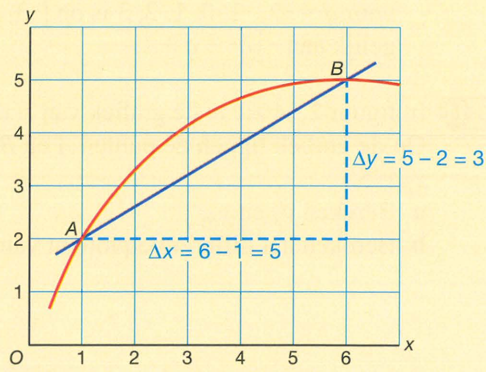


figuur 2.11

Het woord differentiequotiënt kun je als volgt begrijpen.

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is een deling, dus een *quotiënt*
- onder en boven de breukstreep staan verschillen en een ander woord voor verschil is *differentie*.

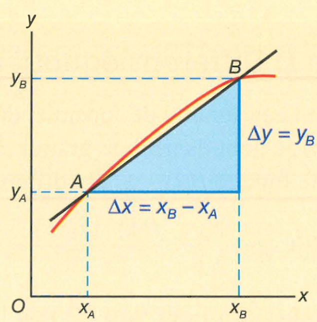
Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de richtingscoëfficiënt van de lijn AB in figuur 2.12.
In plaats van 'de richtingscoëfficiënt van de lijn AB' zeggen we ook 'de **helling** van de lijn AB'.



figuur 2.12

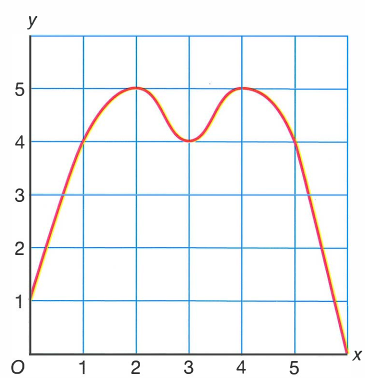
Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is

- **de gemiddelde toename van y op $[x_A, x_B]$**
- **de richtingscoëfficiënt van de lijn AB**
- **de helling van de lijn AB**
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



8 [► WERKBLAD] Zie figuur 2.13.

a Bereken de gemiddelde toename van y op $[0, 4]$.
b Bereken het differentiequotiënt van y op $[2, 6]$.
c Voor welke p is het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk aan 0,6?
d Licht toe dat er drie waarden van q zijn waarvoor het differentiequotiënt van y op $[1, q]$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.



figuur 2.13

D 9 Bij de grafiek van een functie f met domein $[0, 10]$ en $f(0) = -3$ hoort de volgende tabel.

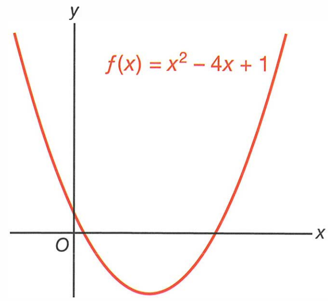
interval	[0, 1]	[1, 3]	[3, 6]	[6, 10]
differentiequotiënt	4	2	−2	−1

Teken een mogelijke grafiek van f. Waarom zijn er meerdere mogelijkheden?

2

D 10 **a** Teken op [0, 5] een grafiek door het punt (0, -4) waarvoor geldt:
voor $p = 1, 2, 3, 4, 5$ is op $[0, p]$ het differentiequotiënt gelijk aan $\frac{1}{2}p^2 - 2p$.
b Teken op [-3, 3] een grafiek door het punt (0, 1) waarvoor geldt:
voor $q = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ is op $[-3, q]$ het differentiequotiënt gelijk aan $-\frac{1}{2}q^2 + q + 1$.

O 11 In figuur 2.14 zie je de grafiek van $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
Op de grafiek liggen de punten A en B met $x_A = 1$ en $x_B = 5$.
a Bereken y_A en y_B.
b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op [1, 5].



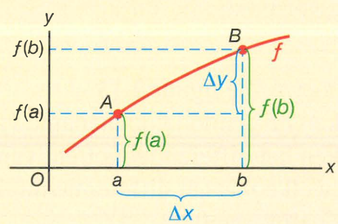
figuur 2.14

Theorie D Differentiequotiënten berekenen bij een functievoorschrift

Weet je van een functie de formule, dan kun je differentiequotiënten berekenen. Je hebt daarbij de grafiek niet nodig.
Zo is bij de functie $f(x) = x^2$ het differentiequotiënt van $f(x)$ op

[-3, 1] gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - -3} = \frac{1^2 - (-3)^2}{4} = \frac{-8}{4} = -2$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[a, b]$ is
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op [1, 4].

Uitwerking

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3 - 1\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

12 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op

a $[-1, 3]$
b $[1, 4]$
c $[-5, 1]$
d $[-5, 4]$

2

R 13 Wat weet je van de differentiequotiënten van een lineaire functie?

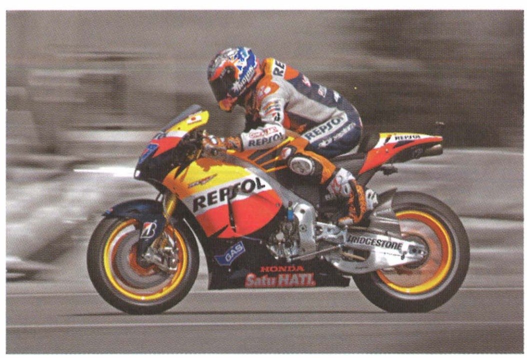
A 14 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

a Schets de grafiek.
b Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$ op $[1, 3]$.
c Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-2, 4]$.
d Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = 1$.
Stel de formule op van de lijn l door de punten A en B.

A 15 Een steen wordt met grote kracht omhoog geslingerd. De hoogte van de steen is gegeven door de formule $h = -4{,}9t^2 + 44{,}1t$ met h in meter en de tijd t in seconden.

a Schets de grafiek van h.
b Na hoeveel seconden is de steen op het hoogste punt?
c Hoeveel meter stijgt de steen in de derde seconde?
d Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste twee seconden.
e Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de laatste halve seconde van de val.

O 16 Voor een optrekkende motor is de afgelegde weg s gegeven door de formule $s = t^3 + t$. Hierin is s in meter en t de tijd in seconden.



a Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op $[2, 3]$.
b Bereken de gemiddelde snelheid op de intervallen $[2; 2{,}1]$, $[2; 2{,}01]$ en $[2; 2{,}001]$.
c In onderdeel b is de gemiddelde snelheid berekend op een steeds kleiner interval $[2; 2 + \Delta t]$. Achtereenvolgens was Δt gelijk aan $0{,}1$, $0{,}01$ en $0{,}001$.
Welk vermoeden krijg je over de gemiddelde snelheid als je Δt nog kleiner kiest?
Controleer je vermoeden voor $\Delta t = 0{,}0001$.
d Roeland denkt dat je de snelheid op $t = 2$ krijgt door $\Delta t = 0$ te nemen.
Licht toe waarom dit mis gaat.

Theorie E Snelheid op één moment

Je hebt geleerd hoe je de gemiddelde snelheid berekent op een gegeven tijdsinterval. Maar hoe krijg je de snelheid op één moment, bijvoorbeeld op $t = 4$?
Je krijgt een benadering van de snelheid op $t = 4$ door de gemiddelde snelheid op een heel klein interval [4, ...], bijvoorbeeld op [4; 4,01] of op [4; 4,001] te berekenen.

Bij de **tijd-afstandformule** $s = \frac{1}{2}t^3$ met s in meter en t in seconden is de gemiddelde snelheid op het interval [4; 4,01] gelijk aan

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4{,}01^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0{,}01} \approx 24{,}060 \text{ m/s}.$$

En op [4; 4,001] is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4{,}001^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0{,}001} \approx 24{,}006$ m/s.

Je krijgt het vermoeden dat de snelheid op $t = 4$ gelijk is aan 24 m/s.

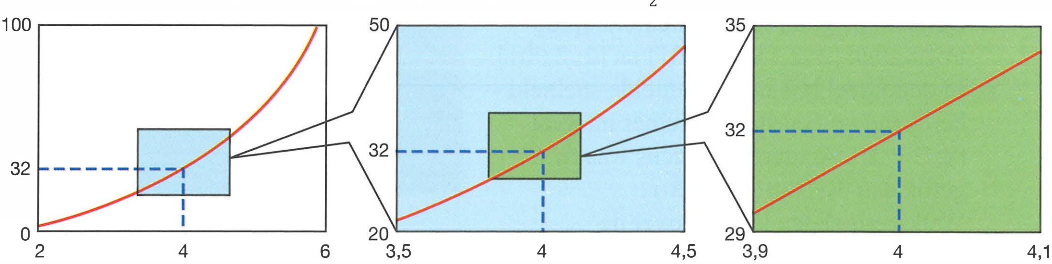
Om de snelheid op $t = 3$ te krijgen, neem je een klein interval $[3, 3 + \Delta t]$, bijvoorbeeld [3; 3,001]. De gemiddelde snelheid op dit interval geeft een goede benadering van de snelheid op $t = 3$.

Je krijgt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3{,}001^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^3}{0{,}001} \approx 13{,}5$ m/s.

Bij een tijd-afstandformule benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ met het differentiequotiënt op het interval $[a, a + \Delta t]$, met bijvoorbeeld $\Delta t = 0{,}01$ of $\Delta t = 0{,}001$.

Informatief Inzoomen op de grafiek

In de figuren hieronder is ingezoomd op de grafiek van $s(t) = \frac{1}{2}t^3$.



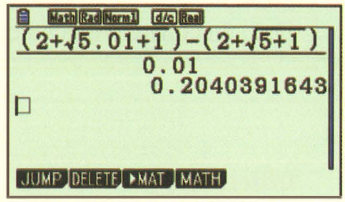
Hoe verder je inzoomt, hoe meer de grafiek op een rechte lijn gaat lijken. De helling van deze lijn geeft de snelheid op $t = 4$.
Zoom je in op de grafiek bij $t = 3$, dan krijg je de snelheid op $t = 3$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $s = 2 + \sqrt{t+1}$. Hierbij is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

Uitwerking

Op $[5; 5{,}01]$ is $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\left(2+\sqrt{5{,}01+1}\right) - \left(2+\sqrt{5+1}\right)}{0{,}01} \approx 0{,}20.$



De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 0,20 m/s.

T 17 [▶▶20] Gegeven is de formule $s = 10\sqrt{4t+1} - 10$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Neem in deze opgave $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

a Benader in m/s de snelheid op $t = 2$ en op $t = 20$.
b Onderzoek of de snelheid op $t = 11$ gelijk is aan het gemiddelde van de snelheden op $t = 2$ en $t = 20$.

18 Gegeven is de formule $s = 0{,}4t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 3$ en op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

19 Gegeven is de formule $s = 8 - \dfrac{5}{t+2}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 1$ en op $t = 2$. Neem beide keren $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

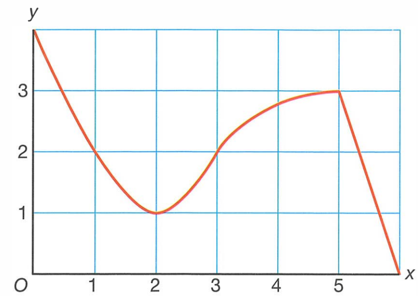
A 20 De oppervlakte van het kroos in de vijver van de familie Damen groeit volgens de formule $A = 1{,}20 \cdot 1{,}15^t$. Hierin is A de oppervlakte in m^2 en t de tijd in dagen.
Benader de snelheid in m^2/dag waarmee de oppervlakte van het kroos toeneemt op $t = 3$. Neem $\Delta t = 0{,}001$ en rond af op twee decimalen.

D 21 Gegeven is de formule $s = 75\sqrt{2t+4} - 150$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Op een tijdstip op het tijdsinterval $[8, 9]$ is de snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid op het interval $[2\frac{1}{2}, 16]$.
Toon dit aan.

Terugblik

Stijgen en dalen

We onderscheiden bij stijgen en dalen drie soorten: constant, afnemend en toenemend.
De grafiek hiernaast is afnemend dalend op $\langle 0, 2\rangle$, toenemend stijgend op $\langle 2, 3\rangle$, afnemend stijgend op $\langle 3, 5\rangle$ en constant dalend op $\langle 5, 6\rangle$.

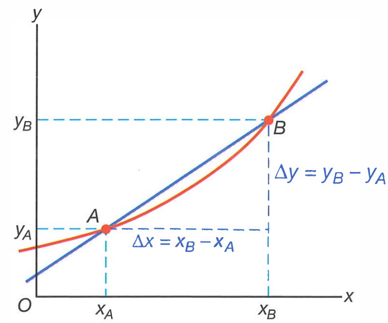


Differentiequotiënt

Om veranderingen op intervallen met verschillende lengten te vergelijken, gebruik je differentiequotiënten.
Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

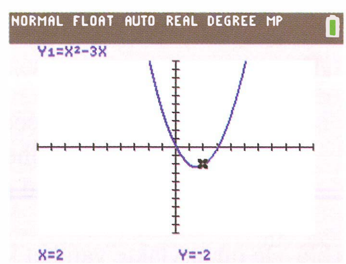
Het differentiequotiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn AB.
De volgende begrippen komen op hetzelfde neer.

- de gemiddelde toename van y op $[x_A, x_B]$
- het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt van de lijn AB
- de helling van de lijn AB



Het differentiequotiënt van een functie

Het differentiequotiënt van de functie f op $[a, b]$ is
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Weet je het functievoorschrift, dan kun je differentiequotiënten berekenen zonder de grafiek te gebruiken.
Zo is het differentiequotiënt van $f(x) = x^2 - 3x$ op $[-1, 2]$ gelijk aan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - -1} = \dfrac{-2 - 4}{3} = -2$.



Gemiddelde snelheid en snelheid op één moment

Bij een tijd-afstandgrafiek is de afgelegde afstand s uitgezet tegen de tijd t.

Het differentiequotiënt $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ geeft de gemiddelde snelheid.

Door het differentiequotiënt op een klein interval te berekenen, benader je de snelheid op één moment.
Zo benader je de snelheid op $t = 2\frac{1}{2}$ bij de formule $s = \frac{3}{4}t^3$ met s de afstand in meter en t de tijd in seconden bijvoorbeeld door

$\dfrac{s(2{,}501) - s(2{,}5)}{0{,}001} \approx 14{,}1$. Dus de snelheid is ongeveer 14,1 m/s.

2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

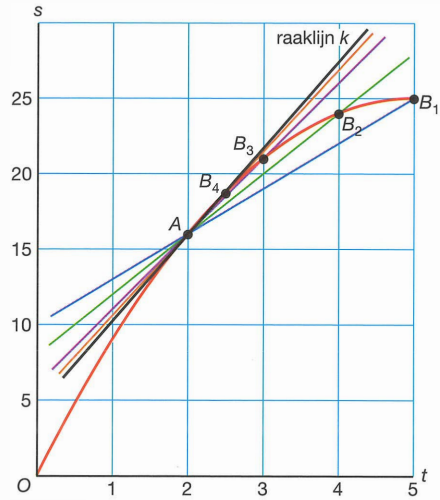
Door eerst paragraaf 2.5 Hellingen en raaklijnen met GeoGebra door te nemen zul je de theorie in de paragrafen 2.2, 2.3 en 2.4 beter begrijpen.

O 22 Gegeven is de formule $s = -t^2 + 10t$ met t op $[0, 5]$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.

a Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op de intervallen $[2, 5]$, $[2, 4]$, $[2, 3]$ en $[2; 2{,}5]$.

In figuur 2.15 is de bijbehorende grafiek getekend. Ook zijn de lijnen AB_1, AB_2, AB_3 en AB_4 getekend met $A(2, 16)$, $B_1(5, 25)$, $B_2(4, 24)$, $B_3(3, 21)$ en $B_4(2{,}5; 18{,}75)$.

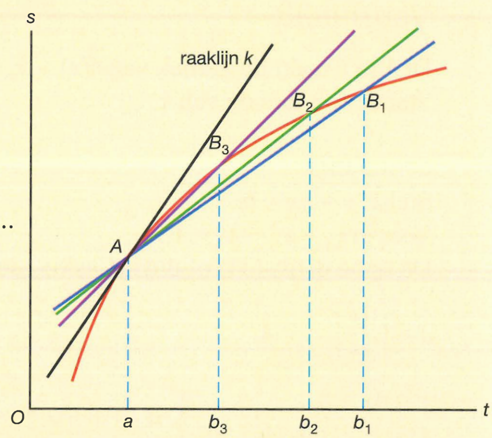
b Voor welke van deze lijnen komt de richtingscoëfficiënt het dichtst in de buurt van de richtingscoëfficiënt van de lijn k die de grafiek van f raakt in A?



figuur 2.15

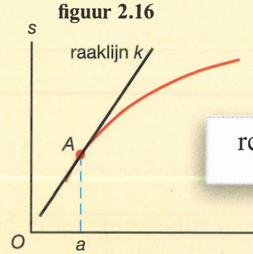
Theorie A Snelheid en richtingscoëfficiënt

In figuur 2.16 zie je een tijd-afstandgrafiek. Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.
De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB_1, AB_2, AB_3, ...
Hoe dichter B bij A komt te liggen, hoe meer de lijn AB zal lijken op de lijn k die de grafiek in A **raakt**. De lijn k is de **raaklijn** van de grafiek in A. De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A.



figuur 2.16

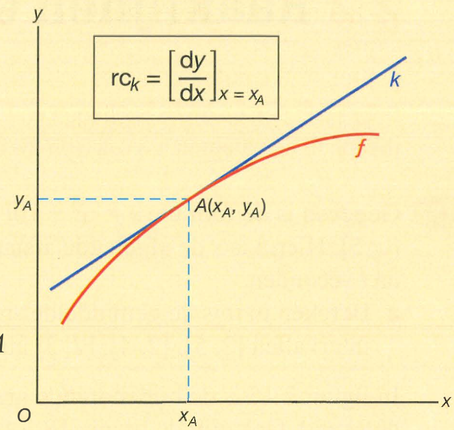
In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.



$\text{rc}_k = \text{snelheid op } t = a.$

In de [▶ DEMO] **Het tekenen van een raaklijn** wordt uitgelegd hoe je zo goed mogelijk een raaklijn in een punt van een grafiek kunt tekenen.

In figuur 2.17 is de raaklijn k in het punt $A(x_A, y_A)$ getekend. Net als bij een tijd-afstandgrafiek is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = x_A$.
Voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A bestaat de notatie $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$.
Spreek uit d y d x voor x is x a.



figuur 2.17

In plaats van
de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A
zeggen we ook
de **helling van de grafiek** in A.

$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ **is**

- **de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A**
- **de helling van de grafiek in A**
- **de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.**

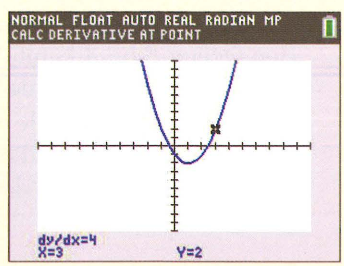
[▶GR] De GR heeft een optie om bij een gegeven formule $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ voor elke x_A te berekenen. Hoe dat gaat leer je in de module **Helling**.

Voorbeeld

De lijn k raakt de grafiek van $f(x) = x^2 - 2x - 1$ in het punt A met $x_A = 3$.
Stel de formule op van k.

Uitwerking
Stel k: $y = ax + b$.
Voer in $y_1 = x^2 - 2x - 1$.
De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft

$$a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 4.$$



$$\left.\begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(3) = 2, \text{ dus } A(3, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 3 + b = 2 \\ 12 + b = 2 \\ b = -10 \end{array}$$

Dus k: $y = 4x - 10$.

T 23 [▶▶26] Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$ en $g(x) = \sqrt{9x - 2}$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S. De lijn k raakt de grafiek van f in S en de lijn l raakt de grafiek van g in S.
Stel van zowel k als van l de formule op.

24 **a** De lijn k raakt de grafiek van $f(x) = x^2 + x - 2$ in het punt A met $x_A = -1$.
Stel de formule op van k.

b De lijn l raakt de grafiek van $g(x) = \dfrac{2}{x-1} + 3$ in het punt B met $x_B = 3$.
Stel de formule op van l.

25 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \dfrac{5x^2}{x^2+1}$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -2$.
De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 1$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

26 Een auto rijdt weg. Gedurende de eerste vijf seconden wordt de afgelegde afstand s in meter gegeven door de formule $s = 0{,}6t^2$. Hierbij is de tijd t in seconden.

a Bereken de snelheid op $t = 3$ en op $t = 5$.

b Na vijf seconden verandert de snelheid niet meer.
Hoeveel meter heeft de auto na tien seconden afgelegd?

Gebruik voor de snelheid op $t = 3$ de notatie $\left[\dfrac{ds}{dt}\right]_{t=3}$.

A 27 Na toediening van een koortsdrukkend medicijn kan de lichaamstemperatuur van een patiënt gedurende de eerste drie uur beschreven worden door het model $T = 37 + \dfrac{3}{2t+1}$. Hierin is T de lichaamstemperatuur in graden Celsius na t uur.

a Bereken met welke snelheid in graden Celsius per uur de lichaamstemperatuur afneemt op $t = 2$.

b Vanaf $t = 3$ blijft de snelheid waarmee de temperatuur afneemt constant, tot het lichaam op een temperatuur van 37 °C is gekomen.
Bereken voor welke t deze temperatuur van 37 °C is bereikt.
Rond af op één decimaal.

A 28 Bij sommige operaties in het onderlichaam krijgt de patiënt als verdoving een zogenaamde ruggenprik (spinale anesthesie). Er wordt dan een verdovend middel in het ruggenmergvocht gespoten.
Het is van belang een zodanige hoeveelheid van het verdovend middel in te spuiten dat de verdoving lang genoeg werkt.
In deze opgave gebruiken we voor de hoeveelheid verdovend middel het model $H = \dfrac{600t}{4^t}$. Hierin is H in mg en t de tijd in uren met $0 \leq t \leq 2$.

a Bereken met welke snelheid de hoeveelheid verdovend middel afneemt op $t = 1$. Rond in het antwoord af op één decimaal.

b Vanaf $t = 2$ blijft de snelheid waarmee de hoeveelheid verdovend middel afneemt constant.
Bereken voor welke waarde van t het verdovend middel uit het lichaam is verdwenen. Rond af op één decimaal.

D 29 Bij een onderzoek naar de hartslagfrequentie van sporters moet binnen enkele minuten een zware inspanning op een lopende band geleverd worden.
Het blijkt dat de hartslag direct begint te stijgen na aanvang van de proef en onmiddellijk begint te dalen na het verrichten van de inspanning.
Voor een hardloper hanteert men het model
$F = \dfrac{200t^2 + 1200t + 450}{4t^2 + 9}$. Hierin is t de tijd in minuten vanaf de aanvang van de proef en F de hartslagfrequentie in slagen per minuut.

a Hoe lang duurde de inspanning? Wat is de maximale hartslagfrequentie?

b Hoeveel seconden na het beëindigen van de inspanning duurt het tot de hartslagfrequentie is afgenomen tot 120 slagen per minuut? Met welke snelheid neemt de hartslagfrequentie op dat moment af?

Voor een wielrenner hanteert men het model
$F = \dfrac{240t^2 + 1440t + 540}{4t^2 + 9}$.
De maximale hartslagfrequentie van de wielrenner is k keer zo groot als de maximale hartslagfrequentie van de hardloper.

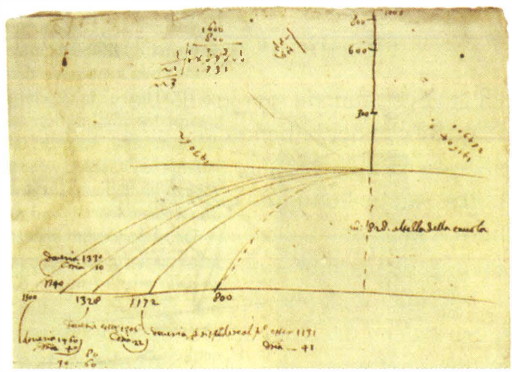
c Bereken k.

d Onderzoek of de snelheid waarmee de hartslagfrequentie van de wielrenner afneemt k keer zo groot is als de in vraag b berekende snelheid op het moment dat de hartslagfrequentie van de wielrenner is afgenomen tot $120k$ slagen per minuut.

Geschiedenis Galileo Galileï

Galileo Galileï (1564-1642) was de eerste die baanbrekend werk verrichtte met onderzoek op het gebied van snelheid en versnelling. Hierdoor konden later Newton (1642-1727) en Leibniz (1646-1716) hun theorie van de differentiaalrekening ontwikkelen. Bij zijn onderzoek kampte Galileï met het probleem dat er geen eenheid bestond voor snelheid. Volgens de verhoudingsleer van Euclides kon men slechts een verhouding tussen twee grootheden bepalen als deze soortgelijk zijn. Galileï kon dus wel een afstand door een afstand delen, maar niet bijvoorbeeld een afstand door een tijd. Ook nam men aan dat de valsnelheid constant was. Galileï bedacht enkele vernuftige proeven. De benodigde instrumenten maakte hij voornamelijk zelf.

deflector



Galileï toonde aan dat de valsnelheid niet constant is.
Hij liet van verschillende hoogtes een balletje op een deflector vallen. De deflector die op een tafel stond zorgde ervoor dat de verticale snelheid werd omgebogen in een horizontale snelheid. Het balletje viel daarna 828 punten naar beneden (Galileï werkte met punten: 1 punt ≈ 0,9 mm). Bij het loslaten van het balletje op een hoogte van 300 punten boven de tafel kwam het balletje 800 punten ver. Hij berekende dat de horizontale afstanden bij de hoogtes 600, 800 en 1000 punten gelijk moesten zijn aan 1131, 1306 en 1460 punten. De resultaten van zijn experimenten waren hiermee in overeenstemming.
Galileï ontdekte dat de formule $\text{afstand} = c \cdot \sqrt{\text{hoogte}}$ past bij dit experiment .

Vul je hoogte 300 en afstand 800 in in de formule dan krijg je $c = \dfrac{800}{\sqrt{300}} \approx 46{,}2$. Dit geeft de formule $\text{afstand} = 46{,}2 \cdot \sqrt{\text{hoogte}}$.
Deze formule klopt met de andere gevonden waarden.
Bij een constante valsnelheid zouden afstand en hoogte evenredig zijn. Er geldt echter dat de afstand evenredig is met de wortel uit de hoogte.
Dus de valsnelheid is niet constant.

O 30 In figuur 2.18 zie je de grafiek van de functie $f(x) = -x^2 + 4x$.

a Vul in *positief* of *negatief*.
De grafiek is stijgend op $\langle \leftarrow, 2 \rangle$, dus de helling in de bijbehorende punten van de grafiek is ...
De grafiek is dalend op $\langle 2, \rightarrow \rangle$, dus de helling in de bijbehorende punten van de grafiek is ...

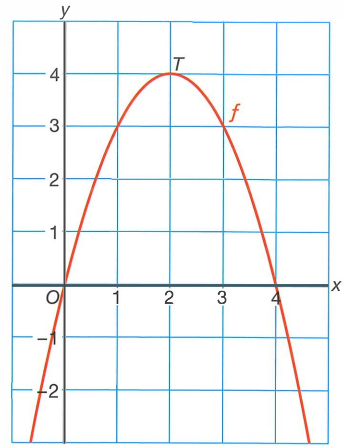
b Wat is de helling van de grafiek in de top T?

c Vul de tabel in. Gebruik de GR.

x-coördinaat	-1	0	1	2	3	4
helling						

d Teken de punten die uit de tabel volgen en teken door deze punten een lijn. Zet *helling* bij de verticale as.

e Wat stelt de lijn die je bij d hebt getekend voor?



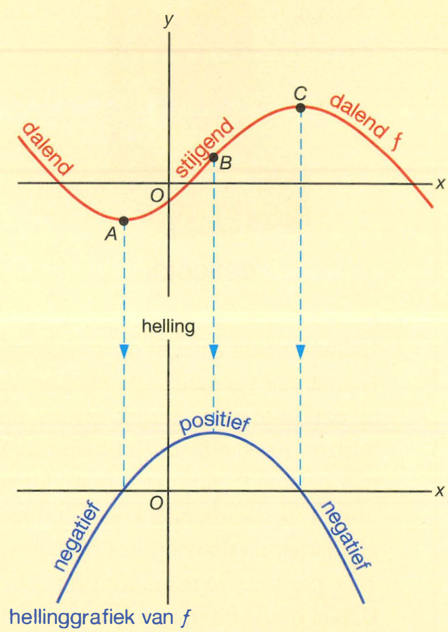
figuur 2.18

Theorie B Hellinggrafiek schetsen

Bij een gegeven functie kun je bij elke x de helling van de grafiek in het bijbehorende punt vinden.
Zo ontstaat een nieuwe functie: de **hellingfunctie**.
De grafiek van de hellingfunctie heet de **hellinggrafiek**.
Uit een gegeven grafiek van f kun je bijzonderheden van de hellinggrafiek afleiden.

- Bij een *dalend* deel van de grafiek van f horen *negatieve* hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar onder de x-as.
- In een *top* van de grafiek van f is de helling *nul*. De hellinggrafiek snijdt de x-as.
- Bij een *stijgend* deel van de grafiek van f horen *positieve* hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar boven de x-as.

Bekijk in figuur 2.19 hoe de hellinggrafiek samenhangt met de grafiek van f. Je ziet dat de toppen A en C de snijpunten opleveren van de hellinggrafiek met de x-as.
Tussen A en C stijgt de grafiek van f, dus daar ligt de hellinggrafiek boven de x-as.
In het punt B is de helling maximaal. Dit geeft het hoogste punt van de hellinggrafiek.



figuur 2.19 De hellinggrafiek van f hangt samen met de grafiek van f.

Het verband tussen grafiek en hellinggrafiek:

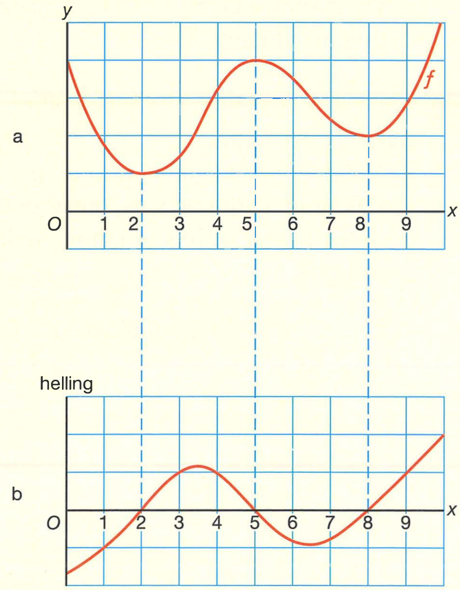
- **grafiek stijgend** — **hellinggrafiek boven de x-as**
- **grafiek dalend** — **hellinggrafiek onder de x-as**
- **grafiek heeft top** — **hellinggrafiek snijdt de x-as**

Voorbeeld

Zie figuur 2.20a met de grafiek van een functie f. Schets de hellinggrafiek van f.

Aanpak

	grafiek van f	hellinggrafiek van f
$\langle 0, 2\rangle$	dalend	onder de x-as
$x = 2$	top	snijdt de x-as
$\langle 2, 5\rangle$	stijgend	boven de x-as
$x = 5$	top	snijdt de x-as
$\langle 5, 8\rangle$	dalend	onder de x-as
$x = 8$	top	snijdt de x-as
$\langle 8, 10\rangle$	stijgend	boven de x-as



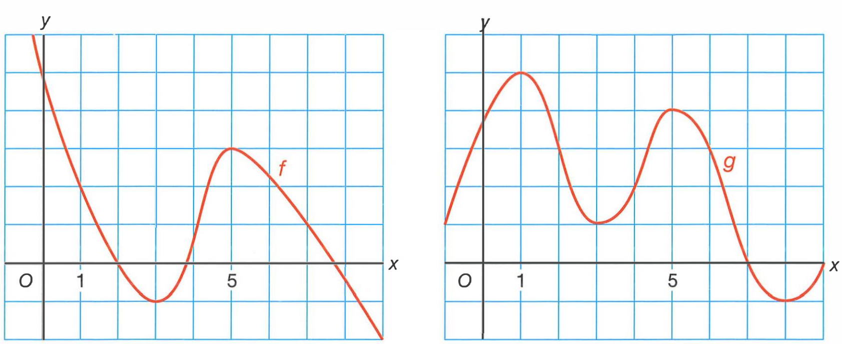
figuur 2.20

Teken eerst de punten waar de hellinggrafiek de x-as snijdt. Maak daarna de hellinggrafiek af. Je krijgt een globale grafiek.

Uitwerking

Zie figuur 2.20b.

31 [▶ WERKBLAD] Schets de hellinggrafieken van f en g.



figuur 2.21

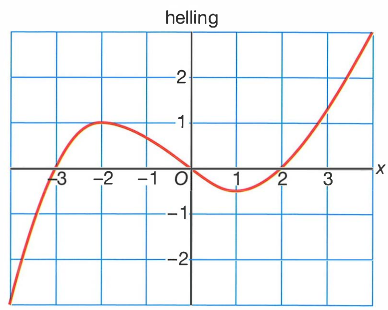
R 32 Hieronder staan enkele gegevens over de grafiek van een functie f.
Geef aan welke gevolgen deze hebben voor de hellinggrafiek van f.

a De grafiek is toenemend stijgend op $\langle a, b\rangle$.
b De grafiek is afnemend dalend op $\langle c, d\rangle$.
c De grafiek heeft een hoogste punt voor $x = p$.
d De grafiek gaat bij $x = q$ over van toenemend dalend in afnemend dalend.

33 [▶ WERKBLAD] Hiernaast is de hellinggrafiek van de functie f getekend.

a Vul de volgende tabel in. Vul in de middelste kolom in: snijdt de x-as, onder de x-as of boven de x-as en in de rechterkolom: dalend, stijgend of top.

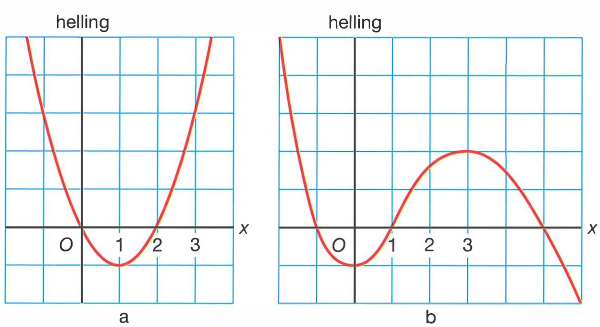
	hellinggrafiek van f	grafiek van f
$\langle -4, -3\rangle$		
$x = -3$		
$\langle -3, 0\rangle$		
$x = 0$		
$\langle 0, 2\rangle$		
$x = 2$		
$\langle 2, 4\rangle$		



figuur 2.22

b Teken een globale grafiek van f.

34 [▶ WERKBLAD] In figuur 2.23 zie je twee hellinggrafieken. Teken globale grafieken van de oorspronkelijke functies.



figuur 2.23

35 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$.

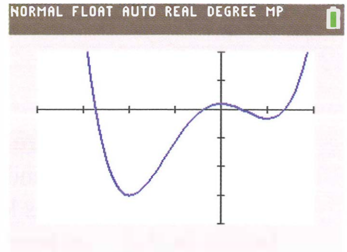
a Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

b Schets de hellinggrafiek van f.

c Op de hellinggrafiek ligt het punt $P(-1, a)$. Bereken a.

d Bereken in één decimaal nauwkeurig de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.

e De grafiek van f is de hellinggrafiek van een functie g. Teken een globale grafiek van g.



figuur 2.24

2

A 36 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 + x^2 - 6$.

a Schets de hellinggrafiek van f.

b De grafiek van f is de hellinggrafiek van een functie g. Teken een globale grafiek van g.

D 37 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en $g(x) = x^2 - 4x - 5$.

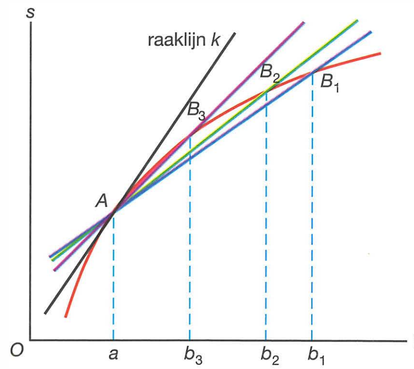
a Schets de hellinggrafiek van f en schets de hellinggrafiek van g.

b De hellinggrafiek van f is ook de hellinggrafiek van een functie h. De grafiek van h gaat door het punt $(3, 4)$. Stel de formule op van h.

Terugblik

Snelheid op $t = a$ en raaklijn

Door bij een tijd-afstandgrafiek de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.
De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de hellingen van de lijnen AB_1, AB_2, AB_3, . . .
Hoe dichter B bij A komt te liggen, des te meer de lijn AB gaat lijken op de lijn k die in A de grafiek raakt.
Bij een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.



Snelheid en richtingscoëfficiënt

Op de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$
ligt het punt $A(2, 3)$.
De formule van de raaklijn k in A krijg je als volgt.
Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.

De optie dy/dx (TI) of d/dx (Casio) geeft $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=2} = -2$,
dus $rc_k = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ A(2,3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = 3 \\ -4 + b = 3 \\ b = 7 \end{array}$$

Dus k: $y = -2x + 7$.

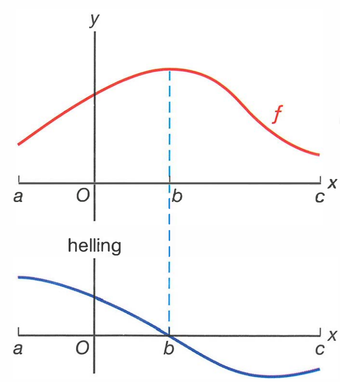
$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$

is
- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A
- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.

Hellinggrafieken schetsen

Bij een functie f hoort een hellingfunctie die voor elke x de waarde geeft van de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt.
De grafiek van de hellingfunctie heet de hellinggrafiek van f.
Bij een gegeven grafiek van een functie f kun je de hellinggrafiek schetsen.
Je gebruikt:

	grafiek van f	hellinggrafiek
$\langle a, b\rangle$	stijgend	boven de x-as
$x = b$	top	snijdt de x-as
$\langle b, c\rangle$	dalend	onder de x-as



2.3 Limiet en afgeleide

O 38 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

a Plot de grafiek van f.
b Bereken $f(1)$, $f(1{,}9)$, $f(1{,}99)$ en $f(2{,}01)$.
c Licht toe dat je $f(2)$ niet kunt berekenen.

2

O 39 In de breuk $\dfrac{5(x+3)}{x(x+3)}$ kun je de teller en de noemer delen door de factor $x + 3$, mits $x + 3 \neq 0$.
Je krijgt $\dfrac{5(x+3)}{x(x+3)} = \dfrac{5}{x}$ mits $x \neq -3$.
Herleid.

a $\dfrac{6(x+2)}{x(x+2)}$

b $\dfrac{(x+2)(x+3)}{2(x+3)}$

c $\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-1}$

d $\dfrac{x^2 - x}{x - 1}$

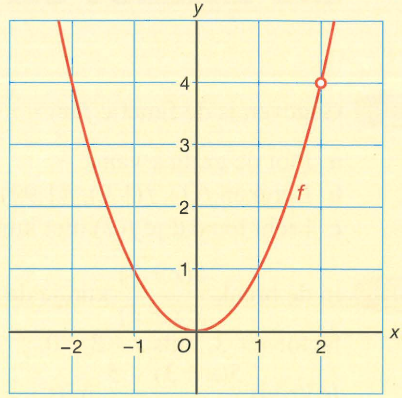
Theorie A De limiet als continumakende waarde

Bij de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ van opgave 38 kun je $f(2)$ niet berekenen. Bij invullen van $x = 2$ krijg je $\dfrac{8-8}{2-2} = \dfrac{0}{0}$ en dat is onbepaald.
In zowel de teller als de noemer van de breuk komt de factor $x - 2$ voor, immers $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \dfrac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2$, mits $x \neq 2$.

Voor $x \neq 2$ is $f(x)$ dus gelijk aan $g(x) = x^2$.
De functie $g(x) = x^2$ heeft domein $\mathbb{R}$ en de grafiek van g is een **ononderbroken kromme**. We zeggen dat de functie $g(x) = x^2$ **continu** is in $\mathbb{R}$.
Je hebt met een ononderbroken kromme te maken als je de grafiek kunt tekenen zonder je potlood van het papier te halen.

De functie f is continu in een open interval V als het bijbehorende deel van de grafiek van f een ononderbroken kromme is.

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ valt samen met de grafiek van $g(x) = x^2$, maar voor $x = 2$ heeft de grafiek van f een **perforatie**. De coördinaten van de perforatie zijn (2, 4).
Door het toevoegen van het punt (2, 4) aan de grafiek van f wordt de grafiek van f een ononderbroken kromme en is de functie f continu in $\mathbb{R}$.
We zeggen dat 4 de **continumakende waarde** van f is voor $x = 2$. Notatie: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.
Uitspraak: limiet voor x naar 2 van $f(x)$ is 4.



figuur 2.25 De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ heeft de perforatie (2, 4).

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ betekent dat $f(x)$ onbeperkt tot b kan naderen door x maar dicht genoeg bij a te kiezen.

De grafiek van de functie $h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ heeft een perforatie voor $x = 3$.

Lim is de afkorting van limiet. Het Latijnse limes betekent grens.

Bij invullen van $x = 3$ krijg je $\dfrac{9 - 12 + 3}{3 - 3} = \dfrac{0}{0}$. Dit betekent dat zowel de teller als de noemer een factor $x - 3$ bevat.

$$h(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 3} = x - 1, \text{ mits } x \neq 3.$$

We noteren dit als volgt met een limiet.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x - 1) = 2$$

De perforatie is dus (3, 2).

Als de grafiek van de functie f een perforatie heeft voor $x = a$, dan bereken je de y-coördinaat b van de perforatie met $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Het getal b is de continumakende waarde voor $x = a$.
In voorbeeld a op de volgende bladzijde gaat het om $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 3}$.
De functie $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 3}$ is continu in 2, dus $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.
Ook omgekeerd geldt: als $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, dan is f continu in 2.

Als de functie f continu is in a, dan geldt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Als voor de functie f geldt dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, dan is f continu in a.

Voorbeeld

Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 3}$

b $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Uitwerking

a $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 3} = \dfrac{4 + 2 - 6}{2 - 3} = \dfrac{0}{-1} = 0$

b $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 3) = 5$

2

R 40 Zie het voorbeeld.

a Licht toe dat de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 3}$ geen perforatie heeft voor $x = 2$.

b De grafiek van de functie $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ heeft een perforatie. Bereken hiervan de coördinaten.

41 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}$

b $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

c $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

d $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$

42 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3x^2}$

b $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - x}{3x}$

c $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + ax}{x}$

d $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h^2 + 2ah}{h}$

43 De grafieken van de volgende functies hebben een perforatie. Bereken hiervan de coördinaten.

a $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b $g(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

c $h(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$

d $j(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x - 4}$

A 44 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$.

Voor elke waarde van a heeft de grafiek van f_a een perforatie. Bereken voor welke a deze perforatie op de lijn $y = x - 1$ ligt.

O 45 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x$ en $g(x) = 4$.

a De hellinggrafiek van f is een horizontale lijn.
Geef daar een verklaring voor en geef de formule van de hellingfunctie van f.

b Geef de formule van de hellingfunctie van g.

2

Theorie B De afgeleide functie

Bij een functie f hoort een hellingfunctie. In plaats van hellingfunctie wordt meestal de naam **afgeleide functie**, kortweg **afgeleide**, gebruikt. De afgeleide van f wordt genoteerd als f'.

Spreek f' uit als f accent.

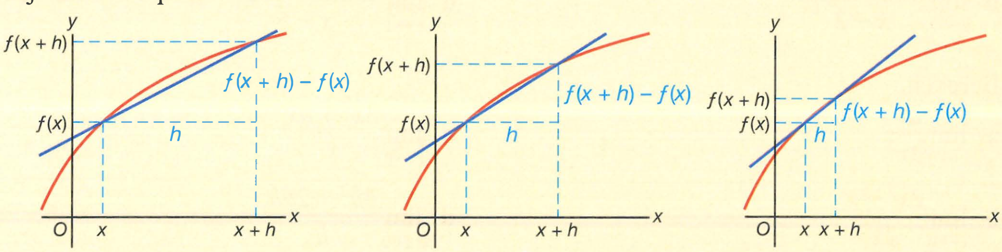
De afgeleide van een functie f geeft voor elke x
- **de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek van f in het bijbehorende punt**
- **de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt.**

Om de formule van de afgeleide van een functie f te vinden, kijken we naar het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval $[x, x + h]$,

dus naar $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Neem je op het interval $[x, x + h]$ de waarde van h heel klein,

dan geeft $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ een goede benadering van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek van f in het bijbehorende punt.



figuur 2.26 Door h steeds kleiner te nemen, krijg je een raaklijn van de grafiek van f.

De limiet van $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ voor h naar 0 is de afgeleide $f'(x)$,

ofwel $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.

Dus om de formule van de afgeleide f' te vinden, bereken je

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Definitie van de afgeleide
De afgeleide f' van een functie f is

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}.$$

De afgeleide is de limiet van het differentiequotiënt.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}6x^2$.

a Bereken $f'(3)$ met behulp van een limiet.

b Toon aan dat $f'(x) = 1{,}2x$.

Uitwerking

a $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0{,}6(3+h)^2 - 0{,}6 \cdot 3^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0{,}6(9 + 6h + h^2) - 5{,}4}{h} =$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5{,}4 + 3{,}6h + 0{,}6h^2 - 5{,}4}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3{,}6h + 0{,}6h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(3{,}6 + 0{,}6h) = 3{,}6$

b $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0{,}6(x+h)^2 - 0{,}6x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0{,}6(x^2 + 2xh + h^2) - 0{,}6x^2}{h} =$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0{,}6x^2 + 1{,}2xh + 0{,}6h^2 - 0{,}6x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1{,}2xh + 0{,}6h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(1{,}2x + 0{,}6h) = 1{,}2x$

46 Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{2}x^2$.

a Bereken $f'(4)$ met behulp van een limiet.

b Toon aan dat $f'(x) = 3x$.

A 47 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x$.

a Bereken $f'(3)$ met behulp van een limiet.

b Toon aan dat $f'(x) = 2x - 4$.

Theorie C Differentieerregels aantonen

Het berekenen van de afgeleide heet **differentiëren**.
Met de definitie van de afgeleide zijn regels voor het differentiëren aan te tonen.

Voorbeeld

Toon aan: $f(x) = ax^2$ geeft $f'(x) = 2ax$.

Uitwerking

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x^2 + 2xh + h^2) - ax^2}{h} =$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ax^2 + 2axh + ah^2 - ax^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2axh + ah^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(2ax + ah) = 2ax$

48 Toon aan.

a $f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$.

b $f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$.

49 Toon aan.

a $(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

b $f(x) = ax^3$ geeft $f'(x) = 3ax^2$

c $f(x) = ax^2 + bx + c$ geeft $f'(x) = 2ax + b$

2

50 In deze opgave ga je de regels
$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$ en
$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ aantonen.
De laatste regel staat bekend als de **somregel voor het differentiëren**.
Neem over en vul in.

a $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{c \cdot (\ldots)}{h} = c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\ldots}{\ldots} = c \cdot g'(x)$$

b $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft

$$s'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ldots}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\ldots}{h} + \frac{\ldots}{h} \right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \ldots$$

Theorie D Differentiëren

In de voorgaande opgaven heb je een aantal regels voor het differentiëren bewezen.
De regel: $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$ geldt voor $n = 2, 3, 4\ldots$
In het voorbeeld op de vorige bladzijde staat het bewijs voor $n = 2$, in opgave 49b staat het bewijs voor $n = 3$. Het bewijs voor $n = 4$ gaat als volgt. Hierbij gebruiken we het resultaat van opgave 49a.

$(x + h)^4 = (x + h)(x + h)^3 = (x + h)(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) =$
$x^4 + 3x^3h + 3x^2h^2 + xh^3 + x^3h + 3x^2h^2 + 3xh^3 + h^4 =$
$x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$

$$f(x) = x^4 \text{ geeft } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

Door op deze manier door te gaan kun je vinden dat de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ook geldt voor $n = 5, 6, 7, \ldots$

Uit $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ en
$g(x) = a \cdot f(x)$ geeft $g'(x) = a \cdot f'(x)$ volgt
$g(x) = ax^n$ geeft $g'(x) = nax^{n-1}$.
We zetten de gevonden **regels voor het differentiëren** op een rij.

$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
$f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = nax^{n-1}$ voor $n = 2, 3, 4, \ldots$
$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ **somregel**

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt zelfs voor iedere waarde van n. Het bewijs hiervan volgt later.

Om de afgeleide van $f(x) = 6x^5 + 5x^2 - 6x + 8$ te berekenen, gebruik je de somregel.
Je neemt term voor term de afgeleide.
Dus $f'(x) = 5 \cdot 6x^{5-1} + 2 \cdot 5x^{2-1} - 6 = 30x^4 + 10x - 6$.

$g(x) = 6x^5$
5 ervoor en nieuwe exponent één lager
$g'(x) = 5 \cdot 6x^4 = 30x^4$

Voorbeeld

Differentieer.
a $f(x) = -5x^7 + 2x^4 - x - 9$
b $g(x) = (3x^4 - 1)(5x^2 + 2)$
c $h(t) = 2t^3 - 4t^2 + 3t - 2$

Uitwerking
a $f(x) = -5x^7 + 2x^4 - x - 9$ geeft $f'(x) = -35x^6 + 8x^3 - 1$
b $g(x) = (3x^4 - 1)(5x^2 + 2) = 15x^6 + 6x^4 - 5x^2 - 2$ geeft $g'(x) = 90x^5 + 24x^3 - 10x$
c $h(t) = 2t^3 - 4t^2 + 3t - 2$ geeft $h'(t) = 6t^2 - 8t + 3$

51 Bereken de afgeleide.
a $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x - 7$
b $g(x) = -2x^8 - 4x^4 + 7{,}2$
c $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$
d $k(q) = 1 + 3q - 3q^2 - 5q^7$

52 Differentieer.

a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x)$
b $g(x) = (3x + 6)^2 - 8x$
c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(2x - 1)$
d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 9x) - 8(x - 7)$

2

A 53 Differentieer.

a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x)$
b $g(x) = (3x^3 - 1)^2$
c $h(x) = (5x^5 - 3)(3x - 2)$
d $k(x) = 5 - 3(x^4 - x)(x + 1)$
e $l(t) = (5t^3 - t)(3t^5 + t)$
f $m(q) = 1 - (3q^2 - 2)^2$

D 54 De afgeleide van een tweedegraadsfunctie is een lineaire functie.

a Licht dit toe.
b De lineaire functie $g(x) = 6x + 12$ is de afgeleide van een functie h. Het minimum van h is gelijk aan $^-7$.
Stel het functievoorschrift op van h.

Geschiedenis Johannes Hudde (1628-1704)

Johannes Hudde was een veelzijdig man met grote belangstelling voor wiskunde, natuurkunde, techniek en sterrenkunde. Het grootste deel van zijn leven was hij burgemeester van Amsterdam.
Bekend is Huddes methode om toppen te bepalen van grafieken van functies met gehele machten van x, zoals bijvoorbeeld $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$.
De door hem bedachte methode wordt de regel van Hudde genoemd.
Hudde gebruikte hierbij onbewust de afgeleide van dit soort functies.
Het toepassen van de regel op de functie $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ leidt tot het oplossen van de vergelijking $6x^2 - 6 = 0$, dus tot het oplossen van $f'(x) = 0$. De oplossingen $x = {^-1}$ en $x = 1$ zijn de x-coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

Terugblik

De limiet als continumakende waarde

De functie f is continu in een open interval V als het bijbehorende deel van de grafiek van f een ononderbroken kromme is.
Zo is de functie $f(x) = x + 1$ continu in $\mathbb{R}$.

De functie $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$ is echter niet continu in $\mathbb{R}$, want
$g(4) = \dfrac{4^2 - 3 \cdot 4 - 4}{4 - 4} = \dfrac{0}{0}$ is onbepaald.
De teller en de noemer van $g(x)$ bevat de factor $x - 4$.

$g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{x - 4} = x + 1$, mits $x \neq 4$.
De grafiek van g heeft een perforatie bij $x = 4$.
De coördinaten van de perforatie bereken je met een limiet.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x + 1)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 1) = 4 + 1 = 5$$

De perforatie is dus het punt $(4, 5)$.
We zeggen dat 5 de continumakende waarde van g is voor $x = 4$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ betekent dat $f(x)$ onbeperkt tot b kan naderen door x maar dicht genoeg bij a te kiezen.
Als voor een functie f geldt dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, dan is f continu in a.

Afgeleide functie

In plaats van de hellingfunctie van f zeggen we meestal de afgeleide (functie) van f. Notatie f'.

Het differentiequotiënt van de functie f op het interval $[x, x + h]$ is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Per definitie is de afgeleide f' van f gelijk aan de limiet voor h naar nul van het differentiequotiënt, dus $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Regels voor het differentiëren

Het berekenen van de afgeleide heet differentiëren.

De afgeleide van $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8$ krijg je door term voor term te differentiëren.
Je krijgt $f'(x) = 15x^2 - 14x$.

functie	afgeleide	
a	0	
ax	a	
ax^n	nax^{n-1}	
$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$	
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	somregel

Om de afgeleide van $g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x)$ te berekenen, werk je eerst de haakjes weg.
$g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x) = 5(3x^4 - 12x^2 - x^3 + 4x) = 15x^4 - 60x^2 - 5x^3 + 20x =$
$15x^4 - 5x^3 - 60x^2 + 20x$ geeft $g'(x) = 60x^3 - 15x^2 - 120x + 20$

2.4 Toepassingen van de afgeleide

O 55 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 7$ en $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a Bereken $p'(x)$, $f'(x)$ en $g'(x)$.

b Onderzoek of $p'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$.

c Laat zien dat $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Theorie A De productregel

Het product van de functies f en g is de functie $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Om de functie p te differentiëren, gebruik je de **productregel voor het differentiëren**:

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ geeft } p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

afgeleide eerste maal tweede
plus
eerste maal afgeleide tweede

Informatief Het bewijs van de productregel

Bij het bewijs van de productregel gebruik je $p'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{p(x+h) - p(x)}{h}$.

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ geeft } p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) \overbrace{- f(x) \cdot g(x+h)}^{\text{eraf}} \overbrace{+ f(x) \cdot g(x+h)}^{\text{erbij}} - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

In het volgende voorbeeld wordt de afgeleide van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x + 3)$ met de productregel berekend.
Bij deze functie kun je f' ook berekenen door eerst bij $f(x)$ de haakjes weg te werken. Later kom je echter functies tegen waarbij zo'n herleiding niet mogelijk is. Het gebruik van de productregel is dan noodzakelijk.
In het voorbeeld komt de notatie $[x^2 - 4]'$ voor.
Hiermee wordt de afgeleide van $x^2 - 4$ bedoeld.
Dus $[x^2 - 4]' = 2x$.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x + 3)$. Gebruik de productregel.

Uitwerking

$f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x + 3)$ geeft

$f'(x) = [x^2 - 4]' \cdot (x^3 + 2x + 3) + (x^2 - 4) \cdot [x^3 + 2x + 3]'$

$\quad = 2x(x^3 + 2x + 3) + (x^2 - 4)(3x^2 + 2)$

$g(x) = x^3 + 2x + 3$ geeft
$g'(x) = 3x^2 + 2$
wordt ook genoteerd als
$[x^3 + 2x + 3]' = 3x^2 + 2$.

56 Bereken met de productregel de afgeleide van de volgende functies. Laat in het antwoord de haakjes staan.

a $f(x) = (2 - 3x^2)(2 + 7x)$

b $g(x) = (2x - 5)^2$

c $h(x) = (x^2 - 3x)(x^3 + x^2 + x)$

d $j(x) = (3x^2 - 4)^2$

57 Je weet $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$. Hieruit volgt $[\sqrt{x}]' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$.
Licht dit toe en bereken de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$.

R 58 **a** De functie $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ is te schrijven als $p(x) = j(x) \cdot h(x)$ waarbij $j(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Toon door herhaald gebruik van de productregel aan dat $p = fgh$ geeft $p' = f'gh + fg'h + fgh'$.

b De functie p is het product van de functies f, g, h en j, dus $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot j(x)$.
Geef de formule van p'.

De productregel in het kort is
$[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

59 Gegeven is de functie $q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$.
Kruiselings vermenigvuldigen geeft $q(x) \cdot n(x) = t(x)$.

a Differentieer beide leden, gebruik voor het linkerlid de productregel.

b Toon aan dat uit a volgt $q'(x) = \dfrac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$.

c Gebruik $q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ om $q'(x)$ te herleiden tot

$$q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}.$$

Theorie B De quotiëntregel

Het quotiënt van de functies $t(x) = 2x^2 + 1$ en $n(x) = 3x + 5$ is

de functie $q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)} = \dfrac{2x^2 + 1}{3x + 5}$.

Om de afgeleide van q te berekenen gebruik je de **quotiëntregel**.
Deze regel heb je in opgave 59 bewezen.

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Om de quotiëntregel makkelijk te kunnen onthouden, kun je hem als volgt schrijven.

$$\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{n \cdot at - t \cdot an}{n^2} = \frac{\text{nat min tan}}{n^2}.$$

$n \cdot at$ betekent **n**oemer maal **a**fgeleide **t**eller.
$t \cdot an$ betekent **t**eller maal **a**fgeleide **n**oemer.

Dus $q(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{3x + 5}$ geeft

De quotiëntregel in het kort is $\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}$.

$$q'(x) = \frac{\overbrace{(3x + 5)}^{n} \cdot \overbrace{[2x^2 + 1]'}^{t'} - \overbrace{(2x^2 + 1)}^{t} \cdot \overbrace{[3x + 5]'}^{n'}}{\underbrace{(3x + 5)^2}_{n^2}}$$

$$= \frac{(3x + 5) \cdot 4x - (2x^2 + 1) \cdot 3}{(3x + 5)^2}$$

Werk alleen in de teller de haakjes weg.

$$= \frac{12x^2 + 20x - 6x^2 - 3}{(3x + 5)^2} = \frac{6x^2 + 20x - 3}{(3x + 5)^2}$$

Voorbeeld

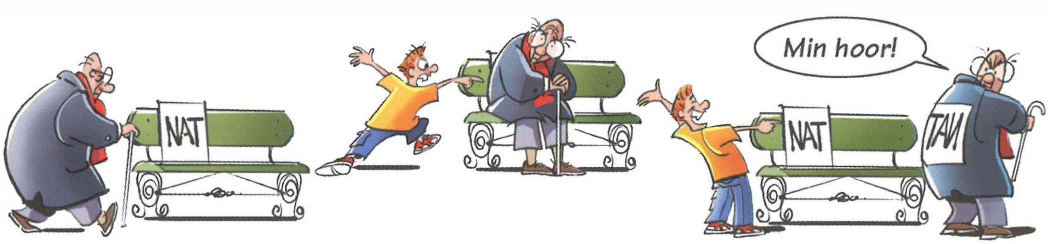
Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{3}{2x^2 + 1}$ **b** $g(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 1}$

Uitwerking

a $f(x) = \dfrac{3}{2x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(2x^2 + 1) \cdot 0 - 3 \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \dfrac{-12x}{(2x^2 + 1)^2}$

b $g(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 1}$ geeft $g'(x) = \dfrac{(3x - 1) \cdot 2 - (2x + 1) \cdot 3}{(3x - 1)^2} = \dfrac{6x - 2 - 6x - 3}{(3x - 1)^2} = \dfrac{-5}{(3x - 1)^2}$



60 Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{x-2}{x+5}$ c $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2+1}$ e $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x-2} + x^3$

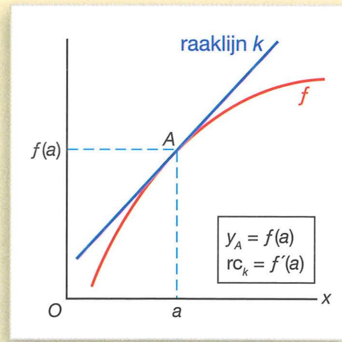
b $f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ d $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x^2}$ f $f(x) = x - \dfrac{2}{x+4}$

O 61 Op de grafiek van $f(x) = x^2 - 3x - 1$ ligt het punt A met $x_A = 4$.

a Bereken $f'(x)$, $f'(4)$ en $f(4)$.
b Floris wil y_A weten. Is dat $f'(4)$ of $f(4)$?
c Bastiaan wil de helling in A weten. Is dat $f'(4)$ of $f(4)$?

Theorie C Raaklijn en afgeleide

Voor het opstellen van de formule van een raaklijn heb je de optie $\dfrac{dy}{dx}$ gebruikt om de richtingscoëfficiënt te berekenen.



Je kunt nu de richtingscoëfficiënt berekenen met behulp van de afgeleide.
Je gebruikt dan dat $f'(a)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het punt $(a, f(a))$ is.

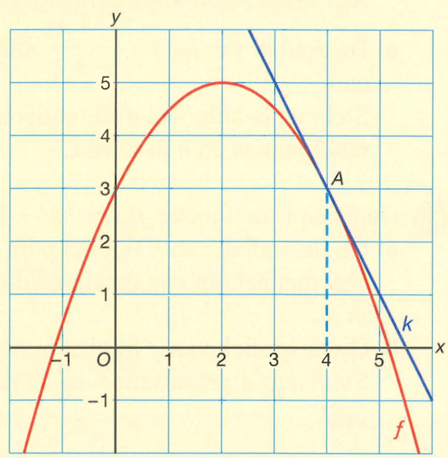
Op de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ ligt het punt A met $x_A = 4$. Zie figuur 2.27.

Je krijgt y_A door $f(4)$ te berekenen.
$f(4) = 3$, dus $A(4, 3)$.

Met $f'(4)$ krijg je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in A.
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ geeft $f'(x) = -x + 2$,
dus $f'(4) = -4 + 2 = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = -2x + b \\ \text{door } A(4, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 3 \\ -8 + b = 3 \\ b = 11 \end{array}$$

Dus $k\colon y = -2x + 11$.



figuur 2.27 De lijn k raakt de grafiek van f in A. Er geldt $y_A = f(4)$ en $rc_k = f'(4)$.

Je hebt op deze manier *met behulp van de afgeleide* de formule van de raaklijn opgesteld. We zeggen ook dat je de formule van de raaklijn *algebraïsch* hebt opgesteld of *langs algebraïsche weg* of *met behulp van differentiëren*.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x + 3$.
Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = -2$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in P.

Uitwerking
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x + 3$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4$
Stel k: $y = ax + b$.
$a = f'(-2) = 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 4 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ f(-2) = 7, \text{ dus } P(-2, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -2 + b = 7 \\ -4 + b = 7 \\ b = 11 \end{array}$$

Dus k: $y = 2x + 11$.

T 62 [▶▶66]

a De grafiek van $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 6x + 5$ snijdt de y-as in het punt A.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in A.

b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{3}x^2(x^2 - 9) + 4$.
Op de grafiek van g ligt het punt B met $x_B = 2$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn l in B.

c De grafiek van $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 + 1}$ snijdt de x-as in de punten O en C.
Stel met behulp van differentiëren de formules op van de raaklijnen m en n in O en C.

63 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$.

a Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 4$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in A.

b Op de grafiek van f ligt het punt B met $x_B = -2$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn m in B.

64 Gegeven is de functie $g(x) = 2x^2 - 6x$.

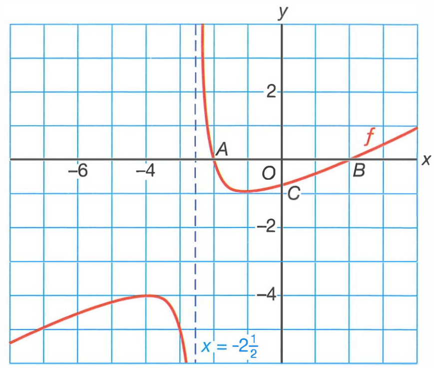
a Het punt A met $x_A = -3$ ligt op de grafiek van g.
Stel met behulp van differentiëren de formule op van de raaklijn l in A.

b De grafiek van g snijdt de x-as behalve in de oorsprong ook nog in het punt P.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn n in P.

65 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}$.

a De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $A(-2, 0)$ en $B(2, 0)$.
Stel langs algebraïsche weg de formules op van de raaklijnen k en l in A en B.

b De grafiek van f snijdt de y-as in het punt C.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn m in C.



figuur 2.28

Geschiedenis Differentiaalrekening

In de differentiaalrekening, waarmee je in dit hoofdstuk kennis maakt, bestudeert men veranderingen van functies. Daarbij spelen begrippen als snelheid, helling van een grafiek en raaklijn van een grafiek een grote rol.
Het heeft lang geduurd voor men het begrip snelheid wist te doorgronden. De beroemde geleerden Isaac Newton (1642-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hebben onafhankelijk van elkaar de differentiaalrekening ontwikkeld.
Newton geldt als de grootste en invloedrijkste wetenschapper aller tijden. In zijn belangrijkste werk, de 'Principia Mathematica' uit 1687, zet hij de wiskundige beginselen van de natuurwetenschappen uiteen. Hij verklaart in dit boek hoe het zonnestelsel in elkaar zit en legt er de wetten van de zwaartekracht en de bewegingsleer (mechanica) in vast.

Newton

Newton werd geboren op 25 december 1642 in Lincolnshire in Engeland. Zijn vader stierf al voor zijn geboorte. Zijn moeder liet hem over aan de zorgen van zijn grootmoeder. Al vroeg werd duidelijk dat hij voor het werk thuis op de boerderij ongeschikt was. Hij had er geen belangstelling voor en verdiepte zich geheel in lezen en knutselen.
Newton schreef in 1671 een verhandeling over raaklijnen, maar deze werd pas negen jaar na zijn dood gepubliceerd.
Leibniz wordt gezien als een van de meest invloedrijke figuren in de westerse cultuurtraditie. Behalve aan wiskunde leverde hij ook belangrijke bijdragen aan filosofie, fysica, geologie, rechten, geschiedenis en geneeskunde. Hij was actief als politicus en raadsheer aan het hof van Hannover bij hertog Johann Friedrich. Hij ontwierp nieuwe soorten rijtuigen en drainagesystemen voor de mijnen in de Harz. Ook bedacht hij een manier om fosfor te produceren en was hij de uitvinder van de eerste rekenmachine die in staat was op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen. In 1684 publiceerde hij het eerste artikel over de differentiaalrekening. Veel van de huidige notaties in de wiskunde zijn van hem afkomstig.

Leibniz

De vraag wie de ontdekker is van de differentiaalrekening heeft heel wat twistgesprekken opgeleverd. Terwijl de Engelsen Newton als de ontdekker beschouwden, ging men er in Duitsland vanuit dat dit Leibniz was. Deze vete heeft zelfs bijna een oorlog veroorzaakt tussen Engeland en Duitsland.

A 66 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 4}$.
De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A en de x-as in het punt B.
Onderzoek langs algebraïsche weg of de volgende bewering waar is.
De raaklijn k in A snijdt de grafiek in B.

A 67 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.

a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -3$.
Stel met behulp van differentiëren de formule van k op.

b De grafiek van f snijdt de y-as in het punt B.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn l in B.

c De grafiek van f snijdt de x-as in drie punten. Het snijpunt met de positieve x-coördinaat is C.
Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn m in C.

D 68 Voor elke $a \neq 0$ is gegeven de functie $f(x) = x^3 + ax^2 + a^2x$ en het punt A met $x_A = a$ op de grafiek van f.
De lijn k raakt de grafiek van f in A.
Stel de formule op van k.

O 69 Gegeven zijn de functie $f(x) = x^2 - 2x - 5$ en de lijnen $y = 4x - 6$, $y = 4x - 10$, $y = 4x - 14$ en $y = 4x - 18$.

a Plot de grafiek van f en de vier lijnen.

Een van de gegeven lijnen raakt de grafiek van f in het punt R.

b Welke lijn is dit?

c Wat weet je van $f'(x_R)$?

Theorie D Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt

In figuur 2.29 zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
Verder is een aantal evenwijdige lijnen met richtingscoëfficiënt 2 getekend. Eén van deze lijnen raakt de grafiek van f in het punt A.
Om de coördinaten van A te berekenen, gebruik je dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A gelijk is aan 2, dus $f'(x) = 2$.
Om x_A te berekenen, los je dus de vergelijking $f'(x) = 2$ op. Algebraïsch gaat dat als volgt.

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ geeft $f'(x) = 2x - 3$

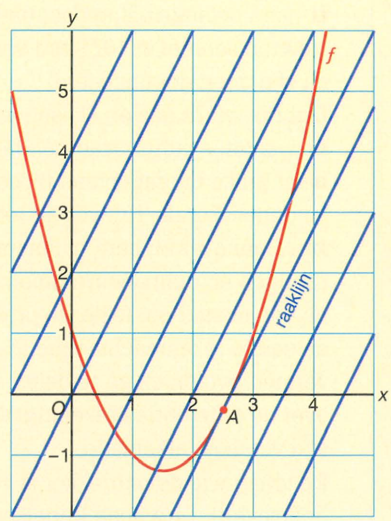
$f'(x) = 2$ geeft $2x - 3 = 2$

$$2x = 5$$

$$x = 2\tfrac{1}{2}$$

Dus $x_A = 2\frac{1}{2}$ en $y_A = f(2\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

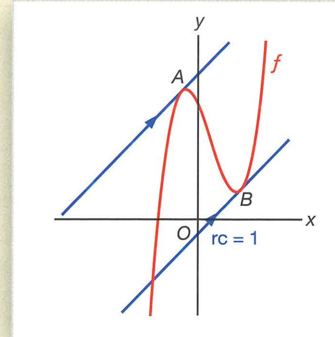
Dus $A(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.



figuur 2.29

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 8$.
In de punten A en B van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 1.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.



Uitwerking

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 8$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x - 2$

$f'(x) = 1$ geeft $x^2 - 2x - 2 = 1$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \vee x = 3$

$x_A = -1$ en $y_A = f(-1) = 8\frac{2}{3}$, dus $A(-1, 8\frac{2}{3})$.

$x_B = 3$ en $y_B = f(3) = 2$, dus $B(3, 2)$.

70 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a In het punt A van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 4.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A.

b Op de grafiek van f ligt het punt B waarin de raaklijn k evenwijdig is met de lijn l: $y = -6x + 8$.
Waarom is $f'(x_B) = -6$? Bereken met behulp van de afgeleide de coördinaten van B.

71 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x + 6$.

a In de punten A en B van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 2.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.

b In de punten C en D van de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met de lijn k: $y = 10x + 2$.
Bereken algebraïsch de x-coördinaten van C en D.

A 72 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$.

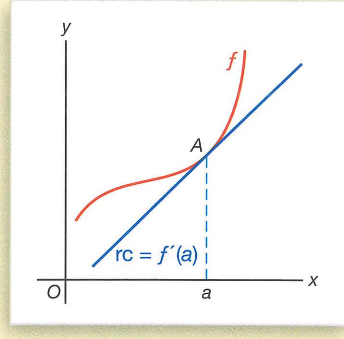
a Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = 4$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in P.

b Zowel in het punt Q als in het punt R op de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met de lijn l: $y = 3x + 6$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van Q en R.

D 73 Voor welke waarden van p heeft de grafiek van $f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x - 3$ twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -1?

Theorie E Snelheid en afgeleide

Je hebt geleerd dat de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = a$ gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. En deze richtingscoëfficiënt, dus de snelheid, is $f'(a)$.
Je berekent de snelheid dus met de afgeleide.



$f'(a)$ is de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = a$.

We gaan dit toepassen op een tijd-afstandformule.
Is de afgelegde weg s in meter na t seconden gegeven door de formule $s = 2t^2 + 4t$, dan is de formule van de snelheid $s' = 4t + 4$.
Het is gebruikelijk de snelheid aan te geven met v.
Dus bij $s = 2t^2 + 4t$ is $v = 4t + 4$.
Op $t = 5$ is de snelheid gelijk aan $v = 4 \cdot 5 + 4 = 24$ m/s.

74 Frits krijgt bij het voetballen de bal verkeerd op zijn schoen en schiet hem verticaal omhoog. De hoogte h in meter na t seconden is te berekenen met de formule $h = -5t^2 + 25t$.

a Bereken met behulp van de formule van de snelheid met welke snelheid Frits de bal omhoog schiet.
b Bereken de snelheid van de bal na drie seconden.
c Wat weet je van de snelheid van de bal als deze het hoogste punt heeft bereikt? Na hoeveel seconden is dat het geval?
d Na hoeveel seconden is de bal weer op de grond? Met welke snelheid komt de bal op de grond terug?

A 75 Een auto trekt op. Gedurende de eerste zes seconden is de afgelegde weg s in meter te berekenen met de formule $s = 0{,}8t^2$. Hierbij is t de tijd in seconden. Na zes seconden verandert de snelheid niet meer.

a Bereken algebraïsch de snelheid na drie seconden en na zes seconden.
b Bereken in twee decimalen nauwkeurig na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 30 km/uur.
c Hoeveel meter legt de auto in de eerste tien seconden af?

Terugblik

De productregel en de quotiëntregel

Voor het differentiëren van het product van twee functies gebruik je de productregel:
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
Bij $f(x) = (x^2 + x)(2x^2 - x)$ krijg je
$$f'(x) = [x^2 + x]' \cdot (2x^2 - x) + (x^2 + x) \cdot [2x^2 - x]'$$
$$= (2x + 1)(2x^2 - x) + (x^2 + x)(4x - 1).$$

$$[fg]' = f'g + fg'$$

Voor het differentiëren van het quotiënt van twee functies gebruik je de quotiëntregel:

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}.$$

$$\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}$$

Bij $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{2x^2 - 1}$ krijg je

$$f'(x) = \frac{(2x^2 - 1) \cdot [x^2 + x]' - (x^2 + x) \cdot [2x^2 - 1]'}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{(2x^2 - 1) \cdot (2x + 1) - (x^2 + x) \cdot 4x}{(2x^2 - 1)^2}$$
$$= \frac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1 - 4x^3 - 4x^2}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 1}{(2x^2 - 1)^2}.$$

Raaklijn en afgeleide

Bij het opstellen van de formule van de raaklijn k met behulp van de afgeleide gebruik je dat voor een punt A op de grafiek van f geldt:
$f'(x_A)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in het punt A.

Bij $f(x) = -x^2 + 5x + 2$ en $x_A = 4$ krijg je $f'(x) = -2x + 5$, dus $rc_k = f'(4) = -2 \cdot 4 + 5 = -3$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ f(4) = 6, \text{ dus } A(4, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 4 + b = 6 \\ -12 + b = 6 \\ b = 18 \end{array}$$

Dus k: $y = -3x + 18$.

Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt

De coördinaten van het punt B op de grafiek van $f(x) = -x^2 + 5x + 2$ waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan -5 bereken je als volgt.
De richtingscoëfficiënt is -5, dus $f'(x) = -5$ en dit geeft $-2x + 5 = -5$.
Hieruit volgt $x = 5$, dus $B(5, 2)$.

Snelheid en afgeleide

$f'(a)$ is de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = a$.
Is de afgelegde weg s in meter na t seconden gegeven door $s = 1{,}2t^2 + 0{,}8t$, dan is de formule van de snelheid $v = s' = 2{,}4t + 0{,}8$.
Na drie seconden is de afgelegde afstand $s = 1{,}2 \cdot 3^2 + 0{,}8 \cdot 3 = 13{,}2$ m en de snelheid $v = 2{,}4 \cdot 3 + 0{,}8 = 8$ m/s.
Verandert de snelheid na $t = 3$ niet meer, dan is de afgelegde afstand op $t = 10$ gelijk aan $13{,}2 + 7 \cdot 8 = 69{,}2$ m.

2.5 Hellingen en raaklijnen met GeoGebra

2

In deze paragraaf ga je met behulp van het computerprogramma GeoGebra raaklijnen tekenen en hellinggrafieken schetsen.

O 76 Om met GeoGebra de grafiek van de functie $f(x) = 2x^2 - 3x$ te tekenen voer je f(x)=2x^2-3x in bij de invoerregel. Je kunt een punt op de grafiek van f tekenen door de optie Nieuw punt te selecteren, met de muis een punt op de grafiek aan te wijzen en te klikken met de linkermuisknop. Het punt krijgt een naam en de coördinaten hiervan zijn af te lezen in het algebravenster links op het scherm.
Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 3x$.

a Teken met GeoGebra de grafiek van f.
b Kies twee punten op de grafiek van f. GeoGebra noemt ze A en B.
c Teken de lijn door de punten A en B met de optie Rechte door twee punten. GeoGebra noemt de lijn a. Klik rechts op de lijn en kies Naam wijzigen. Noem de lijn k.
Je ziet dat de vergelijking van k in de vorm $ax + by = c$ in het algebravenster staat. Klik rechts op de lijn en kies Vergelijking $y = ax + b$.
d Verplaats de punten A en B met Verplaatsen. Je ziet dat de formule van de lijn k mee verandert.

Theorie A Grafieken tekenen met GeoGebra

In de invoerregel van GeoGebra kun je bijvoorbeeld formules van functies en lijnen invoeren. Wat je invoert wordt getekend en in het algebravenster getoond. Door in het grafiekenscherm op een grafiek of in het algebravenster op een formule met de rechtermuisknop te klikken krijg je de mogelijkheid om eigenschappen te wijzigen. Bijvoorbeeld een andere kleur, andere naam, lijndikte, enzovoort.

In deze paragraaf wordt met de opdracht Teken de grafiek bedoeld dat de grafiek moet worden getekend met GeoGebra. Bij een aantal opdrachten is het nodig dat je ver gaat inzoomen op de grafiek. Je kunt dat handig met het wieltje van je muis doen. Wijs dan wel altijd het punt aan waarop je in- of uit wilt zoomen. Zorg ervoor dat het algebravenster, de assen en het rooster aan staan. Je doet dit via de menu's of door rechts op het tekenvenster te klikken.

Zorg er verder voor dat een formule van een lijn steeds in de vorm $y = ax + b$ staat.

77 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x - 2$ en de lijn k: $y = -2x - 3$.

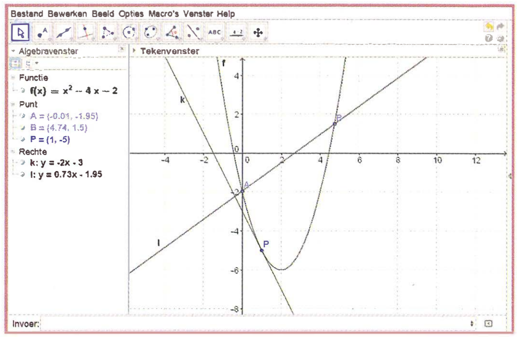
a Teken de grafiek van f en de lijn k.

De lijn k heeft een punt gemeenschappelijk met de grafiek van f. We noemen dit punt P.

b Geef de coördinaten van P.

c Teken met Nieuw punt de punten A en B op de grafiek van f en teken de lijn l door de punten A en B.

d Versleep A naar $(0, -2)$ en B naar $(5, 3)$. Hoe kun je in het algebravenster het differentiequotiënt van f op $[0, 5]$ aflezen?



figuur 2.30

e Houd A in $(0, -2)$ en versleep B zo, dat l evenwijdig is met k. Geef de formule van l en de coördinaten van B.

f Versleep A en B zo, dat l in het algebravenster dezelfde formule heeft als k. Gebruik de zoomfunctie. Merk op dat GeoGebra een foutmelding geeft als A en B samenvallen.

g Versleep A en B zo dicht mogelijk naar het punt $(4, -2)$ en geef de formule van l.

78 De helling in het punt P van een parabool kun je benaderen door de punten A en B dichtbij P te tekenen en de richtingscoëfficiënt van de lijn l door A en B te bepalen. In het algebravenster van GeoGebra kun je deze richtingscoëfficiënt aflezen.
Gegeven is de functie $f(x) = 6x - x^2$.

a Teken de grafiek van f en ga op de hierboven beschreven manier na dat de helling van de grafiek in het punt $(1, 5)$ gelijk is aan 4.
Wat is de formule van de lijn l door de punten A en B?

b Geef op dezelfde manier als bij vraag a de helling van de grafiek van f in de punten $(0, 0)$, $(2, 8)$, $(3, 9)$, $(4, 8)$ en $(5, 5)$.

c Bij de hellingen van de vragen a en b is een regelmaat te ontdekken.
Gebruik deze regelmaat om de hellingen in de punten $(6, 0)$ en $(7, -7)$ te geven.

Theorie B Raaklijnen

Bij de opgaven 77 en 78 heb je zo goed mogelijk lijnen getekend die precies één punt met een parabool gemeen hebben. Dit lukt niet precies omdat A en B verschillend moeten zijn. Maar door in te zoomen krijg je wel een goede benadering.
De lijn k in opgave 77 had wel precies één punt gemeenschappelijk met de parabool.
Zo'n lijn heet een *raaklijn* van de parabool. Het gemeenschappelijke punt heet het **raakpunt**. In het raakpunt hebben de raaklijn en de parabool dezelfde helling.

De helling van de grafiek van f in het punt P is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek van f in P.

GeoGebra heeft een optie waarmee direct de raaklijn getekend wordt. Om de raaklijn van de grafiek van f in het punt A te tekenen tik je in de invoerregel in: Raaklijn[A,f].
Versleep je vervolgens het punt A over de grafiek dan schuift de raaklijn mee.

De optie Raaklijn[A,f] geeft de raaklijn van de grafiek van f in het punt A van de grafiek.

79 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

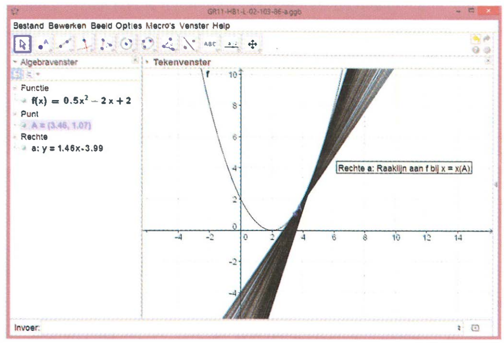
a Teken de grafiek van f en een punt A op de grafiek.

b Teken de raaklijn van de grafiek in A en ga na dat de raaklijn mee schuift als je A versleept over de grafiek.

c Geef de formule van de raaklijn in het punt $A(4, 2)$.

d In welk punt van de grafiek heeft de raaklijn richtingscoëfficiënt 3?

e Klik rechts op de raaklijn, zet voor de raaklijn het Spoor aan en versleep A over de parabool.
Waar liggen de punten waar geen enkele raaklijn doorheen gaat?



figuur 2.31

80 Gegeven is de functie $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2$.

a Teken de grafiek van f, een punt A op de grafiek en de raaklijn k in A.

b Met de opdracht Helling[k] berekent GeoGebra de helling van de raaklijn k en noemt dit getal a. Geef deze opdracht en ga in het algebravenster na dat de helling van k inderdaad voortdurend gelijk is aan a.

c Geef in de invoerregel de opdracht: P = (x(A),a).
GeoGebra tekent een punt P waarvan de x-coördinaat gelijk is aan de x-coördinaat van A en waarvan de y-coördinaat gelijk is aan de helling van de raaklijn. Versleep A en merk op dat P over een rechte lijn lijkt te bewegen. Geef de formule van deze lijn.

d We gaan de formule van vraag c controleren. Teken de lijn die bij de formule van vraag c hoort en zet voor P het Spoor aan. Versleep A. Klopt het antwoord van vraag c?

De lijn waar P over beweegt heet de *hellingrafiek* van f.

81 **a** Teken de hellinggrafiek van $f(x) = x^2 - 2x + 4$ en geef de formule van de hellinggrafiek van f.
b Teken de hellinggrafiek van $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$ en geef de formule van de hellinggrafiek van f.
c Teken de hellinggrafiek van $f(x) = 2x^2 - x^4$. Hoeveel toppen heeft de hellinggrafiek?

2

82 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x$.
a Teken de grafiek van f, het punt A op de grafiek en de raaklijn k in A.
b In welke punten van de grafiek is de helling gelijk aan 9?
c Welk punt van de grafiek heeft de kleinste helling?
d Hoeveel raaklijnen van de grafiek gaan door het punt (5, 0)?
e Hoeveel raaklijnen van de grafiek gaan door het punt (1, 0)?

Theorie C De formule van de hellinggrafiek

GeoGebra heeft een optie waarmee je direct het functievoorschrift van de hellinggrafiek van een functie f kunt krijgen. Je voert dan f '(x) in bij Invoer. GeoGebra tekent de hellinggrafiek van f en geeft hiervan het functievoorschrift.

> Met de opdracht f '(x) tekent GeoGebra de hellinggrafiek van f en geeft hiervan het functievoorschrift.

In opgave 83 wordt het functievoorschrift van de hellinggrafiek gevraagd. Geef het antwoord in de vorm $f'(x) = \ldots$, $g'(x) = \ldots$ of $h'(x) = \ldots$

83 Geef het functievoorschrift van de hellinggrafiek.
a $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$
b $g(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2 + 2$
c $h(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2 + 6$

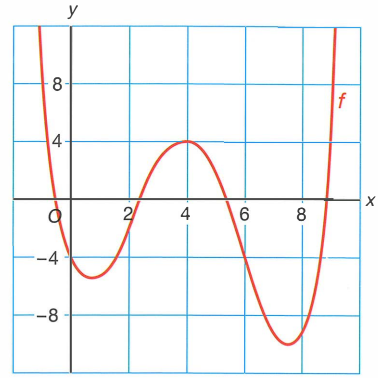
R 84 Vergelijk de antwoorden van vraag 83b en 83c. Wat valt je op? Licht toe dat dit geen toeval is.

Diagnostische toets

2.1 Snelheden

1 Zie figuur 2.32.

a Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.
b Bereken de gemiddelde toename van y op [1, 4].
c Bereken het differentiequotiënt van y op [2, 6].
d Hoeveel waarden van p zijn er waarvoor het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk is aan 1? Licht toe.



figuur 2.32

2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x$.

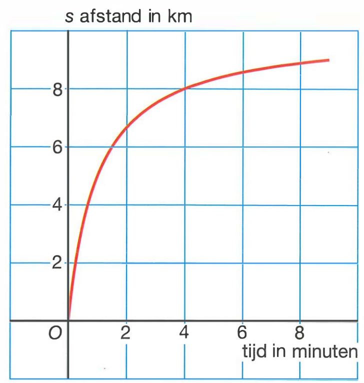
a Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$ op [1, 4].
b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op [−1, 1].
c Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -2$ en $x_B = 3$. Stel de formule op van de lijn l door A en B.

3 Gegeven is de tijd-afstandgrafiek in figuur 2.33.

a Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur op [1, 9].
b Er is een interval $[1, p]$ waarop de gemiddelde snelheid gelijk is aan die op het interval [0, 9]. Voor welke p is dat het geval?

Bij de grafiek hoort de formule $s = 10 - \dfrac{10}{t+1}$.

c Benader in km/uur de snelheid op $t = 1$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op gehelen.



figuur 2.33

2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

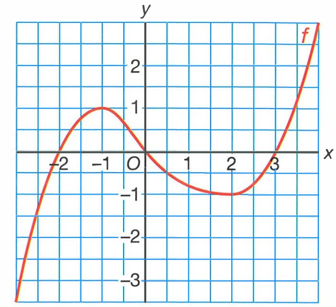
4 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x-3}$.

a Bereken de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
b Bereken de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = 3\frac{1}{2}$.
c Op de grafiek van f ligt het punt B met $x_B = 6$. Stel de formule op van de raaklijn k in B.

5 Een auto rijdt weg. Gedurende de eerste zes seconden wordt de afgelegde weg s in meter gegeven door de formule $s = -\frac{1}{4}t^3 + 3t^2$. Hierin is t in seconden. Na zes seconden verandert de snelheid niet meer.

a Bereken de snelheid op $t = 2$.
b Hoeveel meter heeft de auto na tien seconden afgelegd?

6 [▶ WERKBLAD] Zie de grafiek van f in figuur 2.34.
a Schets de hellinggrafiek van f.
b De grafiek is de hellinggrafiek van een functie g. Teken een globale grafiek van g.



figuur 2.34

7 Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}2x^3 + x^2 - 2$.
a Teken de hellinggrafiek van f.
b De grafiek van f is de hellinggrafiek van een functie g. Teken een globale grafiek van g.

2.3 Limiet en afgeleide

8 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 2}$ **b** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$ **c** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

9 De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 6x + 5}$ heeft een perforatie.
Bereken hiervan de coördinaten.

10 Gegeven is de functie $f(x) = 5x^2 + 4$.
a Bereken $f'(3)$ met behulp van een limiet.
b Toon met behulp van de definitie van de afgeleide aan dat $f'(x) = 10x$.

11 Differentieer.
a $f(x) = 0{,}6x^3 - 1{,}3x^2 + 7$ **b** $g(p) = 4p^3 + p^2 - 11p + 20$

12 Bereken de afgeleide.
a $f(x) = (3 - x)(5 + 2x)$
b $g(x) = (3x + 1)^2$
c $h(x) = x(2x - 1)^2$
d $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2(x - 4) + 6$

2.4 Toepassingen van de afgeleide

13 Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x - 1}$ **b** $g(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$ **c** $h(x) = x^2 - \dfrac{3}{x + 1}$

14 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
a Stel langs algebraïsche weg de formule op van k.
b Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn l in het snijpunt van de grafiek van f met de y-as.

15 Op de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 2$ liggen de punten A en B waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn k: $y = 2x - 5$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.

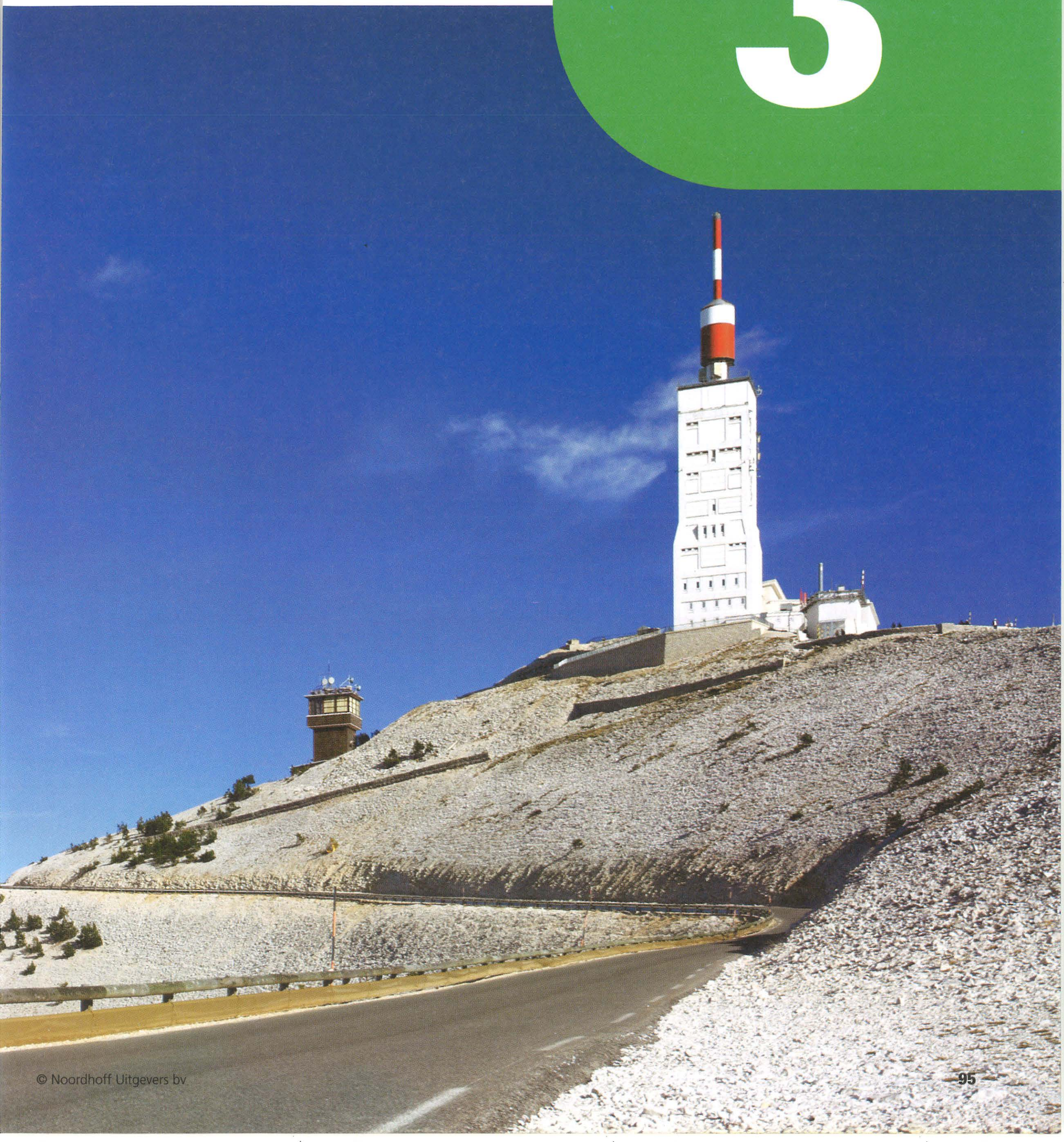
Bij het fietsen in de bergen heb je met grote snelheidsverschillen te maken. Fiets je tegen een berg op met een gemiddelde snelheid van 10 km/uur en daal je daarna langs dezelfde weg weer de berg af met een gemiddelde snelheid van 50 km/uur, dan is je totale gemiddelde snelheid een stuk lager dan de 30 km/uur die je wellicht zou verwachten.

Wat leer je?

- Algebraïsch oplossen van hogeregraadsvergelijkingen.
- Oplossen van stelsels vergelijkingen.
- Regels voor het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen en gebroken vergelijkingen.
- Herleiden van gebroken vormen.
- Het vrijmaken van variabelen bij gebroken formules.

Vergelijkingen en herleidingen

3



Voorkennis Stelsels lineaire vergelijkingen en kwadratische ongelijkheden

3

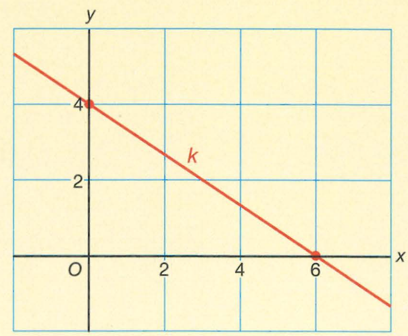
Theorie A Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.

Om de lijn k: $2x + 3y = 12$ te tekenen maak je een tabel met twee punten, bijvoorbeeld

x	0	6
y	4	0

De getallenparen $(x, y) = (0, 4)$ en $(x, y) = (6, 0)$ voldoen aan de vergelijking $2x + 3y = 12$.
Je kunt bij de vergelijking $2x + 3y = 12$ de variabele y vrijmaken.
$2x + 3y = 12$
$3y = -2x + 12$
$y = -\frac{2}{3}x + 4$
Hieruit lees je af: de lijn k heeft $rc_k = -\frac{2}{3}$ en snijdt de y-as in het punt $(0, 4)$.
Met $y = -\frac{2}{3}x + 4$ is y uitgedrukt in x.
We zeggen ook: y is als functie van x geschreven.



figuur 3.1 De lijn k: $2x + 3y = 12$

1 Gegeven zijn de lijnen l: $3x - y = 6$, m: $x + y = 1$, n: $x - y = 0$ en p: $x + 2y = 4$.
a Teken deze lijnen in één figuur.
b Geef van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt.

2 Gegeven is de lijn l: $4x - 3y = 24$.
a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x-as en met de y-as.
b Onderzoek welke van de punten $A(8, 3)$, $B(18, 16)$ en $C(-30, -48)$ op l liggen.
c Het getallenpaar $(x, y) = (16, p)$ voldoet aan de vergelijking $4x - 3y = 24$.
Bereken p.
d Voor welke q is $(x, y) = (q, 48)$ een oplossing van de vergelijking $4x - 3y = 24$?

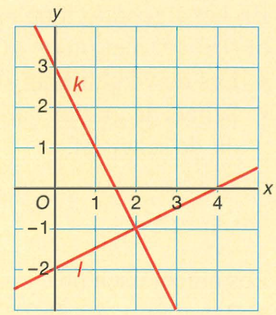
Theorie B Stelsels vergelijkingen

In figuur 3.2 zijn de lijnen k: $2x + y = 3$ en l: $x - 2y = 4$ getekend.
Het punt (2, -1) is het snijpunt van deze lijnen.
Het getallenpaar $(x, y) = (2, -1)$ is zowel oplossing van $2x + y = 3$ als van $x - 2y = 4$.
We zeggen dat $(x, y) = (2, -1)$ oplossing is van het

stelsel $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

Het oplossen van een stelsel gaat in vier stappen.

1 Maak bij een van de twee vergelijkingen x of y vrij.
2 Substitueer de vrijgemaakte variabele in de andere vergelijking en los de verkregen vergelijking op.
Je hebt nu een van de variabelen berekend.
3 Gebruik het antwoord van stap 2 om de andere variabele te berekenen.
4 Schrijf de oplossing van het stelsel op.



figuur 3.2

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ op.

Uitwerking
Uit $2x + y = 3$ volgt $y = -2x + 3$.
$y = -2x + 3$ en $x - 2y = 4$ geeft $x - 2(-2x + 3) = 4$

$$x + 4x - 6 = 4$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

$x = 2$ en $y = -2x + 3$ geeft $y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$.
De oplossing is $(x, y) = (2, -1)$.

Substitueren betekent vervangen door.

Je vervangt y door $-2x + 3$.

3 Los op.

a $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x - 4y = 11 \end{cases}$

b $\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

c $\begin{cases} x - 6y = 1 \\ 5x + 4y = 56 \end{cases}$

4 Gegeven zijn de lijnen k: $2x - 3y = 12$ en l: $x + 5y = 5$.
a Teken k en l in één figuur.
b Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en l.

Theorie C Kwadratische ongelijkheden algebraïsch oplossen

Bij het algebraïsch oplossen van ongelijkheden van de vorm $f(x) < 0$ of $f(x) > 0$ met $f(x) = ax^2 + bx + c$ ga je als volgt te werk.

- Los de vergelijking $f(x) = 0$ algebraïsch op.
- Schets de grafiek van f en lees de oplossing van de ongelijkheid uit de schets af.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $2x^2 - 9x + 4 < 0$

b $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

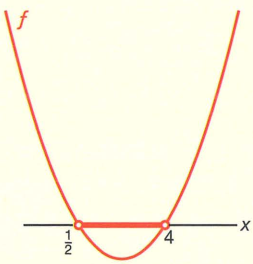
Uitwerking

a $\underbrace{2x^2 - 9x + 4}_{f(x)} < 0$

$f(x) = 0$ geeft $2x^2 - 9x + 4 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 49$

$x = \dfrac{9-7}{4} = \tfrac{1}{2} \vee x = \dfrac{9+7}{4} = 4$



$f(x) < 0$ geeft $\tfrac{1}{2} < x < 4$

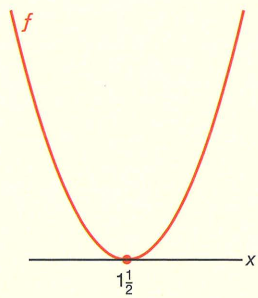
b $\underbrace{4x^2 - 12x + 9}_{f(x)} \leq 0$

$f(x) = 0$ geeft $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$(2x-3)^2 = 0$

$2x - 3 = 0$

$x = 1\tfrac{1}{2}$



$f(x) \leq 0$ geeft $x = 1\tfrac{1}{2}$

5 Zie voorbeeld b.
Geef de oplossing van

a $4x^2 - 12x + 9 < 0$

b $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$

c $4x^2 - 12x + 9 > 0$.

6 Los algebraïsch op.

a $x^2 - 5x - 14 < 0$

b $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$

c $2x^2 + x - 6 \leq 0$

d $(x-1)^2 + 3x + 14 - 5(x-2)^2 \geq 0$

7 Bereken exact de oplossingen.

a $x^2 - 2x\sqrt{5} + 5 > 0$

b $x^2 - 40 \leq 0$

c $9x^2 - 24x + 16 \leq 0$

d $(2x-5)^2 - (x-7)^2 - 2x(x-3) \geq 0$

Theorie D Kwadratische ongelijkheden bij berekeningen met de discriminant

Bij de vergelijking $x^2 + px - 2p = 0$ hoort de discriminant
$D = b^2 - 4ac = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot {-2p} = p^2 + 8p$.

Om te berekenen voor welke p de vergelijking $x^2 + px - 2p = 0$ twee oplossingen heeft, los je de ongelijkheid $p^2 + 8p > 0$ op.

Deze ongelijkheid los je op de gebruikelijke manier op. Dus los de vergelijking $p^2 + 8p = 0$ op, schets de grafiek van de functie $f(p) = p^2 + 8p$ en geef de oplossing van de ongelijkheid.

Voorbeeld

Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 + px - 2p = 0$ twee oplossingen heeft.

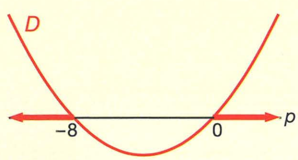
Uitwerking

$$\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot {-2p} = p^2 + 8p \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\} \quad \underbrace{p^2 + 8p}_{D} > 0$$

$D = 0$ geeft $p^2 + 8p = 0$

$p(p + 8) = 0$

$p = 0 \vee p = -8$



De vergelijking heeft twee oplossingen voor $p < -8 \vee p > 0$.

8 **a** Bereken algebraïsch voor welke p de vergelijking $x^2 + px + 3p = 0$ twee oplossingen heeft.
b Bereken algebraïsch voor welke p de vergelijking $x^2 + 2px + p = 0$ geen oplossing heeft.
c Bereken algebraïsch voor welke p de vergelijking $x^2 + px - 3 = 0$ twee oplossingen heeft.

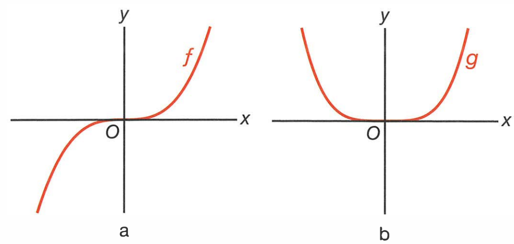
9 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -x^2 + px + 2p$.
Bereken algebraïsch voor welke p
a f_p een negatief maximum heeft
b het maximum van f_p groter is dan 12.

3.1 Hogeregraadsvergelijkingen

O 1 In figuur 3.3a is de grafiek van $f(x) = x^3$ geschetst en in figuur 3.3b de grafiek van $g(x) = x^4$.

a Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 10$? En $x^3 = -10$?

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 10$? En $x^4 = -10$?



figuur 3.3

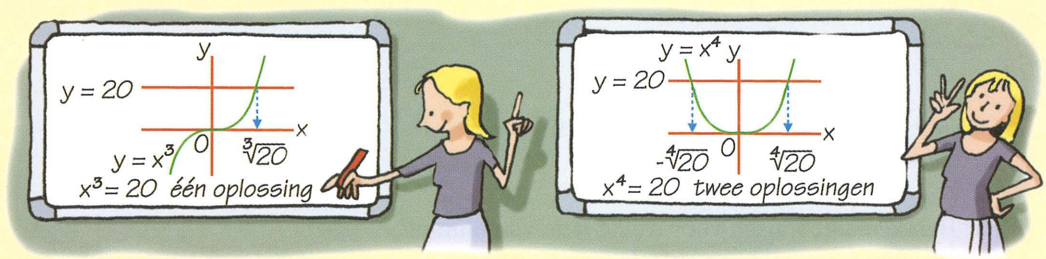
Theorie A Hogeremachtswortels

De vergelijking $x^2 = 5$ heeft de oplossingen $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$.
Je weet $(\sqrt{5})^2 = 5$, daarom heet $\sqrt{5}$ ook wel de **tweedemachtswortel** van 5.
Er zijn ook **hogeremachtswortels** zoals derdemachtswortels, vierdemachtswortels, enzovoort.
De vergelijking $x^3 = 20$ heeft als oplossing $x = \sqrt[3]{20}$.

Dus $(\sqrt[3]{20})^3 = 20$.

De derdemachtswortel van 20 is $\sqrt[3]{20}$.

De oplossing van $x^3 = -20$ is $x = \sqrt[3]{-20}$. Dus $(\sqrt[3]{-20})^3 = -20$.



Van de vergelijking $x^4 = 20$ is $\sqrt[4]{20}$ een oplossing.
Op het schoolbord hierboven zie je dat ook $-\sqrt[4]{20}$ een oplossing is.
De oplossingen van $x^4 = 20$ zijn dus $x = \sqrt[4]{20}$ en $x = -\sqrt[4]{20}$.
De vergelijking $x^4 = -20$ heeft geen oplossing, want de lijn $y = -20$ snijdt de grafiek van $y = x^4$ niet.

$(-\sqrt[4]{20})^4 = 20$

De oplossingen van $x^n = p$ met $n = 2, 3, 4, \ldots$

n oneven	**$x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p}$**
n even en $p > 0$	**$x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$**
n even en $p < 0$	**$x^n = p$ heeft geen oplossing**

Voor $\sqrt[2]{p}$ schrijven we gewoon $\sqrt{p}$.

Bij het exact berekenen van de oplossingen van een vergelijking laat je wortels als $\sqrt[5]{30}$, $\sqrt[7]{-3}$ en $\sqrt[4]{100}$ staan.
Maar wortels die mooi uitkomen, herleid je.

Bijvoorbeeld

$\sqrt[3]{8} = 2$, want $2^3 = 8$

$\sqrt[7]{-1} = -1$, want $(-1)^7 = -1$

$\sqrt[4]{81} = 3$, want $3^4 = 81$

$\sqrt[5]{1} = 1$, want $1^5 = 1$.

Zo krijg je bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $8 - \frac{1}{2}x^3 = 40$ de uitwerking

$$8 - \tfrac{1}{2}x^3 = 40$$
$$-\tfrac{1}{2}x^3 = 32$$
$$x^3 = -64$$
$$x = -4$$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $5x^4 + 8 = 43$

b $2(x - 3)^4 + 7 = 17$

Uitwerking

a $5x^4 + 8 = 43$
$5x^4 = 35$
$x^4 = 7$
$x = \sqrt[4]{7} \vee x = -\sqrt[4]{7}$

b $2(x - 3)^4 + 7 = 17$
$2(x - 3)^4 = 10$
$(x - 3)^4 = 5$
$x - 3 = \sqrt[4]{5} \vee x - 3 = -\sqrt[4]{5}$
$x = 3 + \sqrt[4]{5} \vee x = 3 - \sqrt[4]{5}$

2 **a** Neem de tabel over en vul hem in.
b Controleer de tabel en leer hem uit het hoofd, zodat je de getallen voortaan kunt herkennen als macht.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1					
2					
3					
4					
5					
6					

T 3 [► ► 7] Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{1}{4}x^3 + 60 = 6$

b $100 - 3x^4 = 55$

c $\frac{1}{2}(4x - 1)^5 + 3 = 19$

d $2\frac{1}{2}(1 - 2x)^6 - 6 = 14$

4 Bereken exact de oplossingen.

a $x^6 = 20$

b $5x^3 = 135$

c $1 - 3x^5 = 97$

d $\frac{1}{4}x^8 + 3 = 10$

3

5 Bereken exact de oplossingen.

a $5x^4 - 1 = 4$

b $5x^3 - 1 = 9$

c $8x^3 + 2 = 1$

d $5x^6 + 7 = 97$

6 Bereken exact de oplossingen.

a $3(x - 2)^4 + 7 = 37$

b $100 - \frac{1}{3}(4x - 3)^5 = 19$

c $\frac{1}{2}(3x - 1)^4 = 8$

d $6 - (2x - 1)^3 = 1$

A 7 Bereken exact de oplossingen.

a $5x^4 - 3 = 17$

b $4x^3 - 5 = 1367$

c $3(4x - 5)^3 = 15$

d $17 - 2(1 - 3x)^4 = 5$

O 8 Gegeven is de vergelijking $x^3 - x^2 - 2x = 0$.

a Schrijf de vergelijking in de vorm $x(\ldots) = 0$.

b Los de vergelijking algebraïsch op.

Theorie B Hogeregraadsvergelijkingen en ontbinden in factoren

Sommige hogeregraadsvergelijkingen kun je algebraïsch oplossen met ontbinden in factoren. Soms lukt dit door een factor buiten haakjes te brengen, soms lukt dit met een substitutie.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Uitwerking

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
$x(x^2 - 3x + 2) = 0$
$x(x - 1)(x - 2) = 0$
$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 3u + 2 = 0$
$(u - 1)(u - 2) = 0$
$u = 1 \vee u = 2$
$x^2 = 1 \vee x^2 = 2$
$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

9 Los algebraïsch op.

a $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

b $x^3 - 5x^2 = 6x$

c $x^3 = 4x^2 + 12x$

d $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

A 10 Bereken exact de oplossingen.

a $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c $x^4 + 16 = 10x^2$

d $x^3 + 25x = 10x^2$

D 11 Bereken exact de x-coördinaten van de punten op de grafiek van $f(x) = \dfrac{-10x}{x^2 + 2}$ waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $\frac{5}{9}$.

O 12 Gegeven is de vergelijking $2x^4 - 11x^2 + 12 = 0$.

a Stel $x^2 = u$ en los de vergelijking die je krijgt op met de *abc*-formule.

b Geef de exacte oplossingen van de vergelijking $2x^4 - 11x^2 + 12 = 0$.

Theorie C Hogeregraadsvergelijkingen en de *abc*-formule

Bij het oplossen van de vergelijking $2x^4 - 13x^2 + 20 = 0$ stel je $x^2 = u$. Je krijgt dan de vergelijking $2u^2 - 13u + 20 = 0$. Als je deze vergelijking oplost met de *abc*-formule, denk er dan aan dat je na het gebruik van de *abc*-formule de oplossingen van de vergelijking $2u^2 - 13u + 20 = 0$ hebt, maar nog niet de oplossingen van $2x^4 - 13x^2 + 20 = 0$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossing van $2x^4 - 13x^2 + 20 = 0$.

Uitwerking

$2x^4 - 13x^2 + 20 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$2u^2 - 13u + 20 = 0$

$D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 9$

$$u = \frac{13 - 3}{4} = 2\tfrac{1}{2} \vee u = \frac{13 + 3}{4} = 4$$

$x^2 = 2\frac{1}{2} \vee x^2 = 4$

$x = \sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x = 2 \vee x = -2$

13 Bereken exact de oplossingen.

a $6x^4 + 2 = 7x^2$

b $2x^4 = x^2 + 3$

c $4x^4 + 7x^2 = 2$

d $16x^4 + 225 = 136x^2$

Geschiedenis 5000 jaar vergelijkingen

3000 voor Christus
Al rond 3000 voor Christus waren de Babyloniërs in staat om kwadratische vergelijkingen op te lossen. Dit blijkt uit kleitabletten uit die tijd waarop wiskundige teksten voorkomen. In die tijd werd een vergelijking en ook de oplossingsmethode omschreven in woorden: de *abc*-formule kende men nog niet in de vorm zoals jij die hebt geleerd.

800 na Christus
Het systematisch oplossen van vergelijkingen kwam pas echt op gang in de Arabische wiskunde. Van grote invloed is het werk van Mohammed ibn Musa Al-Khwarizmi.

Musa Al-Khwarizmi

1100
Rond 1100 ontdekte de Perzische wiskundige Omar Khayyam een methode om enkele derdegaadsvergelijkingen met behulp van meetkundige hulpmiddelen op te lossen, maar het zou nog tot de 16e eeuw duren alvorens de derdegraadsvergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kon worden opgelost.

1515
Scipio del Ferro, professor aan de universiteit van Bologna, vertelde rond 1515 aan zijn leerling Antonio Maria Fior hoe je vergelijkingen van de vorm $x^3 + cx = d$ kunt oplossen.

1535
Nicolo Tartaglia ontdekte een methode om derdegraadsvergelijkingen van de vorm $x^3 + bx^2 = d$ op te lossen, maar hij hield zijn ontdekking aanvankelijk nog geheim.

Nicolo Tartaglia

1545
In zijn boek Ars Magna beschrijft Girolamo Cardano hoe je de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunt oplossen. Tartaglia beschuldigde Cardano van plagiaat, maar de formule waarmee de oplossingen van een derdegraadsvergelijking kunnen worden gevonden is genoemd naar Cardano. In Ars Magna beschrijft Cardano ook dat een van zijn studenten, Ludovico Ferrari, in 1540 ontdekte hoe je vierdegraadsvergelijkingen kunt oplossen.

Leonhard Euler

1750
Rond 1750 hield Leonhard Euler zich bezig met het vinden van een formule voor de oplossingen van een vijfdegraadsvergelijking, maar hij slaagde er niet in dit probleem op te lossen.

1824
In 1824 bewees de Noorse wiskundige Niels Abel dat het onmogelijk is een formule voor de oplossingen van een vijfdegraadsvergelijking te vinden.

1832
De Fransman Evariste Galois, die reeds op 21-jarige leeftijd in een duel de dood vond, heeft een algemene theorie ontwikkeld waarin voor elke n-de graadsvergelijking wordt aangegeven onder welke voorwaarden deze kan worden opgelost.

Evariste Galois

A 14 Bereken exact de oplossingen.

a $4x^4 + 153 = 53x^2$

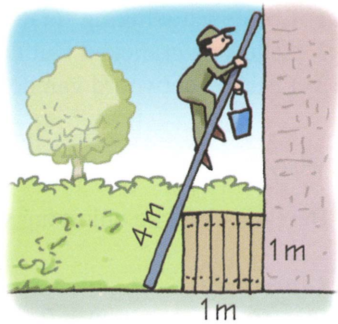
b $4x^4 + 21x^2 = 148$

c $4x^6 + 35 = 24x^3$

d $64x^5 + 27x = 224x^3$

D 15 In deze opgave bekijken we de volgende situatie. Een schilder zet een ladder van 4 meter tegen een huis. Voor het huis staat een berging van 1 meter breed en 1 meter hoog. De ladder staat op de grond, raakt de berging en staat tegen het huis. Zie figuur 3.4.
We vragen ons af hoe hoog de ladder tegen het huis staat.

a Dit lijkt een eenvoudig probleem.
Probeer het daarom eerst zelf op te lossen zonder dat je naar het vervolg kijkt.



figuur 3.4

Zie figuur 3.5.
We stellen $CE = x$. Hieruit volgt dat $AD = \frac{1}{x}$.

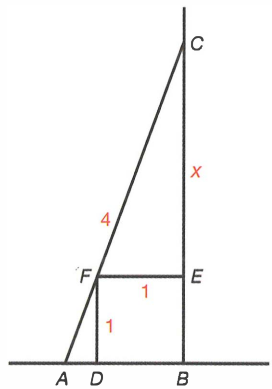
b Licht dit toe.

Uit de figuur volgt nu dat $(1 + x)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = 16$.

c Licht dit toe en laat zien dat deze vergelijking te herleiden is tot $x^2 + 2x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 16$.

d Stel $x + \frac{1}{x} = u$ en herleid hiermee de vergelijking van vraag c tot $u^2 + 2u = 16$.

e Los de vergelijking $u^2 + 2u = 16$ algebraïsch op en bereken in cm nauwkeurig hoe hoog de ladder tegen het huis staat.



figuur 3.5

O 16 Gegeven is de ongelijkheid $x^3 - 12x < x^2$.

a Los de vergelijking $x^3 - 12x = x^2$ algebraïsch op.

b Schets de grafieken van $f(x) = x^3 - 12x$ en $g(x) = x^2$ in één figuur.

c Lees de oplossing van $x^3 - 12x < x^2$ af uit de figuur.

Theorie D Hogeregraadsongelijkheden algebraïsch oplossen

Bij het algebraïsch oplossen van hogeregraadsongelijkheden ga je als volgt te werk.

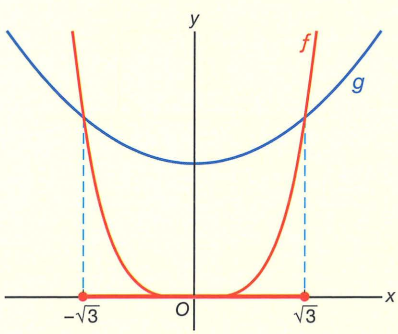
Werkschema: het algebraïsch oplossen van de hogeregraadsongelijkheid $f(x) < g(x)$

1 Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op.
2 Schets de grafieken van f en g.
3 Lees het antwoord van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ uit de schets af.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossing van $x^4 \leq 2x^2 + 3$.

Uitwerking
Stel $f(x) = x^4$ en $g(x) = 2x^2 + 3$.
$f(x) = g(x)$ geeft $x^4 = 2x^2 + 3$
$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 2u - 3 = 0$
$(u + 1)(u - 3) = 0$
$u = -1 \vee u = 3$
$x^2 = -1 \vee x^2 = 3$
geen opl. $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$



$x^4 \leq 2x^2 + 3$ geeft $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

17 Bereken exact de oplossingen.
a $x^3 \geq 2x^2 + 8x$
b $x^3 + 2x^2 < 3x$
c $x^4 \geq 3x^2 + 10$
d $\frac{2}{3}x^4 + 9 \leq 7x^2$

D 18 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \left(p + \frac{5}{p}\right)x^2 + p^2x + 4p$ met $p > 0$.
Bereken exact voor welke waarden van p de functie f_p een negatief minimum heeft.

O 19 Gegeven is de vergelijking $|4x - 5| = 9$.
Licht toe dat zowel $x = -1$ als $x = 3\frac{1}{2}$ een oplossing is.

Theorie E Modulusvergelijkingen

De **modulusvergelijking** $|x| = 5$ heeft als oplossing $x = 5 \vee x = -5$.
De vergelijking $|3x - 1| = 8$ los je op door te gebruiken
$3x - 1 = 8 \vee 3x - 1 = -8$.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $|3x - 1| = 8$

b $|1 - x^2| = 8$

Uitwerking

a $|3x - 1| = 8$
$3x - 1 = 8 \vee 3x - 1 = -8$
$3x = 9 \vee 3x = -7$
$x = 3 \vee x = -2\frac{1}{3}$

b $|1 - x^2| = 8$
$1 - x^2 = 8 \vee 1 - x^2 = -8$
$-x^2 = 7 \vee -x^2 = -9$
$x^2 = -7 \vee x^2 = 9$
geen opl. $x = 3 \vee x = -3$

20 Bereken exact de oplossingen.

a $|2x - 1| = 8$
b $|x^2 - 3| = 1$
c $|2x^2 - 5| = 11$
d $|5 - x^2| = 11$

A 21 Bereken exact de oplossingen.

a $|2x^4 - 5| = 15$
b $|2x^3 - 5| = 15$
c $|x^4 - 5x^2| = 6$
d $|x^6 - 10x^3| = 24$

Terugblik

De vergelijking $x^n = p$ met $n = 2, 3, 4, \ldots$
Onderscheid de gevallen n is oneven en n is even.
Bij oneven n heeft de vergelijking $x^n = p$ precies één oplossing.
$x^5 = 8$ geeft $x = \sqrt[5]{8}$
$x^5 = -12$ geeft $x = \sqrt[5]{-12}$
Bij even n heeft de vergelijking $x^n = p$
- twee oplossingen als $p > 0$, bijvoorbeeld $x^4 = 18$ geeft $x = \sqrt[4]{18} \vee x = -\sqrt[4]{18}$
- geen oplossing als $p < 0$, bijvoorbeeld $x^4 = -18$ heeft geen oplossing.

3

Vergelijkingen zoals $3x^5 + 7 = 19$
$3x^5 + 7 = 19$
$3x^5 = 12$
$x^5 = 4$
$x = \sqrt[5]{4}$

Vergelijkingen zoals $3(x - 1)^4 + 7 = 19$
$3(x - 1)^4 + 7 = 19$
$3(x - 1)^4 = 12$
$(x - 1)^4 = 4$
$x - 1 = \sqrt[4]{4} \vee x - 1 = -\sqrt[4]{4}$
$x = 1 + \sqrt[4]{4} \vee x = 1 - \sqrt[4]{4}$

Vergelijkingen zoals $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
$x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
$x(x^2 - 7x + 10) = 0$
$x(x - 2)(x - 5) = 0$
$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5$

Vergelijkingen zoals $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$
$x^4 - 7x^2 + 10 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 7u + 10 = 0$
$(u - 2)(u - 5) = 0$
$u = 2 \vee u = 5$
$x^2 = 2 \vee x^2 = 5$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

Vergelijkingen zoals $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$
$2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$2u^2 - 7u + 5 = 0$
$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9$
$u = \dfrac{7 - 3}{4} = 1 \vee u = \dfrac{7 + 3}{4} = 2\tfrac{1}{2}$
$x^2 = 1 \vee x^2 = 2\tfrac{1}{2}$
$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{2\tfrac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{2\tfrac{1}{2}}$

Modulusvergelijkingen
Het oplossen van de modulusvergelijking $|1 - x^2| = 3$ gaat als volgt.
$|1 - x^2| = 3$
$1 - x^2 = 3 \vee 1 - x^2 = -3$
$-x^2 = 2 \vee -x^2 = -4$
$x^2 = -2 \vee x^2 = 4$
geen opl. $x = 2 \vee x = -2$

3.2 Stelsels vergelijkingen

O 22 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ 5x - 4y = 13 \end{cases}$

Bij het oplossen van dit stelsel met behulp van substitutie ontstaan breuken.
Licht dit toe en bereken de oplossing van het stelsel.

3

Theorie A Elimineren door optellen of aftrekken

Elimineren betekent wegwerken.

Je hebt geleerd hoe je een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen kunt oplossen met behulp van **elimineren door substitutie**.
Je maakt bij een van de vergelijkingen een van de variabelen vrij en substitueert de vrijgemaakte variabele in de andere vergelijking.
Soms gaat dit moeizaam, zoals bijvoorbeeld in opgave 22.
Daarom leer je nu een andere manier om een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen op te lossen.
Deze manier heet **elimineren door optellen of aftrekken**.

Bij het stelsel $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases}$ trek je de vergelijkingen van elkaar af,

want dan valt de y weg.

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases} \; -$$
$$2x = 8 \longleftarrow \boxed{y \text{ is geëlimineerd.}}$$
$$x = 4$$

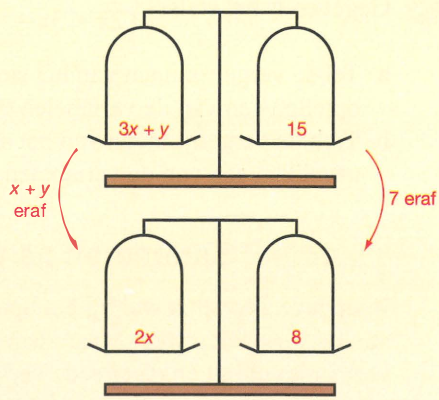
$x = 4$ en $x + y = 7$ geeft $4 + y = 7$, dus $y = 3$.
De oplossing van het stelsel is $(x, y) = (4, 3)$.
Dat je de vergelijkingen $3x + y = 15$ en $x + y = 7$ van elkaar af mag trekken wordt verduidelijkt in de figuur hiernaast.

Bij het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -2x - 5y = 11 \end{cases}$ tel je de vergelijkingen op, want dan wordt x geëlimineerd.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -2x - 5y = 11 \end{cases} \; +$$
$$-2y = 4 \longleftarrow \boxed{3y + -5y = -2y}$$
$$y = -2$$

$y = -2$ en $2x + 3y = -7$ geeft $2x + 3 \cdot -2 = -7$ en dit geeft $x = -\frac{1}{2}$.

Dus $(x,y) = (-\frac{1}{2}, -2)$ is de oplossing van het stelsel.



figuur 3.6 Weer in evenwicht, want links en rechts is hetzelfde eraf gehaald, immers $x + y = 7$.

Kijk, voordat je gaat optellen of aftrekken, goed naar het stelsel wat het handigst is.

Zo ga je bij het stelsel $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ optellen, want dan wordt y geëlimineerd. Met aftrekken schiet je hier niets op.

En bij het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$ ga je aftrekken. Hier schiet je met optellen niets op.

3

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$ algebraïsch op.

Uitwerking

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \quad -$$

$$2y = -8 \quad \leftarrow \quad \boxed{-3y - -5y = 2y}$$

$$\left.\begin{array}{r} y = -4 \\ 2x - 3y = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x - 3 \cdot -4 = -5 \\ 2x = -17 \\ x = -8\tfrac{1}{2} \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (-8\tfrac{1}{2}, -4)$.

23 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

O 24 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

a Tel de vergelijkingen van het stelsel bij elkaar op. Is na het optellen een van de variabelen geëlimineerd?

b Trek de vergelijkingen van het stelsel van elkaar af. Is na het aftrekken een van de variabelen geëlimineerd?

Theorie B Elimineren na vermenigvuldigen

In opgave 24 valt zowel bij het optellen als bij het aftrekken geen van de variabelen weg. Maar als je de eerste vergelijking met 2 vermenigvuldigt en de tweede vergelijking met 3, dan staat in beide vergelijkingen $6x$ en dan wordt bij aftrekken de variabele x wel geëlimineerd.

Je krijgt $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 8y = 14 \\ \underline{6x + 9y = 48} \; - \end{cases}$
$$-17y = -34$$

Tussen de verticale strepen staan de getallen waarmee vermenigvuldigd is.
Je kunt bij dit stelsel ook y elimineren. Dit gaat als volgt.

$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 9x - 12y = 21 \\ \underline{8x + 12y = 64} \; + \end{cases}$
$$17x \qquad = 85$$

Ga bij het oplossen van een stelsel eerst na welke variabele je het beste kunt elimineren. Doe het zo, dat je zo weinig mogelijk rekenwerk krijgt.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ algebraïsch op.

Uitwerking

$\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ \underline{12x - 8y = 16} \; + \end{cases}$

$14x = 21$

$\left.\begin{array}{l} x = 1\frac{1}{2} \\ 2x + 8y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 8y = 5 \\ 3 + 8y = 5 \\ 8y = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{array}$

Om y te elimineren is het niet nodig om met 2 en 8 te vermenigvuldigen.

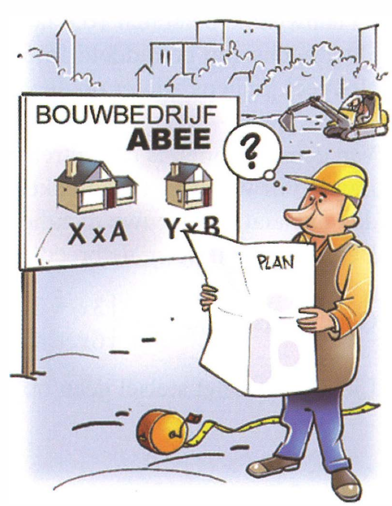
Dus $(x, y) = (1\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

T 25 [▶▶30]

a Los het stelsel $\begin{cases} 4x - y = 13 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases}$ algebraïsch op.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van de lijnen k: $3x - 2y = 7$ en l: $5x - 4y = 10$.

c Een aannemer wil op een stuk grond van 8800 m^2 twee typen huizen neerzetten. Voor een huis van type A is 325 m^2 grond nodig. Voor een huis van type B is dat 175 m^2. De aannemer wil in totaal 40 huizen op het stuk grond bouwen. Hoeveel huizen van type A gaat de aannemer bouwen?



26 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ 3x - y = 19 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 4x + y = 13 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

27 Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.

a k: $3x - 2y = -12$ en l: $x + 4y = 38$

b p: $2x + 5y = 26$ en q: $3x - 2y = 1$

28 Daan heeft in zijn spaarpot uitsluitend muntstukken van 1 en 2 euro.
Met 50 munten heeft hij een bedrag van € 87.
Stel het aantal munten van 1 euro is x en het aantal munten van 2 euro is y.

a Welke vergelijking volgt uit het gegeven dat Daan 50 munten heeft en welke vergelijking volgt uit het gegeven dat het bedrag € 87 is?

b Bereken hoeveel munten van 1 euro Daan heeft. Los hiertoe een stelsel op.

29 Een groenteman op de markt verkoopt appels en peren. De appels kosten € 1,40 per kg en de peren € 1,70 per kg.
Op een zaterdag verkoopt hij in totaal 295 kg appels en peren.
De opbrengst is € 452.
Hoeveel kg appels heeft hij die dag verkocht?

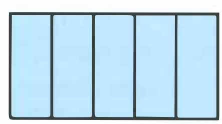
A 30 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ 5x + 4y = 35 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}2y = 1 \\ 0{,}3x - 0{,}3y = 1{,}5 \end{cases}$

A 31 Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van de lijnen p: $3x - 2y = -12$ en q: $x + 4y = 38$.

A 32 Op de verjaardag van Marjan is de gemiddelde leeftijd van de 15 aanwezige personen 16,4 jaar.
De jongens zijn gemiddeld 15,6 jaar en de meisjes 16,8 jaar.
Hoeveel jongens zijn er op de verjaardag?

A 33 Van een rechthoek is de omtrek 26.
Leg je vijf van deze rechthoeken tegen elkaar aan, dan ontstaat een nieuwe rechthoek waarvan de omtrek 50 is.
Bereken de lengte en de breedte van de eerste rechthoek.



figuur 3.7

R 34 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 6x + 4y = 15 \end{cases}$

Licht toe dat het stelsel geen oplossing heeft.

O 35 Gegeven is de parabool $y = x^2 + bx + c$ die door de punten $(1, -2)$ en $(2, 3)$ gaat.

a De parabool gaat door het punt $(1, -2)$.
Licht toe dat hieruit volgt $b + c = -3$.

b De parabool gaat ook door het punt $(2, 3)$.
Licht toe dat hieruit volgt $2b + c = -1$.

c Welke getallen b en c voldoen aan $\begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$?

Theorie C Stelsels bij lijnen en parabolen

Is gegeven dat het punt $(-3, 5)$ op de parabool $y = ax^2 + c$ ligt, dan volgt hieruit $a \cdot (-3)^2 + c = 5$, dus $9a + c = 5$.
Is bovendien gegeven dat het punt $(2, 10)$ op de parabool ligt, dan krijg je ook nog $a \cdot 2^2 + c = 10$, ofwel $4a + c = 10$.

Zo ontstaat het stelsel $\begin{cases} 9a + c = 5 \\ 4a + c = 10 \end{cases}$

Voorbeeld

De parabool $y = ax^2 + bx$ gaat door de punten $(1, 5)$ en $(2, 14)$.
Stel de formule op van de parabool.

Uitwerking
$(1, 5)$ invullen geeft $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = 5$, dus $a + b = 5$.
$(2, 14)$ invullen geeft $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 14$, dus $4a + 2b = 14$.

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 4a + 2b = 14 \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right| \text{ geeft } \begin{cases} a + b = 5 \\ \underline{2a + b = 7} \end{cases} -$$
$$-a = -2$$
$$\left.\begin{matrix} a = 2 \\ a + b = 5 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2 + b = 5 \\ b = 3 \end{matrix}$$

Dus $y = 2x^2 + 3x$.

36 De parabool $y = ax^2 + c$ gaat door de punten $(1, 8)$ en $(2, 17)$.
Stel de formule op van de parabool.

37 De lijnen k: $y = ax + b$ en l: $y = -bx + 9a$ snijden elkaar in het punt $(3, 9)$.
Bereken a en b.

38 De parabool $y = x^2 + px + q$ snijdt de lijn $y = 2px - q$ in het punt $(2, -1)$.

a Bereken p en q.

b Bereken de coördinaten van het andere snijpunt van de parabool en de lijn.

A 39 De parabool $y = ax^2 + bx + c$ gaat door de punten (-2, -10), (0, 4) en (3, 5).
Stel de formule op van de parabool.

D 40 Gegeven zijn de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$, de lijn k: $y = x + 4$ en de lijn l: $y = -2x + 19$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt (2, 6) en de lijn l raakt de grafiek van f in het punt (8, 3).
Bereken a, b en c.

3

O 41 Kun je het stelsel $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ oplossen met behulp van elimineren door optellen en aftrekken?

Theorie D Elimineren door substitutie

Om het stelsel van opgave 41 op te lossen maken we gebruik van elimineren door substitutie.
Uit $x + y = 3$ volgt $y = 3 - x$.
Substitutie van $y = 3 - x$ in $x^2 + y^2 = 5$ geeft $x^2 + (3 - x)^2 = 5$ en deze vergelijking is op te lossen.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ algebraïsch op.

Uitwerking
Substitutie van $y = x^2 - 4$ in $x + 2y = 2$ geeft $x + 2(x^2 - 4) = 2$

$$x + 2x^2 - 8 = 2$$
$$2x^2 + x - 10 = 0$$
$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -10 = 81$$
$$x = \frac{-1 - 9}{4} = -2\tfrac{1}{2} \vee x = \frac{-1 + 9}{4} = 2$$

$x = -2\frac{1}{2}$ invullen in $y = x^2 - 4$ geeft $y = (-2\frac{1}{2})^2 - 4 = 2\frac{1}{4}$.
$x = 2$ invullen in $y = x^2 - 4$ geeft $y = 2^2 - 4 = 0$.
Dus $(x,y) = (-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}) \vee (x,y) = (2, 0)$.

42 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} y = x^2 - 18 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x - y = -3 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

A 43 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 100 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \\ x + 4y = 9 \end{cases}$

Terugblik

Een stelsel oplossen met elimineren door optellen of aftrekken

Het stelsel $\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases}$ van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen kun je oplossen met elimineren door optellen of aftrekken. Vermenigvuldig de onderste vergelijking met 3 en trek daarna de vergelijkingen van elkaar af. Dan wordt x geëlimineerd.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ \underline{3x - 9y = 42} \; - \end{cases}$$

$$4y = -24$$

$$y = -6$$

$y = -6$ invullen in $x - 3y = 14$ geeft $x - 3 \cdot -6 = 14$, dus $x = -4$.
De oplossing is $(x, y) = (-4, -6)$.

Een stelsel oplossen met elimineren door substitutie

Het stelsel $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ is niet op te lossen met elimineren door optellen of aftrekken.
Bij dit stelsel ga je elimineren door substitutie.
Uit $x + y = 6$ volgt $y = 6 - x$.
Substitutie van $y = 6 - x$ in $xy = 8$ geeft $x(6 - x) = 8$

$$6x - x^2 = 8$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x - 2)(x - 4) = 0$$
$$x = 2 \vee x = 4$$

$x = 2$ geeft $y = 6 - 2 = 4$ en $x = 4$ geeft $y = 6 - 4 = 2$.
Dus $(x,y) = (2,4) \vee (x,y) = (4,2)$.
Merk op dat de oplossing van dit stelsel bestaat uit twee getallenparen.

Stelsels bij lijnen en parabolen

Bij het berekenen van de waarden van a en b waarvoor de lijn $y = ax + b$ de parabool $y = ax^2 + 2bx - 3$ snijdt in het punt $(4, 5)$ krijg je met een stelsel te maken.
$(4, 5)$ invullen in $y = ax + b$ geeft $4a + b = 5$.
$(4, 5)$ invullen in $y = ax^2 + 2bx - 3$ geeft $a \cdot 4^2 + 8b - 3 = 5$, dus $16a + 8b = 8$, ofwel $2a + b = 1$.
Zo ontstaat het stelsel $\begin{cases} 4a + b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$ dat je oplost met elimineren door aftrekken.

$$\begin{cases} 4a + b = 5 \\ \underline{2a + b = 1} \; - \end{cases}$$

$$2a \quad = 4$$

$$\left.\begin{matrix} a = 2 \\ 2a + b = 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 4 + b = 1 \\ b = -3 \end{matrix}$$

Dus de lijn is $y = 2x - 3$ en de parabool is $y = 2x^2 - 6x - 3$.
Nu zijn de coördinaten van het andere snijpunt van de lijn en de parabool te berekenen. Je krijgt het punt $(0, -3)$.

3.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

3

O 44 Gegeven is de vergelijking $5x(x^2 - 4) = 15(x^2 - 4)$.

a Werk de haakjes weg en licht toe dat dit geen goede aanpak is om de vergelijking algebraïsch op te lossen.

b Klaas deelt links en rechts door $x^2 - 4$ en lost de vergelijking $5x = 15$ op.
Geef commentaar.

c Gebruik de regel $AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$ om de gegeven vergelijking op te lossen.

Theorie A Vergelijkingen van de vorm $AB = 0$, $A^2 = B^2$ en $AB = AC$

Bij het oplossen van de vergelijking $(x^2 - 1)(2x^2 - 1) = 0$ gebruik je de regel

$$\boldsymbol{A \cdot B = 0 \text{ geeft } A = 0 \vee B = 0}$$

Dus $(x^2 - 1)(2x^2 - 1) = 0$ geeft

$$x^2 - 1 = 0 \vee 2x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1 \vee x^2 = \tfrac{1}{2}$$
$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Uit $x^2 = 25$ volgt $x = 5 \vee x = -5$.
De vergelijking $x^2 = 25$ heeft de vorm $A^2 = B^2$.
Bij het oplossen van een vergelijking van de vorm $A^2 = B^2$ gebruik je de regel

$$\boldsymbol{A^2 = B^2 \text{ geeft } A = B \vee A = -B}$$

$$A^2 = B^2$$
$$A^2 - B^2 = 0$$
$$(A - B)(A + B) = 0$$
$$A - B = 0 \vee A + B = 0$$
$$A = B \vee A = -B$$

Met deze regel los je de vergelijking $(2x^2 - 1)^2 = x^2$ als volgt op.

$$(2x^2 - 1)^2 = x^2$$
$$2x^2 - 1 = x \vee 2x^2 - 1 = -x$$
$$2x^2 - x - 1 = 0 \vee 2x^2 + x - 1 = 0$$
$$D = 1 + 8 = 9 \qquad D = 1 + 8 = 9$$
$$x = \frac{1 - 3}{4} = -\tfrac{1}{2} \vee x = \frac{1 + 3}{4} = 1 \vee x = \frac{-1 - 3}{4} = -1 \vee x = \frac{-1 + 3}{4} = \tfrac{1}{2}$$

Bij het oplossen van de vergelijking $x^2(2x^2 - 1) = 4(2x^2 - 1)$ mag je niet beginnen met beide leden te delen door $2x^2 - 1$, immers $2x^2 - 1$ zou gelijk aan nul kunnen zijn.
Je hebt te maken met een vergelijking van de vorm $AB = AC$ en bij het oplossen gebruik je de regel

$$\boxed{\boldsymbol{A \cdot B = A \cdot C \text{ geeft } A = 0 \vee B = C}}$$

$AB = AC$
$AB - AC = 0$
$A(B - C) = 0$
$A = 0 \vee B - C = 0$
$A = 0 \vee B = C$

3

Het oplossen van de vergelijking $x^2(2x^2 - 1) = 4(2x^2 - 1)$ gaat dus als volgt.
$x^2(2x^2 - 1) = 4(2x^2 - 1)$
$2x^2 - 1 = 0 \vee x^2 = 4$
$2x^2 = 1 \vee x = 2 \vee x = -2$
$x^2 = \frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x = -2$
$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = 2 \vee x = -2$

Kies je $C = 1$ in de regel $AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$ dan krijg je de volgende regel.

$$\boxed{\boldsymbol{A \cdot B = A \text{ geeft } A = 0 \vee B = 1}}$$

$AB = A$
$AB - A = 0$
$A(B - 1) = 0$
$A = 0 \vee B - 1 = 0$
$A = 0 \vee B = 1$

Bij het oplossen van de vergelijking $x^2(x - 1) = x^2$ krijg je
$x^2(x - 1) = x^2$
$x^2 = 0 \vee x - 1 = 1$
$x = 0 \vee x = 2$

Ga bij het oplossen van vergelijkingen eerst na of je een van de volgende regels kunt gebruiken.

$A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$
$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$
$A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$
$A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$

Voorbeeld

Los algebraïsch op $(5x^2 - 3)^2 = 4x^2$.

Uitwerking

$(5x^2 - 3)^2 = 4x^2$

$(5x^2 - 3)^2 = (2x)^2$ $\qquad$ $A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$

$5x^2 - 3 = 2x \vee 5x^2 - 3 = -2x$

$5x^2 - 2x - 3 = 0 \vee 5x^2 + 2x - 3 = 0$

$D = 4 + 60 = 64 \qquad D = 4 + 60 = 64$

$$x = \frac{2 - 8}{10} = -\tfrac{3}{5} \vee x = \frac{2 + 8}{10} = 1 \vee x = \frac{-2 - 8}{10} = -1 \vee x = \frac{-2 + 8}{10} = \tfrac{3}{5}$$

45 Los exact op.

a $(4x - 1)^2 = (3x - 2)^2$

b $(3x^2 - 5)^2 = 4x^2$

c $(x^2 - 4x)(x^2 - 8) = 0$

d $x^3(x - 3) = 8(x - 3)$

e $2x(x^2 - 4) = 6(x - 2)$

f $x(x - 2)(x^2 - 3) = 0$

A 46 Gegeven is de functie $f(x) = (3x + 4)(x - 2)^3$.

a Schets de grafiek van f en geef het bereik van f.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

c De lijn k: $y = 3x + 4$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B. Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.

d Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de parabool $y = (3x + 4)(x - 2)$.

O 47 Bij de vergelijking $\frac{x}{2} = \frac{x + 4}{x}$ hoort de verhoudingstabel

x	$x + 4$
2	x

a Licht toe dat uit deze verhoudingstabel volgt $x^2 - 2x - 8 = 0$.

b Bereken x.

Theorie B Gebroken vergelijkingen

De vergelijking $\frac{x + 2}{x + 1} = \frac{6}{x + 3}$ is een **gebroken vergelijking**.

Je kunt deze vergelijking algebraïsch oplossen door middel van **kruiselings vermenigvuldigen**.

Bij het oplossen van gebroken vergelijkingen kunnen oplossingen worden ingevoerd.

Controleer daarom of de gevonden waarden van x voldoen.

Het is daarvoor voldoende om na te gaan of er voor de gevonden waarden van x geen noemer nul wordt.

$\frac{x + 2}{x + 1} = \frac{6}{x + 3}$

kruiselings vermenigvuldigen geeft

$(x + 2)(x + 3) = 6(x + 1)$

$x^2 + 5x + 6 = 6x + 6$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0 \vee x = 1$

vold. $\quad$ vold.

Ook de vergelijking $\frac{x+3}{x+1} = 0$ is een gebroken vergelijking.
Omdat een breuk nul is als de teller nul is, krijg je $x + 3 = 0$, dus de oplossing van deze vergelijking is $x = -3$.

Bij de vergelijking $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+3}{x+1}$ zijn de noemers gelijk.
Daarom krijg je een oplossing als ook de tellers aan elkaar gelijk zijn. Dus je krijgt $2x - 4 = x + 3$ en dit geeft $x = 7$.

Bij de vergelijking $\frac{x+3}{2x-4} = \frac{x+3}{x+1}$ zijn de tellers gelijk. Als deze tellers gelijk zijn aan 0 staat er $\frac{0}{2x-4} = \frac{0}{x+1}$ en dit levert een oplossing.
Dus een oplossing is $x = -3$.
Maar ook als de noemers gelijk zijn heb je een oplossing.
Dit geeft $2x - 4 = x + 1$, dus $x = 5$.

$\frac{0}{1} = 0$

$\frac{1}{0}$ kan niet

$\frac{0}{0}$ kan niet

$\frac{0}{10} = 0$

Een breuk is nul als de teller nul is en de noemer niet.

$\wedge$ betekent en.

Regels voor het algebraïsch oplossen van gebroken vergelijkingen

$\frac{A}{B} = 0$ **geeft** $A = 0 \wedge B \neq 0$

$\frac{A}{B} = C$ **geeft** $A = BC \wedge B \neq 0$

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ **geeft** $AD = BC \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$

$\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ **geeft** $A = C \wedge B \neq 0$

$\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ **geeft** $(A = 0 \vee B = C) \wedge B \neq 0 \wedge C \neq 0$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{6x^2 - 12}{x^2 - 12} = 0$

b $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$

Uitwerking

a $\frac{6x^2 - 12}{x^2 - 12} = 0$

$6x^2 - 12 = 0$

$6x^2 = 12$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

voldoet voldoet

b $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$

$x^2 - 1 = 0 \vee x^2 + 4 = 2x + 4$

$x^2 = 1 \vee x^2 - 2x = 0$

$x = 1 \vee x = -1 \vee x(x - 2) = 0$

$x = 1 \vee x = -1 \vee x = 0 \vee x = 2$

vold. vold. vold. vold.

48 Los algebraïsch op.

a $\dfrac{x-3}{x+1} = 1\frac{1}{2}$

b $\dfrac{x-1}{x} + 1 = 3$

c $\dfrac{3x+4}{x-1} = \dfrac{x+18}{x}$

d $\dfrac{2x-5}{4-x} = \dfrac{x+2}{3x-4}$

49 Bereken exact de oplossingen.

a $\dfrac{5x^2-15}{x^2+5} = 0$

b $\dfrac{x^2-3}{x^2+1} = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

c $\dfrac{x^2-4}{2x+5} = \dfrac{x^2-4}{x+4}$

d $\dfrac{x^2+1}{x+1} = \dfrac{x+3}{x+1}$

A 50 Bereken exact de oplossingen.

a $\dfrac{3x^2-10}{x^2+1} = 2$

b $\dfrac{x^3-8}{x^2+2} = \dfrac{x^3-8}{x+8}$

c $\dfrac{3x^2-10}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{25}$

d $\dfrac{6x^2-12}{(x^2-1)^2} = 1\frac{1}{3}$

O 51 **a** Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x-5} = 3$.
Licht toe dat hieruit volgt $2x - 5 = 9$ en los deze vergelijking op.

b Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x-5} = -3$.
Licht toe dat deze vergelijking geen oplossing heeft.

Theorie C Wortelvergelijkingen

De vergelijking $\sqrt{2x-3} = 5$ is een voorbeeld van een **wortelvergelijking**.

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $\sqrt{2x-3} = 5$ ga je als volgt te werk.

- Kwadrateer het linker- en rechterlid. $\sqrt{2x-3} = 5$
- Los de verkregen vergelijking op. $2x - 3 = 25$

$$2x = 28$$
$$x = 14$$

Bij de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ breng je vóór het kwadrateren eerst x van het linkerlid naar het rechterlid. Je krijgt $\sqrt{x} = 12 - x$.
Je hebt $\sqrt{x}$ **geïsoleerd**.
Kwadrateren geeft $x = (12 - x)^2$

$$x = 144 - 24x + x^2$$
$$x^2 - 25x + 144 = 0$$
$$(x-9)(x-16) = 0$$
$$x = 9 \vee x = 16$$

De getallen 9 en 16 zijn echter niet beide oplossing van de oorspronkelijke vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$.
Invullen van $x = 9$ in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ geeft $9 + \sqrt{9} = 12$ en dit klopt.
Invullen van $x = 16$ in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ geeft $16 + \sqrt{16} = 12$ en dit klopt niet.
Daarom is $x = 9$ de enige oplossing die voldoet.
Door het kwadrateren is **een oplossing ingevoerd**.

Het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen gaat in drie stappen: isoleren, kwadrateren, controleren.

3

Werkschema: het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen
1 **Isoleer** de wortelvorm, dus zet de wortelvorm apart.
2 **Kwadrateer** het linker- en rechterlid en los de verkregen vergelijking op.
3 **Controleer** of de oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.
a $3x = \sqrt{8x + 1}$
b $2x - \sqrt{x} = 10$

Uitwerking
a $3x = \sqrt{8x + 1}$
kwadrateren geeft
$9x^2 = 8x + 1$
$9x^2 - 8x - 1 = 0$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -1 = 100$
$x = \dfrac{8 - 10}{18} = -\frac{1}{9} \vee x = \dfrac{8 + 10}{18} = 1$
$x = -\frac{1}{9}$ geeft $-\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{9}}$ voldoet niet
$x = 1$ geeft $3 = \sqrt{9}$ voldoet

b $2x - \sqrt{x} = 10$ isoleren
$2x - 10 = \sqrt{x}$
kwadrateren geeft
$(2x - 10)^2 = x$
$4x^2 - 40x + 100 = x$
$4x^2 - 41x + 100 = 0$
$D = (-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100 = 81$
$x = \dfrac{41 - 9}{8} = 4 \vee x = \dfrac{41 + 9}{8} = 6\frac{1}{4}$
$x = 4$ geeft $2 \cdot 4 - \sqrt{4} = 10$ voldoet niet
$x = 6\frac{1}{4}$ geeft $2 \cdot 6\frac{1}{4} - \sqrt{6\frac{1}{4}} = 10$ voldoet

52 Los algebraïsch op.
a $x = \sqrt{5x + 14}$
b $3x = \sqrt{8x + 20}$
c $5\sqrt{x} = x$
d $3x = \sqrt{18x + 72}$

53 Los algebraïsch op.
a $4 - 3\sqrt{x} = 2$
b $5\sqrt{x} - 2x = 0$
c $2x - 5\sqrt{x} = 3$
d $5 - 2\sqrt{x} = 3$

A 54 Los algebraïsch op.

a $2x + \sqrt{x} = 10$

b $\sqrt{x + 12} = x$

c $2x + \sqrt{x} = 6$

d $10 - x\sqrt{x} = 2$

O 55 Gegeven is de vergelijking $(x\sqrt{x})^2 + x\sqrt{x} - 6 = 0$.
Stel $x\sqrt{x} = u$.

a Welke vergelijking krijg je? Los deze vergelijking op.

b Eén van de oplossingen van de vergelijking van vraag a geeft geen oplossing voor x.
Licht dit toe.

3

Theorie D Substitutie bij wortelvergelijkingen

De oplossing $u = -3$ in opgave 55 geeft $x\sqrt{x} = -3$ en hierbij hoort geen waarde van x.
De oplossing $u = 2$ geeft $x\sqrt{x} = 2$.
Kwadrateren geeft $x^3 = 4$, dus $x = \sqrt[3]{4}$.
Omdat de vergelijking $x\sqrt{x} = 2$ is gekwadrateerd, moet je controleren of $x = \sqrt[3]{4}$ voldoet aan $x\sqrt{x} = 2$.
Hieronder zie je hoe je $\sqrt[3]{4}$ op de GR benadert en dat $x = \sqrt[3]{4}$ voldoet.

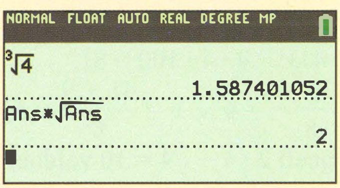
Hogeremachtswortels op de GR

Hoe benader je $\sqrt[3]{4}$?

TI

Gebruik optie 5 van het MATH-MATH-menu.

3 MATH 5 4 ENTER

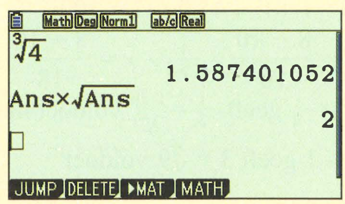


Op de TI kun je een derdemachtswortel ook benaderen met optie 4 van het MATH-MATH menu.

Casio

Gebruik de toets $\sqrt[3]{}$.

3 SHIFT ^ 4 EXE



Voorbeeld

Bereken exact de oplossing van $x^5 - x^2 \cdot \sqrt{x} = 2$.

Uitwerking

$x^5 - x^2 \cdot \sqrt{x} = 2$

$x^5 - x^2 \cdot \sqrt{x} - 2 = 0$

Stel $x^2 \cdot \sqrt{x} = u$.

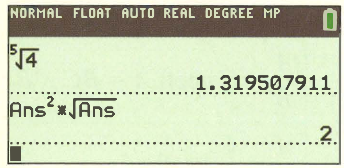
$u^2 - u - 2 = 0$
$(u + 1)(u - 2) = 0$
$u = -1 \vee u = 2$

$x^2 \cdot \sqrt{x} = -1 \vee x^2 \cdot \sqrt{x} = 2$

$x^2 \cdot \sqrt{x} = -1$ heeft geen oplossing

$x^2 \cdot \sqrt{x} = 2$ kwadrateren geeft $x^5 = 4$
$x = \sqrt[5]{4}$

$x = \sqrt[5]{4}$ geeft $(\sqrt[5]{4})^2 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{4}} = 2$ voldoet



R 56 Zie het voorbeeld.
De gevonden waarde van x is gecontroleerd door $x = \sqrt[5]{4}$ in te vullen in de vergelijking $x^2 \cdot \sqrt{x} = 2$ en niet in de oorspronkelijke vergelijking $x^5 - x^2 \cdot \sqrt{x} = 2$.
Waarom is dit toegestaan?

57 Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 - 9x\sqrt{x} + 8 = 0$

b $x^3 + 27 = 28x\sqrt{x}$

c $8x^3 + 8 = 65x\sqrt{x}$

d $x^5 - 33x^2 \cdot \sqrt{x} + 32 = 0$

A 58 Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 + 30 = 11x\sqrt{x}$

b $x^3 + 125 = 126x\sqrt{x}$

c $x^5 + 10 = 7x^2 \cdot \sqrt{x}$

d $32x^5 + 32 = 1025x^2 \cdot \sqrt{x}$

R 59 Gegeven is de vergelijking $x - \sqrt{x} = 12$.
Deze vergelijking is algebraïsch op te lossen met
- isoleren, kwadrateren, controleren
- de substitutie $\sqrt{x} = u$.

Welke manier heeft je voorkeur?

Terugblik

Vergelijkingen van de vorm $AB = 0$, $A^2 = B^2$ en $AB = AC$

regel	voorbeeld	eerste stap
$AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$	$(x^2 - 2x)(x^2 - 12) = 0$	$x^2 - 2x = 0 \vee x^2 - 12 = 0$
$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$	$(x^2 - 2x)^2 = (x^2 - 12)^2$	$x^2 - 2x = x^2 - 12 \vee x^2 - 2x = -x^2 + 12$
$AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$	$x^2(x^2 - 2x) = x^2 - 2x$	$x^2 - 2x = 0 \vee x^2 = 1$

Gebroken vergelijkingen

regel	voorbeeld	eerste stap	voorwaarde
$\frac{A}{B} = 0$ geeft $A = 0 \wedge B \neq 0$	$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$	$x^2 - 2x = 0$	$x^2 \neq 4$
$\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC \wedge B \neq 0$	$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 2$	$x^2 - 2x = 2x^2 - 8$	$x^2 \neq 4$
$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $AD = BC \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$	$\frac{2x}{x - 2} = \frac{x}{x - 4}$	$2x(x - 4) = x(x - 2)$	$x \neq 2 \wedge x \neq 4$
$\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ geeft $(A = 0 \vee B = C) \wedge B \neq 0 \wedge C \neq 0$	$\frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$	$x^2 - 4 = 0 \vee 2x = x + 1$	$x \neq 0 \wedge x \neq -1$
$\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ geeft $A = C \wedge B \neq 0$	$\frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$	$2x = x + 1$	$x^2 \neq 4$

Wortelvergelijkingen

De drie stappen voor het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen zijn isoleren, kwadrateren en controleren.
De vergelijking $x = \sqrt{2x + 3}$ los je als volgt op.
$x = \sqrt{2x + 3}$ kwadrateren geeft
$x^2 = 2x + 3$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 1)(x - 3) = 0$
$x = -1 \vee x = 3$
$x = -1$ geeft $-1 = \sqrt{1}$ voldoet niet en $x = 3$ geeft $3 = \sqrt{9}$ voldoet.
Dus de oplossing is $x = 3$.

Wortelvergelijkingen zoals $8x^3 + 1 = 9x\sqrt{x}$

$8x^3 + 1 = 9x\sqrt{x}$
Stel $x\sqrt{x} = u$. Je krijgt $8u^2 + 1 = 9u$ en dit geeft $u = \frac{1}{8} \vee u = 1$.
$x\sqrt{x} = \frac{1}{8}$ geeft $x = \frac{1}{4}$ voldoet en $x\sqrt{x} = 1$ geeft $x = 1$ voldoet.
Dus de oplossingen zijn $x = \frac{1}{4}$ en $x = 1$.

3.4 Herleidingen

O 60 Werk de haakjes weg.

a $(3x - 2)^2$ **b** $(4x + 3)(4x - 3)$ **c** $(x + 2)^3$

Theorie A Herleiden en merkwaardige producten

Bij het herleiden van $(5x + 2)^2$ gebruik je het merkwaardige product $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
Dus $(5x + 2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$.

Door het merkwaardige product $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ te gebruiken, is $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ te herleiden.

Je krijgt $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = x^2 - 1$.

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

In $A^2 + 2AB + B^2$ heet $2AB$ het dubbele product van A en B.

Bij $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ moet gelden $x^2 - 1 \neq 0$, ofwel $x^2 \neq 1$, dus $x \neq 1 \wedge x \neq -1$.
Je krijgt $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1$ mits $x \neq 1 \wedge x \neq -1$.
Bij het herleiden van breuken moet je dus nagaan of er voorwaarden gelden.

Voorbeeld

a Werk bij $(x^2 - 2)^3$ de haakjes weg.

b Herleid $\dfrac{x^5 - 9x}{x^2 - 3}$.

Uitwerking

a $(x^2 - 2)^3 = (x^2 - 2)(x^2 - 2)^2 = (x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 4)$
$= x^6 - 4x^4 + 4x^2 - 2x^4 + 8x^2 - 8 = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$

b $\dfrac{x^5 - 9x}{x^2 - 3} = \dfrac{x(x^4 - 9)}{x^2 - 3} = \dfrac{x(x^2 + 3)(x^2 - 3)}{x^2 - 3} = x(x^2 + 3)$ mits $x \neq \sqrt{3} \wedge x \neq -\sqrt{3}$

61 Werk de haakjes weg.

a $(2x - 1)^3$ **b** $(2x^2 + 1)^3$ **c** $((x^2 - 1)(x^2 + 1))^2$

62 Herleid.

a $\dfrac{2x^5 - 32x}{x^2 - 4}$ **b** $\dfrac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^4 - 4}$ **c** $\dfrac{x^4 - 9x^2}{x^2 - 3x}$

D 63 De lijn k snijdt de parabool $y = x^2$ in de punten P en Q met $x_P = p$, $x_Q = q$ en $p < q$.
Stel de formule op van k.

O 64 **a** Herleid $2x - \dfrac{1}{x}$ tot één breuk en herleid $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{x+2}$ tot één breuk.

b Licht toe dat $(x + 1) \cdot \dfrac{x+2}{x+3}$ te herleiden is tot $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 3}$.

c Licht toe dat $\dfrac{x}{\left(\dfrac{2}{x}\right)}$ te herleiden is tot $\frac{1}{2}x^2$. Voor welke waarde van x is deze herleiding niet juist?

Theorie B Breuken herleiden

Bij het herleiden van breuken gebruik je de volgende regels.

Optellen	Vermenigvuldigen	Delen
$\dfrac{A}{B} + C = \dfrac{A + BC}{B}$	$A \cdot \dfrac{B}{C} = \dfrac{AB}{C}$	$\dfrac{A}{\left(\dfrac{B}{C}\right)} = A \cdot \dfrac{C}{B} = \dfrac{AC}{B}$ mits $C \neq 0$
$\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD + BC}{BD}$	$\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$	$\dfrac{\left(\dfrac{A}{B}\right)}{C} = \dfrac{A}{BC}$

Voorbeeld

Herleid.

a $y = x - \dfrac{2x - 1}{x - 1}$ **b** $y = \dfrac{20}{x - 1}\left(4 - \dfrac{2}{x - 1}\right)$ **c** $y = \dfrac{4x}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}$

Uitwerking

a $y = x - \dfrac{2x - 1}{x - 1} = \dfrac{x(x - 1)}{x - 1} - \dfrac{2x - 1}{x - 1} = \dfrac{x^2 - x - 2x + 1}{x - 1} = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

b $y = \dfrac{20}{x - 1}\left(4 - \dfrac{2}{x - 1}\right) = \dfrac{80}{x - 1} - \dfrac{40}{(x - 1)^2} = \dfrac{80(x - 1)}{(x - 1)^2} - \dfrac{40}{(x - 1)^2}$

$= \dfrac{80x - 80 - 40}{(x - 1)^2} = \dfrac{80x - 120}{(x - 1)^2}$

c $y = \dfrac{4x}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} = 4x \cdot \dfrac{x - 1}{x + 1} = \dfrac{4x(x - 1)}{x + 1}$ mits $x \neq 1$

R 65 **a** Zie voorbeeld b.

Herleid $y = \frac{20}{x-1}\left(4 - \frac{2}{x-1}\right)$ tot $y = \frac{80x - 120}{(x-1)^2}$ door eerst $4 - \frac{2}{x-1}$ als één breuk te schrijven.

b Zie voorbeeld c.

Ga na dat $y = \frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$ niet bestaat voor $x = 1$ en dat $y = \frac{4x(x-1)}{x+1}$ wel bestaat voor $x = 1$.

66 Herleid.

a $y = \frac{20}{x} - \frac{5}{2x}$

b $y = \frac{10}{x-1} - x^2$

c $y = \frac{2x^2}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$

d $y = \frac{x}{x-1}\left(x + \frac{1}{x-1}\right)$

e $y = \frac{5}{x-2} \cdot \frac{6}{x+2}$

f $y = \frac{\left(\frac{x+1}{2x}\right)}{x-1}$

A 67 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{4x}{x+1}$ en $g(x) = \frac{4}{x-1}$.

Bereken exact de oplossingen.

a $f(x) = g(x)$

b $f(x) \cdot g(x) = 6$

c $f(x) - g(x) = 7$

d $f'(x) + 2 \cdot g'(x) = 0$

O 68 Gegeven is de formule $y = \frac{2x + \frac{1}{3}}{x+1}$.

Licht toe dat de formule te schrijven is als $y = \frac{6x+1}{3x+3}$.

Theorie C Breuken wegwerken in breuken

In de formule $y = \frac{3 - \frac{2}{x}}{x+4}$ staat de breuk $\frac{2}{x}$ in de teller.

Om deze breuk weg te werken vermenigvuldig je de teller en de noemer van $\frac{3 - \frac{2}{x}}{x+4}$ met x.

Dus $y = \frac{3 - \frac{2}{x}}{x+4} = \frac{\left(3 - \frac{2}{x}\right) \cdot x}{(x+4) \cdot x} = \frac{3x - 2}{x(x+4)}$.

Voorbeeld

Herleid $N = \dfrac{500a}{4b + \dfrac{a^2}{3b}}$

Uitwerking

$$N = \frac{500a}{4b + \dfrac{a^2}{3b}} = \frac{500a \cdot 3b}{\left(4b + \dfrac{a^2}{3b}\right) \cdot 3b} = \frac{1500ab}{12b^2 + a^2} = \frac{1500ab}{a^2 + 12b^2} \text{ mits } b \neq 0$$

3

69 Herleid.

a $y = \dfrac{x + \dfrac{3}{x+1}}{x}$ **b** $y = \dfrac{10 + \dfrac{5}{x-1}}{6 - \dfrac{3}{x-1}}$ **c** $y = \dfrac{10x}{p + \dfrac{x^2}{2p}}$

A 70 **a** Herleid $N = \dfrac{600a}{3b - \dfrac{a^2}{4b}}$.

b Werk bij $A = 25x + 20 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{50}{x^2+1}\right)}{x}$ de breuk in de teller weg.

c Toon aan dat de formule $K = \left(50 + \dfrac{150}{\dfrac{p}{q} + 5}\right) \cdot p$ te herleiden is tot $K = \dfrac{50p^2 + 400pq}{p + 5q}$.

A 71 Gegeven zijn de formules $N = \dfrac{4p-1}{2p+3}$ en $p = \dfrac{3x}{x+5}$.

a Substitueer $p = \dfrac{3x}{x+5}$ in $N = \dfrac{4p-1}{2p+3}$ en herleid tot de vorm $N = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

b Bereken algebraïsch voor welke x geldt dat $N = 9$.

72 Deel uit.

a $A = \dfrac{5x^2 + 1000}{x}$ **c** $F = \dfrac{5a^2 + 8a}{2a^2}$

b $K = \dfrac{6t^2 + 12t + 1500}{3t}$ **d** $N = \dfrac{6p^2 - 3p - 1}{2p}$

Uitdelen

$N = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x}$ geeft

$N = x + 5 - \dfrac{6}{x}$

A 73 Rob is met vakantie in de Provence. Op een dag beklimt hij op zijn racefiets vanaf de camping de Mont Ventoux. Nadat Rob op de top is aangekomen rust hij even uit, reset zijn fietscomputer en rijdt zo snel mogelijk weer naar beneden. De beklimming doet Rob met een gemiddelde snelheid van 12 km/uur en bij de afdaling was zijn gemiddelde snelheid 48 km/uur.
Rob vraagt zich af wat de gemiddelde snelheid $\overline{v}$ gedurende de heen- en terugreis samen is.
Stel de afstand van de camping tot de top is d km. De tijd t in uren voor de heen- en terugreis samen is dan $t = \frac{d}{12} + \frac{d}{48}$.

$$\text{snelheid} = \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}$$

$$\text{tijd} = \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}}$$

a Licht dit toe.

b De gemiddelde snelheid is $\overline{v} = \dfrac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}}$.

Licht dit toe en bereken de gemiddelde snelheid van Rob in km/uur.

Bij de gemiddelde snelheid heb je te maken met het **harmonisch gemiddelde**.

Het harmonisch gemiddelde h van de getallen a en b is $h = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

c Herleid de formule van h zo, dat de breuken in de noemer verdwijnen.

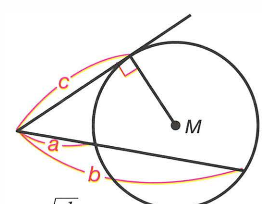
Het harmonisch gemiddelde van de getallen a, b en c is $h = \dfrac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

d Het harmonisch gemiddelde van a, $2a$ en $3a$ is pa.
Bereken de exacte waarde van p.

Informatief Gemiddelden

Het *harmonisch gemiddelde* h van de getallen a en b is het omgekeerde van het rekenkundig gemiddelde van $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{b}$, dus $h = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$. Dit is te herleiden tot $h = \dfrac{2ab}{a + b}$.

Het harmonisch gemiddelde komt ook tevoorschijn bij het vervangen van verschillende parallel geschakelde weerstanden in een stroomkring door één weerstand.
Het *kwadratisch gemiddelde* van een serie getallen is de wortel uit het rekenkundig gemiddelde van de kwadraten van de getallen.
In de statistiek komt het kwadratisch gemiddelde tevoorschijn bij de standaardafwijking en in de elektrotechniek bij het effectieve vermogen.
Het *meetkundig gemiddelde* van n getallen is de n-de machtswortel van het product van de getallen.
In de meetkunde komt het meetkundig gemiddelde van twee getallen tevoorschijn bij de lengte van een raaklijnstuk aan een cirkel.



$c = \sqrt{ab}$

O 74 Gegeven is de formule $y = \frac{2}{x}$.

Toon aan dat de formule $x = \frac{2}{y}$ op hetzelfde neerkomt.

3

Theorie D Variabelen vrijmaken bij gebroken formules

Bij de formule $y = \frac{2}{x-3}$ kun je de variabele x vrijmaken zodat x is uitgedrukt in y, ofwel x als functie van y is geschreven. Dit gaat als volgt.

$y = \frac{2}{x-3}$ Vermenigvuldig beide leden met $x - 3$.
$y(x-3) = 2$
$xy - 3y = 2$ Alleen termen met x blijven links.
$xy = 3y + 2$ Deel door y.
$x = \frac{3y+2}{y}$

Voorbeeld

Maak L vrij bij de formule $K = \frac{L}{L-3}$.

Uitwerking

$K = \frac{L}{L-3}$
$K(L-3) = L$
$KL - 3K = L$
$KL - L = 3K$
$L(K-1) = 3K$
$L = \frac{3K}{K-1}$

Afspraak
Bij het vrijmaken van variabelen in deze paragraaf hoef je de voorwaarde(n) er niet bij te vermelden.

75 **a** Gegeven is de formule $A = \frac{B}{B+2}$.
Druk B uit in A.

b Gegeven is de formule $P = \frac{Q-5}{Q}$.
Schrijf Q als functie van P.

c Maak F vrij bij de formule $R = \frac{F-2}{F-1}$.

d Gegeven is de formule $L = 320 - \frac{18}{q-1}$.
Druk q uit in L.

Druk B uit in A.
Maak B vrij.
Schrijf B als functie van A.

Allemaal hetzelfde.

Informatief Voorwaarden bij het vrijmaken van variabelen

Bij de formule $y = \dfrac{2}{x-3}$ mag je niet $x = 3$ nemen.

Maak je x vrij, dan krijg je de formule $x = \dfrac{3y+2}{y}$. Hierin mag x dus niet 3 zijn.

Omdat $x = 3$ zou geven $\dfrac{3y+2}{y} = 3$, dus $3y + 2 = 3y$ is dit geen probleem, want er bestaat geen waarde van y zo, dat $x = 3$.

Bij de formule $x = \dfrac{3y+2}{y}$ mag y niet nul zijn. Ook dit levert geen probleem op. Ga dit na.

Bij het herleiden van $\dfrac{1}{x} = 3 + \dfrac{1}{y}$ tot $x = \dfrac{y}{3y+1}$ krijg je echter wel problemen. In de formule $\dfrac{1}{x} = 3 + \dfrac{1}{y}$ mogen x en y beide niet nul zijn.

In de formule $x = \dfrac{y}{3y+1}$ mogen x en y wel nul zijn.

Je zou dus als resultaat van de herleiding moeten noteren $x = \dfrac{y}{3y+1}$ mits $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

We spreken echter af dat we in deze paragraaf deze voorwaarden niet noteren.

76 Gegeven is $\dfrac{1}{a} = 2 + \dfrac{1}{b}$.

a Toon aan dat $\dfrac{1}{a} = \dfrac{2b+1}{b}$ en licht toe dat hieruit volgt $a = \dfrac{b}{2b+1}$.

b Herleid $\dfrac{1}{a} = 2 + \dfrac{1}{b}$ tot $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1-2a}{a}$ en druk b uit in a.

77 **a** Gegeven is $\dfrac{1}{p} = 5 - \dfrac{2}{q}$.
Druk p uit in q en druk q uit in p.

b Gegeven is $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{n}$.
Schrijf m als functie van n en schrijf n als functie van m.

A 78 **a** Gegeven is $\frac{t-2}{t-3} \cdot P = \frac{t}{t-1}$.
Maak P vrij.

b Gegeven is $\frac{3x}{x+y} = 5 - y$.
Schrijf x als functie van y.

c Gegeven is de formule $K = 90 - \frac{2N}{N + 0{,}2}$.
Maak N vrij.

3

A 79 **a** Gegeven is de formule $F = \frac{1}{K} + \frac{1}{2K}$.
Druk K uit in F.

b Gegeven is $\frac{1}{T} = 10 - \frac{2}{S}$.
Druk T uit in S.

c Herleid $\frac{1}{N} + 3 = \frac{2R+2}{5R+2}$ tot de vorm $N = \frac{aR+b}{cR+d}$.

Terugblik

Herleiden

Bij herleiden kun je gebruikmaken van de merkwaardige producten.

Zo is $\dfrac{x^8 - 1}{x^2 - 1}$ als volgt te herleiden.

$$\frac{x^8 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^4 + 1)(x^4 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

$$= (x^4 + 1)(x^2 + 1) \text{ mits } x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Breuken herleiden

- Om breuken op te tellen maak je ze gelijknamig.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} = \frac{2(x + 1)}{x(x + 1)} + \frac{3x}{x(x + 1)} = \frac{2x + 2 + 3x}{x(x + 1)} = \frac{5x + 2}{x(x + 1)}$$

$$2 + \frac{3}{x + 1} = \frac{2(x + 1)}{x + 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{2x + 2 + 3}{x + 1} = \frac{2x + 5}{x + 1}$$

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$
$$\frac{A}{B} + C = \frac{A + BC}{B}$$

- Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$ en $A \cdot \dfrac{B}{C} = \dfrac{AB}{C}$.

$$\frac{2}{x} \cdot \frac{3}{x + 1} = \frac{6}{x(x + 1)},\ 2 \cdot \frac{3}{x + 1} = \frac{6}{x + 1} \text{ en } 2x \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{2x}{x + 1}$$

- Bij delingen met breuken gebruik je de regels hiernaast.

$$\frac{x - 2}{\left(\dfrac{x}{x + 1}\right)} = (x - 2) \cdot \frac{x + 1}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} \text{ mits } x \neq -1$$

$$\frac{A}{\left(\dfrac{B}{C}\right)} = \frac{AC}{B} \text{ mits } C \neq 0$$
$$\frac{\left(\dfrac{A}{B}\right)}{C} = \frac{A}{BC}$$

- Uitdelen van $\dfrac{x^2 - x - 2}{x}$ geeft

$$\frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} - \frac{2}{x} = x - 1 - \frac{2}{x}.$$

Variabelen vrijmaken bij gebroken formules

- Bij de formule $F = \dfrac{3G + 4}{2G - 1}$ maak je G als volgt vrij.
  - werk de breuk weg $\quad F(2G - 1) = 3G + 4$
  - werk de haakjes weg $\quad 2FG - F = 3G + 4$
  - alle termen met G naar links $\quad 2FG - 3G = F + 4$
  - haal G buiten haakjes $\quad G(2F - 3) = F + 4$
  - deel door $2F - 3$ $\quad G = \dfrac{F + 4}{2F - 3}$

G is uitgedrukt in F.
G is als functie van F geschreven.

3

Diagnostische toets

3.1 Hogeregraadsvergelijkingen

1 Bereken exact de oplossingen.

a $3x^3 + 5 = 86$
b $5x^4 - 6 = 9$
c $2x^3 + 19 = 5$
d $\frac{1}{2}(x + 2)^4 = \frac{1}{32}$
e $100 - (2x + 1)^5 = 68$
f $(2x + 4)^3 = 10$

2 Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 = x^2 + 20x$
b $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
c $x^4 - 6x^3 + 5x^2 = 0$
d $x^8 + x^4 = 42$

3 Bereken exact de oplossingen.

a $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$
b $3x^6 + 3 = 10x^3$

4 Bereken exact de oplossingen.

a $2x^2 + 3x > x^3$
b $\frac{2}{3}x^2 + 1 > \frac{1}{3}x^4 - 4$

5 Bereken exact de oplossingen.

a $|x^2 - 4| = 21$
b $|4x^3 - 5| = 19$

3.2 Stelsels vergelijkingen

6 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ -2x + 3y = 25 \end{cases}$
b $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$

7 Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van de lijnen k: $2x - 5y = 1$ en l: $6x + 15y = 39$.

8 De parabool $y = ax^2 + bx$ gaat door de punten $(2, 18)$ en $(-4, 0)$. Stel de formule op van de parabool.

9 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ y = x^2 - 4x + 6 \end{cases}$
b $\begin{cases} x^2 + (y - 4)^2 = 13 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

3.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

10 Los exact op.

a $(x^2 - 6)(x^2 - 2x) = 0$
b $(2x^2 - 1)^2 = (6x + 1)^2$
c $x(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1)$
d $(x^3 - 9x)(x^2 - 3) + 9x = x^3$

11 Bereken exact de oplossingen.

a $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x + 4} = 0$

b $\dfrac{x^2 - 4}{2x + 1} = \dfrac{x^2 - 4}{x - 4}$

c $\dfrac{2x - 1}{x + 1} = \dfrac{4x + 1}{5x - 1}$

d $\dfrac{2x^2 - 4}{x + 5} = 1\frac{3}{4}$

12 Bereken exact de oplossingen.

a $\sqrt{3x + 5} + 1 = 5$

b $3x = 5\sqrt{x + 4}$

c $x = \sqrt{x} + 6$

d $2x + 3\sqrt{x} = 2$

13 Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 - 189 = 20x\sqrt{x}$

b $x^5 + 12 = 8x^2 \cdot \sqrt{x}$

3.4 Herleidingen

14 a Werk bij $(2x + 3)^3$ de haakjes weg.

b Herleid $\dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$.

15 Herleid.

a $y = 2x - \dfrac{x - 1}{x - 2}$

b $y = \dfrac{3}{x}\left(2 - \dfrac{x}{x - 1}\right)$

16 Herleid.

a $y = \dfrac{2x + \dfrac{x}{x - 1}}{x + 1}$

b $y = \dfrac{\dfrac{2}{x + 1} - 3}{4 - \dfrac{x}{x + 1}}$

17 Deel uit.

a $N = \dfrac{4x^2 - 50}{2x}$

b $B = \dfrac{6p^2 - 3p + 4}{3p}$

18 a Gegeven is de formule $V = \dfrac{3P - 2}{2P - 3}$.

Druk P uit in V.

b Gegeven is de formule $R = 40 - \dfrac{8}{a - 1}$.

Maak a vrij.

c Gegeven is de formule $\dfrac{3}{p} + \dfrac{4}{q} = 6$.

Schrijf p als functie van q.

Bij geocaching wordt ergens een *cache* (een kleine waterdichte doos) verstopt. Via internet wordt de locatie van deze *cache* bekendgemaakt. Met behulp van een GPS-ontvanger of een mobiele telefoon kan men hiernaar op zoek gaan. Is eenmaal de *cache* gevonden dan kan men een logboek invullen en de aanwezige 'schat' inruilen voor iets anders voor de volgende vinder.

Wat leer je?

- Rekenen met goniometrische verhoudingen en gelijkvormige driehoeken.
- Bewijzen en gebruiken van enkele stellingen over cirkels en raaklijnen aan cirkels.
- Berekeningen maken met de sinusregel en de cosinusregel.
- Lengten en oppervlakten berekenen.
- Vergelijkingen gebruiken bij meetkundige figuren.

Meetkunde

4

Voorkennis Rekenen met wortels

Theorie A Rekenregels voor wortels

Voor het vermenigvuldigen en delen van wortels gelden de regels

$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$ **mits** $A \geq 0 \wedge B \geq 0$

$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$ **mits** $A \geq 0 \wedge B > 0$

Dus $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$ en $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{11}$.

4

$\frac{4}{\sqrt{5}}$ is te herleiden tot een vorm zonder wortelteken in de noemer.
Dit gaat door teller en noemer met $\sqrt{5}$ te vermenigvuldigen.

$$\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \tfrac{4}{5}\sqrt{5}$$

Voorbeeld

Herleid.

a $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3}$ **b** $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ **c** $\sqrt{12\tfrac{1}{2}}$ **d** $\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\right)^2$

Uitwerking

a $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 15\sqrt{6}$ — $3 \cdot 5 = 15$ en $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

b $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6} = \tfrac{5}{6}\sqrt{3}$ — $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 = 6$

c $\sqrt{12\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 = \tfrac{1}{9} \cdot 6 = \tfrac{2}{3}$

1 Herleid.

a $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5}$

b $\frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

c $3a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{7}$

d $\frac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{7}}$

e $\tfrac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}$

f $\frac{6}{5\sqrt{2}}$

2 Herleid.

a $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

c $\sqrt{4\tfrac{1}{2}}$

d $\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2$

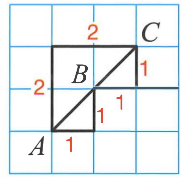
e $\left(\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2$

f $\left(\tfrac{2}{3}a\sqrt{3}\right)^2$

Theorie B Factor voor het wortelteken brengen

Let erop dat $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ niet te herleiden is.
Omdat $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ is $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ wel te herleiden.
Je krijgt $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
Bij de herleiding van $\sqrt{8}$ tot $2\sqrt{2}$ is een factor voor het wortelteken gebracht.
Dit lukt omdat 8 het product is van een kwadraat en een geheel getal.
Bij $\sqrt{12}$ krijg je $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Door factoren voor het wortelteken te brengen en door wortels uit de noemer van een breuk weg te werken, kun je soms termen die ogenschijnlijk niet gelijksoortig zijn toch samennemen.



$AB^2 = 1^2 + 1^2$, dus $AB = \sqrt{2}$
$\left.\begin{array}{l} AC = 2 \cdot AB = 2\sqrt{2} \\ AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \text{ dus } AC = \sqrt{8} \end{array}\right\}$
Dus $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Voorbeeld

Herleid.

a $\sqrt{8} + \sqrt{32}$ **b** $\sqrt{45} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **c** $a\sqrt{6} \cdot 2a\sqrt{2}$ **d** $\sqrt{20a} - \sqrt{\frac{5}{9}a}$

Uitwerking

a $\sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b $\sqrt{45} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{9 \cdot 5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} - \dfrac{\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{5} = 2\frac{4}{5}\sqrt{5}$

c $a\sqrt{6} \cdot 2a\sqrt{2} = 2a^2\sqrt{12} = 2a^2 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = 2a^2 \cdot 2\sqrt{3} = 4a^2\sqrt{3}$

d $\sqrt{20a} - \sqrt{\frac{5}{9}a} = \sqrt{4 \cdot 5a} - \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 5a} = 2\sqrt{5a} - \frac{1}{3}\sqrt{5a} = 1\frac{2}{3}\sqrt{5a}$

3 Herleid.

a $\sqrt{24} + \sqrt{6}$ **c** $\sqrt{18a} - \sqrt{8a}$ **e** $\dfrac{9}{4\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

b $\sqrt{80} - \dfrac{10}{\sqrt{5}}$ **d** $\sqrt{12a} + \sqrt{\frac{3}{4}a}$ **f** $\frac{1}{3}\sqrt{48} - \sqrt{\frac{1}{3}}$

4 Herleid.

a $\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{24\frac{1}{2}}$ **c** $\sqrt{2a} + \sqrt{\frac{1}{2}a}$ **e** $\left(\frac{1}{4}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2$

b $a\sqrt{8} - a\sqrt{2}$ **d** $\left(\frac{2}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + a^2\sqrt{7\frac{1}{9}}$ **f** $\dfrac{5a}{3\sqrt{2}} - \dfrac{3a}{2\sqrt{2}}$

Theorie C Wortels en merkwaardige producten

Bij het herleiden van $(\sqrt{10}+\sqrt{3})^2$ gebruik je een merkwaardig product. Je krijgt

$(\sqrt{10}+\sqrt{3})^2 = 10 + 2\sqrt{30} + 3 = 13 + 2\sqrt{30}$.

Het dubbele product van $\sqrt{10}$ en $\sqrt{3}$ is $2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{30}$.

De merkwaardige producten

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

Voorbeeld

Herleid.

a $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ **b** $(3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1)$ **c** $(a-\sqrt{2})^2$

Uitwerking

a $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{6} + 3 = 11 - 4\sqrt{6}$ $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot 2 = 8$ en $2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{6}$

b $(3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1) = 18 - 1 = 17$ $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot 2 = 18$

c $(a-\sqrt{2})^2 = a^2 - 2a\sqrt{2} + 2$

5 Herleid.

a $(3\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$ **c** $(5\sqrt{3}+2)(5\sqrt{3}-2)$ **e** $(a-a\sqrt{2})^2$

b $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$ **d** $(a-\sqrt{3})^2$ **f** $(4-\frac{1}{2}a\sqrt{2})^2$

6 Herleid.

a $(2a\sqrt{2}-a\sqrt{3})^2$ **c** $(2-\sqrt{2})^2$ **e** $(3\sqrt{2}+5)(3\sqrt{2}-5)$

b $(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3})^2$ **d** $(1\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2$ **f** $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$

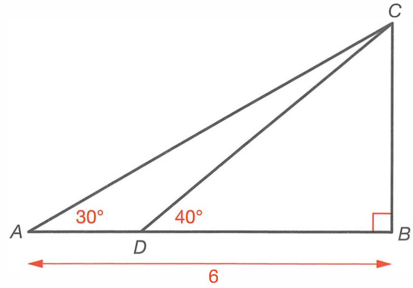
7 Van driehoek ABC is $\angle A = 90°$, $AB = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ en $AC = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.
Bereken BC exact.

4.1 Goniometrische verhoudingen en gelijkvormigheid

O1 In de rechthoekige driehoek ABC in figuur 4.1 is $AB = 6$ en $\angle BAC = 30°$.
Op AB ligt het punt D zo, dat $\angle BDC = 40°$.
We vragen ons af wat de lengte van BD is.

a Licht toe dat $\tan(30°) = \dfrac{BC}{6}$ en bereken BC in drie decimalen nauwkeurig.

b Gebruik $\tan(\angle BDC)$ om BD in twee decimalen nauwkeurig te berekenen.



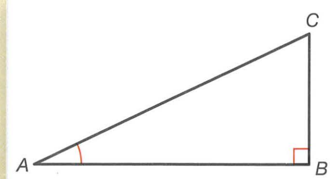
figuur 4.1

Theorie A Goniometrische berekeningen

Met de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens zijn hoeken en lijnstukken te berekenen.
Bij de berekeningen met de GR gebruik je tussenresultaten om verder mee te rekenen.
Rond tussenresultaten niet af, maar gebruik Ans en geheugenplaatsen van de GR.

[▶ GR] Neem uit de handleiding GR de module **Het gebruik van Ans en lettergeheugens** door.

Afspraak
Bereken hoeken in één decimaal nauwkeurig.



$$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$$

Bij het berekenen van lijnstukken met behulp van goniometrische verhoudingen gebruiken we de regels

$a = \dfrac{b}{c}$ geeft $b = ac$ en

$a = \dfrac{b}{c}$ geeft $c = \dfrac{b}{a}$.

Dus $\sin(40°) = \dfrac{AB}{6}$ geeft $AB = 6 \cdot \sin(40°)$ en

$\cos(35°) = \dfrac{5}{BC}$ geeft $BC = \dfrac{5}{\cos(35°)}$.

$a = \dfrac{b}{c}$ Vermenigvuldig beide leden met c.

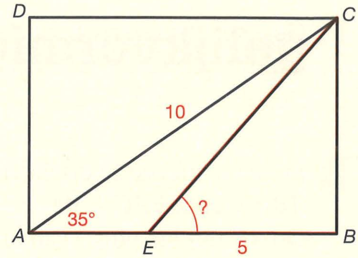
$ac = b$ Deel beide leden door a.

$c = \dfrac{b}{a}$

Voorbeeld

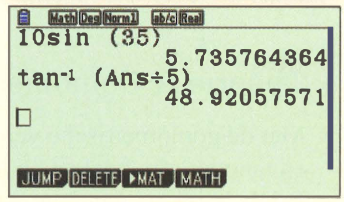
Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met diagonaal $AC = 10$ en $\angle BAC = 35°$.
Punt E ligt op AB zo, dat $BE = 5$.

a Bereken $\angle BEC$.
b Bereken $\angle ACE$.



figuur 4.2

$\angle BEC$ is de hoek die je krijgt door van B via E naar C te gaan.



Uitwerking

a In $\triangle ABC$ is $\sin(35°) = \dfrac{BC}{10}$

$BC = 10 \sin(35°) = 5{,}73...$

In $\triangle BEC$ is $\tan(\angle BEC) = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{5{,}73...}{5}$

$\angle BEC \approx 48{,}9°$

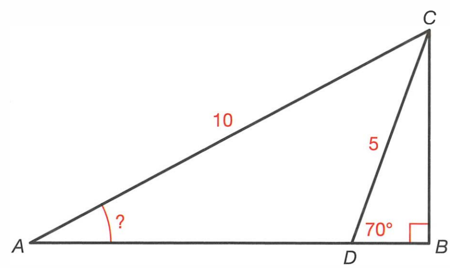
b $\angle AEC = 180° - \angle BEC \approx 180° - 48{,}9° = 131{,}1°$

In $\triangle AEC$ is

$\angle ACE = 180° - \angle EAC - \angle AEC \approx 180° - 35° - 131{,}1°$
$= 13{,}9°$.

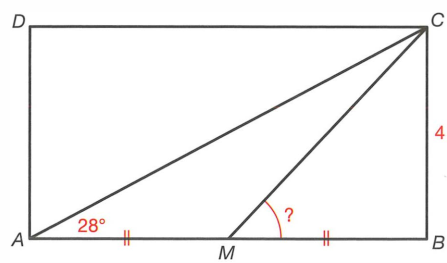
2 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur 4.3.
$AC = 10$ en het punt D ligt op AB.
$CD = 5$ en $\angle BDC = 70°$.

a Bereken $\angle BAC$.
b Bereken $\angle ACD$.



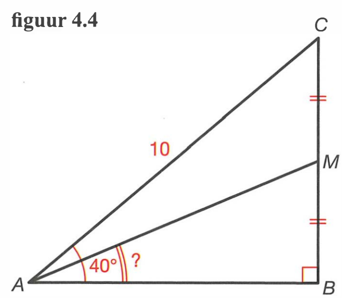
figuur 4.3

3 Gegeven is de rechthoek $ABCD$ in figuur 4.4.
$BC = 4$, $\angle BAC = 28°$ en M is het midden van AB.
Bereken $\angle BMC$.



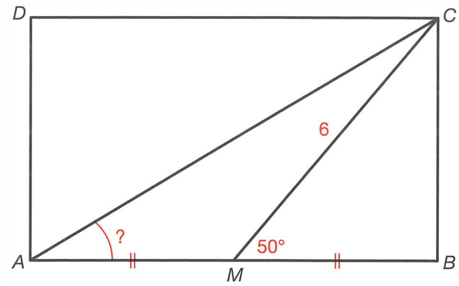
figuur 4.4

4 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur 4.5.
$AC = 10$, $\angle BAC = 40°$ en M is het midden van BC.
Bereken $\angle BAM$.



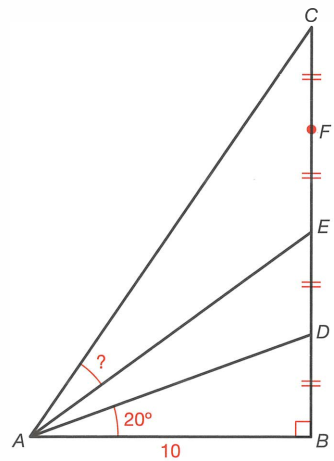
figuur 4.5

5 Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met M het midden van AB, $CM = 6$ en $\angle BMC = 50°$. Bereken $\angle BAC$ en $\angle ACM$.



figuur 4.6

A 6 Gegeven is driehoek ABC met $AB = 10$ en $\angle B = 90°$. De punten D en E liggen op BC zo, dat E het midden van BC is en D het midden van BE. Verder is $\angle BAD = 20°$. Zie figuur 4.7. Bereken $\angle CAE$.

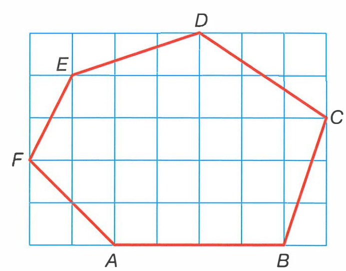


figuur 4.7

D 7 In figuur 4.8 is op een rooster de zeshoek $ABCDEF$ getekend.

a Bereken $\angle F$.

b De diagonalen AD en BE snijden elkaar in S. Bereken $\angle ASB$.

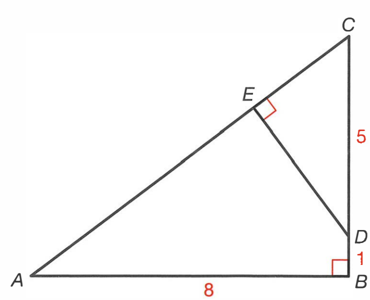


figuur 4.8

O 8 In figuur 4.9 zijn twee gelijkvormige driehoeken te ontdekken.

a Welke driehoeken zijn dat? Zet de letters in de juiste volgorde.

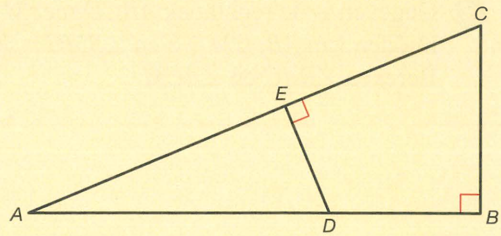
b Gebruik de gelijkvormigheid om DE te berekenen.



figuur 4.9

Theorie B Gelijkvormige driehoeken

In figuur 4.10 is driehoek ADE gelijkvormig met driehoek ACB. Notatie $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$.
Deze gelijkvormigheid volgt uit gelijke hoeken.
$\angle A$ in $\triangle ADE$ is gelijk aan $\angle A$ in $\triangle ABC$ én
$\angle E$ in $\triangle ADE$ is gelijk aan $\angle B$ in $\triangle ABC$.



figuur 4.10

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee gelijke hoeken hebben.

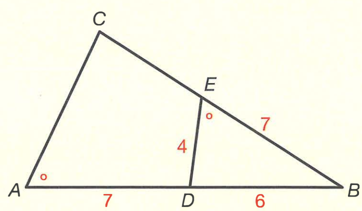
Let op de volgorde van de letters in $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$.

De overeenkomstige hoeken zijn met pijlen aangegeven.
Met de overeenkomstige zijden maak je een verhoudingstabel.

AD	AE	DE
AC	AB	CB

Voorbeeld

In driehoek ABC met $AB = 13$ ligt het punt D op AB zo, dat $AD = 7$. Het punt E ligt op BC zo, dat $\angle BED = \angle A$.
Verder is gegeven dat $BE = 7$ en $DE = 4$. Zie figuur 4.11.
Bereken AC en CE.



figuur 4.11

Uitwerking

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle BED \text{ (gegeven)} \\ \angle ABC = \angle DBE\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle EBD$$

AB	AC	BC
BE	DE	BD

geeft

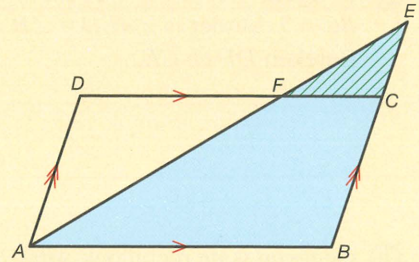
13	AC	BC
7	4	6

$$AC = \frac{13 \cdot 4}{7} = 7\tfrac{3}{7} \text{ en } BC = \frac{13 \cdot 6}{7} = 11\tfrac{1}{7}$$

$$CE = BC - BE = 11\tfrac{1}{7} - 7 = 4\tfrac{1}{7}$$

In figuur 4.12 zie je een bijzonder geval van gelijkvormige driehoeken. In deze figuur komen evenwijdige lijnstukken voor. Daarom heb je te maken met gelijke **F-hoeken**.

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAE = \angle CFE \text{ (F-hoeken)} \\ \angle AEB = \angle FEC\end{array}\right\} \triangle ABE \backsim \triangle FCE$$

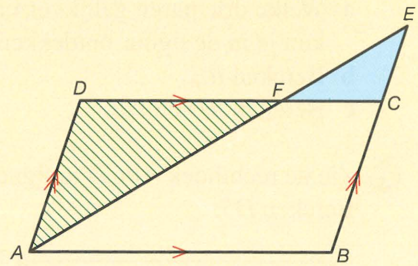


$\triangle ABE \backsim \triangle FCE$

figuur 4.12

Ook in figuur 4.13 heb je met evenwijdige lijnstukken te maken. Daarbij komen gelijke **Z-hoeken** tevoorschijn.

$$\left.\begin{array}{l}\angle DAF = \angle FEC \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle AFD = \angle EFC \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ADF \backsim \triangle ECF$$



$\triangle ADF \backsim \triangle ECF$

figuur 4.13

In de figuur in het voorbeeld heb je te maken met gelijke F-hoeken. Om CQ te berekenen gebruik je dat uit

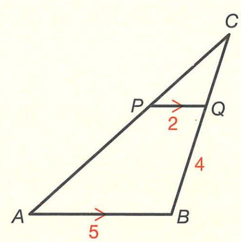
$\triangle ABC \backsim \triangle PQC$ volgt $\begin{array}{c|c} AB & BC \\ \hline PQ & CQ \end{array}$

Invullen geeft $\begin{array}{c|c} 5 & BC \\ \hline 2 & CQ \end{array}$

Omdat BC en CQ beide onbekend zijn, lijkt het alsof je niet verder kunt. Maar door te bedenken dat $BC = BQ + CQ$, dus $BC = 4 + CQ$ kun je CQ toch berekenen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 5$. Het punt P ligt op AC en het punt Q ligt op BC zo, dat PQ evenwijdig is met AB, $BQ = 4$ en $PQ = 2$. Zie figuur 4.14.
Bereken CQ.



figuur 4.14

Uitwerking

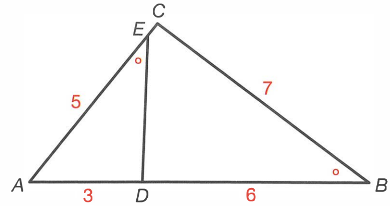
$$\left.\begin{array}{l}\angle ACB = \angle PCQ \\ \angle BAC = \angle QPC \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle PQC$$

Stel $CQ = x$, dan is $BC = x + 4$.

$\begin{array}{c|c} AB & BC \\ \hline PQ & CQ \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 5 & x+4 \\ \hline 2 & x \end{array}$

Dus $5x = 2(x + 4)$
$5x = 2x + 8$
$3x = 8$
$x = 2\frac{2}{3}$, dus $CQ = 2\frac{2}{3}$

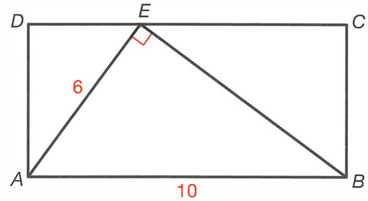
9 In figuur 4.15 is $AD = 3$, $BD = 6$, $AE = 5$ en $BC = 7$. Verder is $\angle AED = \angle B$. Zie figuur 4.15
Bereken DE en CE.



figuur 4.15

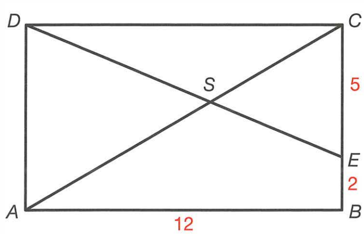
10 Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $AB = 10$. Op de zijde CD ligt het punt E zo, dat $\angle AEB = 90°$. Verder is gegeven dat $AE = 6$. Zie figuur 4.16.

a Welke drie paren gelijkvormige driehoeken kun je in de figuur ontdekken?
b Bereken BE.
c Bereken AD en DE.

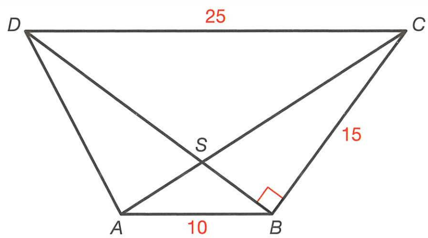


figuur 4.16

11 Zie de rechthoek $ABCD$ in figuur 4.17.
Bereken DS.



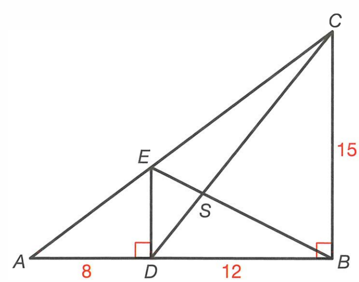
figuur 4.17



figuur 4.18

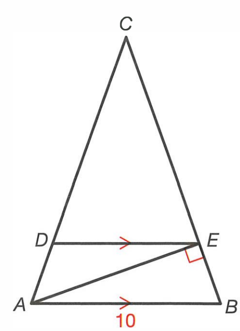
12 In het trapezium $ABCD$ in figuur 4.18 staat de diagonaal BD loodrecht op de zijde BC.
Bereken BS.

A 13 Van driehoek ABC is $AB = 20$, $BC = 15$ en $\angle B = 90°$.
Het punt D ligt op AB zo, dat $AD = 8$. Het punt E ligt op AC zo, dat $\angle ADE = 90°$. Het snijpunt van BE en CD is S. Zie figuur 4.19.
Bereken DS.



figuur 4.19

A 14 Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC met $AB = 10$ en $AC = BC = 15$. De lijn AE staat loodrecht op BC en de lijn DE is evenwijdig met AB. Zie figuur 4.20.
Bereken DE.

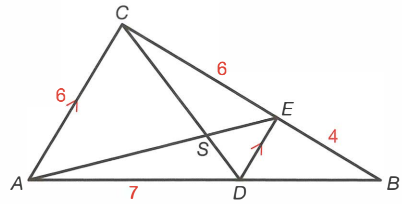


figuur 4.20

D 15 In driehoek ABC in figuur 4.21 is DE evenwijdig met AC en is S het snijpunt van AE en CD. Verder is $AD = 7$, $BE = 4$, $CE = 6$ en $AC = 6$.

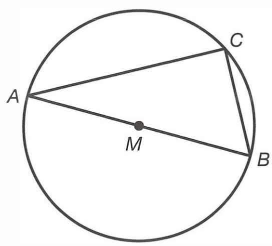
a Onderzoek met een berekening welke van de volgende beweringen waar is.
I $\angle ACB < 90°$
II $\angle ACB = 90°$
III $\angle ACB > 90°$

b Welk deel is AS van AE?

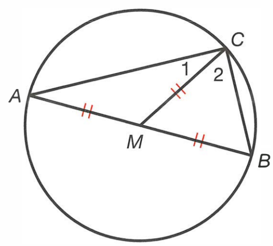


figuur 4.21

O 16 In figuur 4.22 is de cirkel met middelpunt M en middellijn AB getekend.
Het punt C ligt op de cirkel.
In deze opgave ga je bewijzen dat $\angle ACB = 90°$.



figuur 4.22



figuur 4.23

Zie figuur 4.23.

a Licht toe dat $\angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180°$.

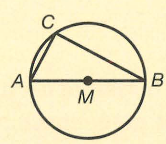
b Licht toe dat $\angle A = \angle C_1$ en $\angle B = \angle C_2$.

c Licht toe hoe uit a en b volgt dat $\angle ACB = \angle C_{12} = 90°$.

Theorie C Stellingen en definities

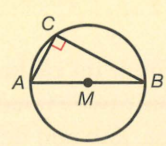
In opgave 16 heb je de **stelling van Thales** bewezen.

Stelling van Thales
Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is hoek ACB recht.



In opgave 17 ga je de **omgekeerde stelling van Thales** bewijzen.

Omgekeerde stelling van Thales
Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB.



In opgave 18 bewijs je de stelling van de **raaklijn aan een cirkel**.
Daarom geven we eerst de **definitie** van een raaklijn aan een cirkel.

Definitie van raaklijn aan cirkel
Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die één punt met de cirkel gemeen heeft.

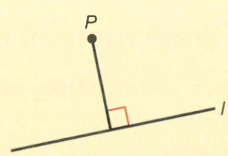
Informatief Definitie en stelling

Een definitie is een afspraak. Zo is hierboven afgesproken wat een raaklijn aan een cirkel is. Een stelling is een eigenschap of bewering die bewezen kan worden. Bij een bewijs mag je uitgaan van wat bekend is, dat wil zeggen dat je definities en eerder bewezen stellingen mag gebruiken. Zo heb je bij het bewijs van de stelling van Thales in opgave 16 gebruikt dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is (stelling hoekensom driehoek) en dat in een gelijkbenige driehoek de hoeken tegenover de even lange zijden even groot zijn (stelling gelijkbenige driehoek). Om deze stelling over de gelijkbenige driehoek te bewijzen ga je uit van de volgende definitie: Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met (minstens) twee even lange zijden (definitie gelijkbenige driehoek).

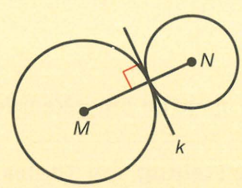
Stelling raaklijn aan cirkel
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt.

Met behulp van de bovenstaande stelling zijn andere stellingen over raaklijnen aan cirkels te bewijzen.
Zie de opgaven 19 en 20.
Daarbij gebruik je het begrip **afstand van een punt tot een lijn**.

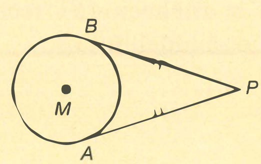
Definitie van afstand punt tot lijn
De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van het loodlijnstuk neergelaten vanuit dat punt op die lijn.



Stelling raaklijn in gemeenschappelijk raakpunt
De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.

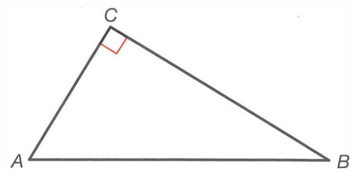


Stelling afstand punt tot raakpunten
Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.

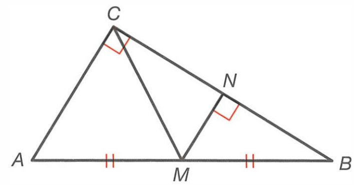


17 In deze opgave ga je de omgekeerde stelling van Thales bewijzen. Zie figuur 4.24.
Omgekeerde stelling van Thales:
Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB.
In figuur 4.25 is het midden M van AB getekend. Verder is $MN \perp BC$.

a Toon aan dat $\triangle ABC \backsim \triangle MBN$.
b Toon aan dat $BN = CN$.
c Toon met behulp van de stelling van Pythagoras aan dat $BM = CM$.
d Maak het bewijs af.



figuur 4.24



figuur 4.25

Geschiedenis Thales van Milete

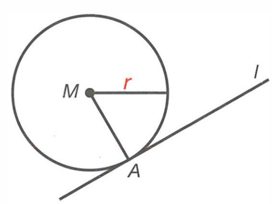
Thales van Milete (ca 624 – 547 v Chr.) leefde in Milete, een plaats in het huidige Turkije.
Men veronderstelt dat Thales de grondlegger is van een logische opbouw in de meetkunde en dat hij, naast de naar hem vernoemde stelling, de volgende stellingen ontdekte.

- Een cirkel wordt in twee gelijke delen verdeeld door elke middellijn.
- Een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken.
- Bij snijdende lijnen zijn overstaande hoeken gelijk.
- Twee driehoeken zijn gelijk als ze twee hoeken en een zijde gelijk hebben.

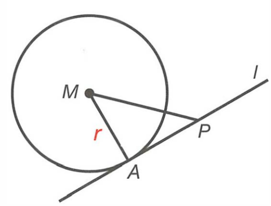
Verder is hij waarschijnlijk de eerste die gebruik maakte van gelijkvormige driehoeken.

18 In deze opgave ga je de stelling van een raaklijn aan een cirkel bewijzen. Zie figuur 4.26.
Stelling raaklijn aan een cirkel:
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt.
In figuur 4.27 is een punt P op de raaklijn l getekend dat niet samenvalt met A.
Uit de definitie van de raaklijn aan de cirkel volgt dat $MP > MA$.

a Licht dit toe.
b Hoe volgt nu uit de definitie van de afstand van een punt tot een lijn dat $MA \perp l$?

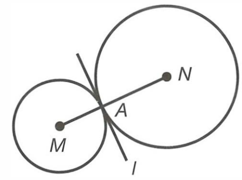


figuur 4.26



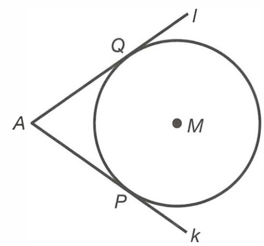
figuur 4.27

19 In figuur 4.28 is het punt A het gemeenschappelijke raakpunt van de cirkels met middelpunt M en middelpunt N. De gemeenschappelijke raaklijn is l.
Bewijs dat $MN \perp l$.



figuur 4.28

20 Vanuit het punt A zijn de raaklijnen k en l aan de cirkel met middelpunt M getekend. De raakpunten zijn P en Q. Zie figuur 4.29.
Gebruik de stelling van Pythagoras om te bewijzen dat $AP = AQ$.

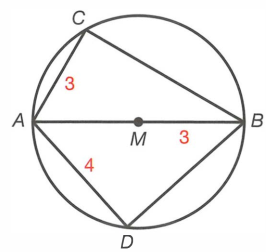


figuur 4.29

21 Op de cirkel met middelpunt M, straal 3 en middellijn AB liggen de punten C en D zo, dat $AC = 3$ en $AD = 4$. Zie figuur 4.30.

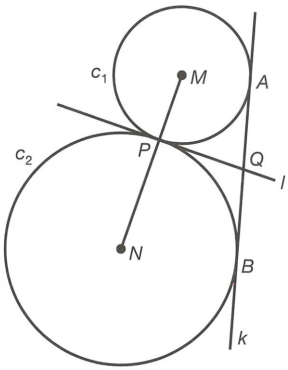
a Bereken BC en BD.

b Onderzoek met een berekening of het punt B op de cirkel ligt waarvan CD middellijn is.



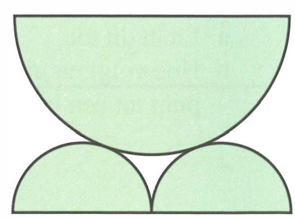
figuur 4.30

A 22 Gegeven is de cirkel c_1 met middelpunt M en straal 3 en de cirkel c_2 met middelpunt N en straal 5.
De lijn k raakt c_1 in A en c_2 in B. Het gemeenschappelijke raakpunt van c_1 en c_2 is P en de gemeenschappelijke raaklijn in P is l.
De lijnen k en l snijden elkaar in Q. Zie figuur 4.31.
Bereken PQ.



figuur 4.31

D 23 Luuk maakt van drie halve boomstammen een bankje als in figuur 4.32. De diameter van de boomstammen aan de onderkant is 2 dm, de diameter van de bovenste stam is 4 dm.
Bereken de hoogte van het bankje in mm nauwkeurig.


figuur 4.32

Terugblik

Goniometrische berekeningen

Met de goniometrische verhoudingen zijn hoeken en zijden in rechthoekige driehoeken te berekenen. Gebruik je bij goniometrische berekeningen tussenresultaten, rond dan niet tussentijds af, maar gebruik geheugenplaatsen en/of Ans. In de figuur onder de post-it is $BN = \frac{1}{3}BC$.

Bij het berekenen van $\angle BAN$ ga je als volgt te werk.

In $\triangle ABC$ is $\sin(27°) = \dfrac{BC}{8}$,

dus $BC = 8\sin(27°) = 3{,}63...$,

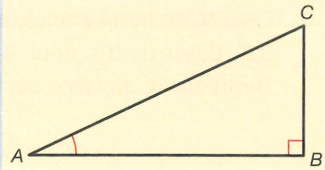
dus $BN = \frac{1}{3} \cdot 3{,}63... = 1{,}21...$

In $\triangle ABC$ is $\cos(27°) = \dfrac{AB}{8}$, dus

$AB = 8\cos(27°) = 7{,}12...$

In $\triangle ABN$ is $\tan(\angle BAN) = \dfrac{BN}{AB} = \dfrac{1{,}21...}{7{,}12...}$,

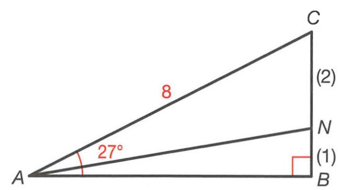
dus $\angle BAN \approx 9{,}6°$.



$\sin(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}$

$\cos(\angle A) = \dfrac{AB}{AC}$

$\tan(\angle A) = \dfrac{BC}{AB}$

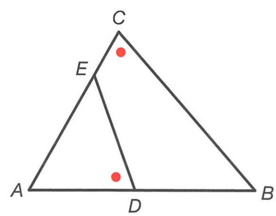


Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee hoeken gelijk hebben.

In de figuur hiernaast is

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle DAE \\ \angle ACB = \angle ADE \text{ (gegeven)}\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle AED$$



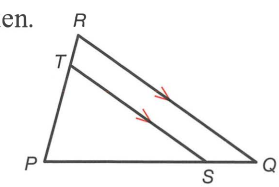
Uit deze gelijkvormigheid volgt de verhoudingstabel

AB	AC	BC
AE	AD	DE

Let bij evenwijdige lijnstukken op gelijke F-hoeken of gelijke Z-hoeken.

In de figuur hiernaast is

$$\left.\begin{array}{l}\angle QPR = \angle SPT \\ \angle PRQ = \angle PTS \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle PQR \backsim \triangle PST$$



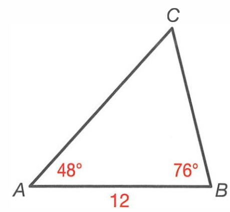
Stellingen en cirkels

Je hebt de volgende stellingen bewezen:

1. Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is hoek ACB recht (stelling van Thales).
2. Als C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB (omgekeerde stelling van Thales).
3. Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt.
4. De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.
5. Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel worden getrokken, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.

4.2 De sinusregel en de cosinusregel

O24 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 12$, $\angle A = 48°$ en $\angle B = 76°$.
Om AC te berekenen kun je gebruikmaken van de hoogtelijn AD, dat is de lijn door A loodrecht op BC.
Bereken AC in twee decimalen nauwkeurig.



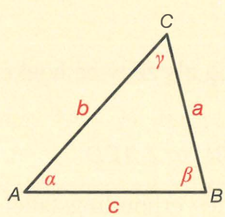
figuur 4.33

Theorie A De sinusregel

De berekening van AC in opgave 24 is omslachtig, omdat $\triangle ABC$ niet gelijkbenig of rechthoekig is. De berekening wordt een stuk eenvoudiger door gebruik te maken van de **sinusregel**.
De sinusregel geldt in elke driehoek.
In opgave 26 geef je het bewijs in scherphoekige driehoeken.
In de sinusregel hieronder is de zijde tegenover hoek A aangegeven met de letter a en hoek A is aangegeven met α. En b is de zijde tegenover hoek B en c is de zijde tegenover hoek C.

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel

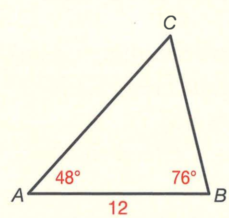
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$



α alfa
β bèta
γ gamma

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $c = 12$, $\alpha = 48°$ en $\beta = 76°$.
Bereken a in één decimaal nauwkeurig.



Uitwerking

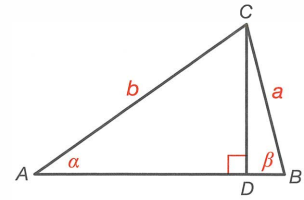
$\gamma = 180° - 48° - 76° = 56°$

$$\frac{a}{\sin(48°)} = \frac{12}{\sin(56°)}$$

$$a = \frac{12 \cdot \sin(48°)}{\sin(56°)} \approx 10{,}8$$

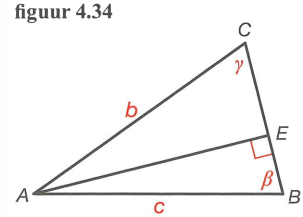
25 Van $\triangle ABC$ is $\alpha = 50°$, $\beta = 75°$ en $a = 6{,}8$.
a Bereken γ.
b Bereken b en c in één decimaal nauwkeurig.

26 In deze opgave ga je de sinusregel bewijzen voor scherphoekige driehoeken.
Zie figuur 4.34.
- **a** Toon aan dat $CD = b\sin(\alpha)$ en $CD = a\sin(\beta)$.
- **b** Licht toe dat uit a volgt $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$.



figuur 4.34

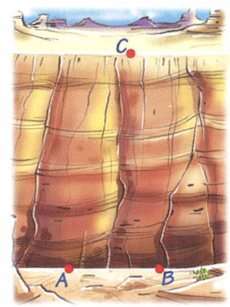
Zie figuur 4.35.
- **c** Toon aan dat $AE = c\sin(\beta)$ en $AE = b\sin(\gamma)$.
- **d** Licht toe dat uit c volgt $\dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$.
- **e** Hoe volgt uit b en d de sinusregel?



figuur 4.35

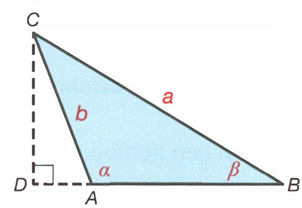
4

A 27 In figuur 4.36 zie je de situatie op een plek bij de Grand Canyon. Een landmeter staat aan de kant waar hij heeft opgemeten dat de afstand tussen de markante punten A en B gelijk is aan 420 meter. Aan de overkant van de kloof ligt het markante punt C. Hij wil de afstand van A tot C bepalen. Hij meet $\angle BAC = 88°$ en $\angle ABC = 81°$.
Bereken AC in meter nauwkeurig.



figuur 4.36

O 28 In figuur 4.37 is de stomphoekige driehoek ABC getekend.
- **a** Licht toe dat $\angle DAC = 180° - \alpha$.
- **b** Toon aan dat $CD = b\sin(180° - \alpha)$.
- **c** Toon aan dat $CD = a\sin(\beta)$.
- **d** Licht toe dat uit b en c volgt $\dfrac{a}{\sin(180° - \alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$.



figuur 4.37

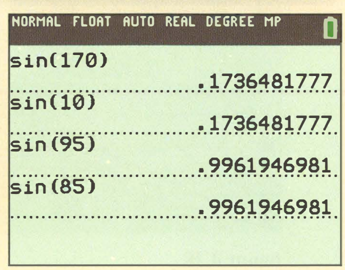
Theorie B De sinusregel in stomphoekige driehoeken

In hoofdstuk 7 zal je zien dat $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$.
Dus bijvoorbeeld $\sin(170°) = \sin(10°)$ en $\sin(95°) = \sin(85°)$.
Zie het GR-scherm hiernaast.

$$\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$$

In opgave 28 heb je gezien dat $\dfrac{a}{\sin(180° - \alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$.

Hieruit volgt dat de sinusregel ook geldt in stomphoekige driehoeken.



29 Van $\triangle KLM$ is $\angle K = 20°$, $\angle L = 110°$ en $LM = 5{,}3$.
Bereken KL en KM in één decimaal nauwkeurig.

30 Van $\triangle ABC$ is $\alpha = 50°$, $a = 5$ en $b = 6$.
Er zijn twee driehoeken ABC mogelijk.
a Teken de twee mogelijke driehoeken. Gebruik een passer.

Noem de driehoek met de scherpe hoek B driehoek 1 en de driehoek met de stompe hoek B driehoek 2.
b Bereken voor driehoek 1 de hoeken β en γ en de zijde c in één decimaal nauwkeurig.
c Bereken voor driehoek 2 de hoeken β en γ en de zijde c in één decimaal nauwkeurig.

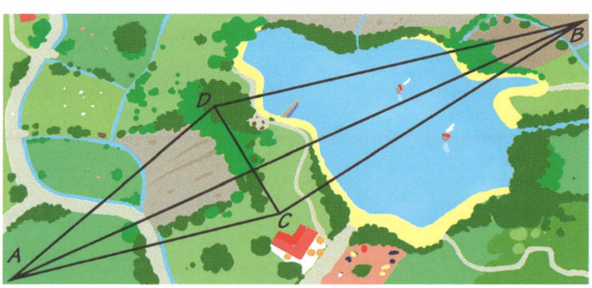
4

31 Van $\triangle ABC$ is $\angle B = 46°$, $BC = 10$ en $AC = 8$.
a Bereken beide mogelijkheden voor $\angle A$.
b Bereken beide mogelijkheden voor AB.
c Judith wil een driehoek tekenen met $\angle B = 46°$, $BC = 10$ en $AC = 7$.
Waarom is dit niet mogelijk?

A 32 Bij de gegevens $\alpha = 60°$ en $b = 6$ hangt het van de waarde van a af of er
- geen driehoek ABC mogelijk is
- één driehoek ABC mogelijk is
- twee driehoeken ABC mogelijk zijn.

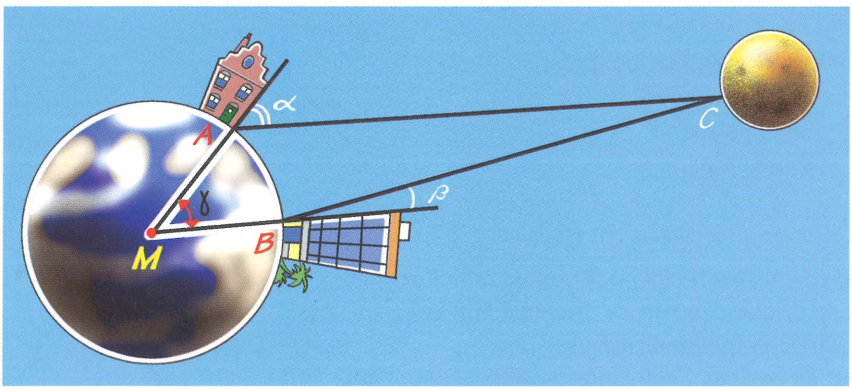
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de waarden van a waarvoor
a er geen driehoek ABC mogelijk is
b er precies één driehoek ABC mogelijk is
c er twee driehoeken ABC mogelijk zijn.

A 33 In een gebied zijn de gemarkeerde punten A, B, C en D aanwezig. Een landmeter wil de afstand AB weten, maar deze afstand is niet op te meten omdat zich tussen A en B een waterpartij bevindt. Daarom meet hij de afstand CD en de hoeken BAC, BAD, ACD en ADB. Zie figuur 4.38. Hij vindt $CD = 235$ m, $\angle BAC = 10{,}3°$, $\angle BAD = 16{,}1°$, $\angle ACD = 71{,}8°$ en $\angle ADB = 152{,}7°$.
Bereken AB in meter nauwkeurig.



figuur 4.38

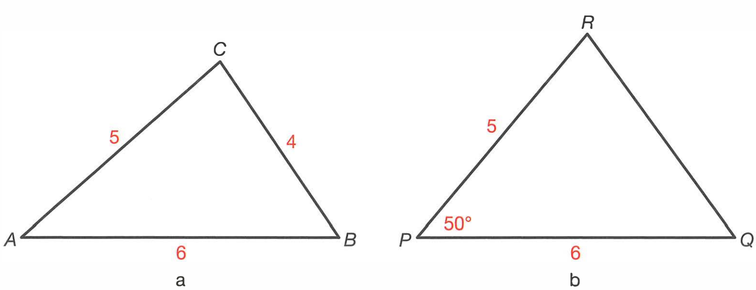
D 34 Om de afstand van Amsterdam tot een punt op de maan te berekenen, gaat men als volgt te werk.
Men kiest een plaats die op dezelfde lengtecirkel ligt als Amsterdam. Gekozen is voor Benin City in Nigeria. Als vast punt op de maan kiest men de krater Clavius.
In Amsterdam en Benin City meet men op hetzelfde moment de hoek tussen de kijklijn naar de krater en de verticaal. Men kiest hiervoor het moment dat de maan het hoogst boven de horizon staat, want op dat moment liggen het middelpunt M van de aarde, Amsterdam (A), Benin City (B) en de krater Clavius (C) in één vlak.
De opgemeten hoeken zijn in figuur 4.39 aangegeven met α en β.
Men vindt $\alpha = 37{,}72°$ en $\beta = 11{,}03°$.



figuur 4.39

Amsterdam ligt op 52,5° NB, Benin City op 4,5° NB en de straal van de aarde is 6378 km.
Door in $\triangle ABC$ de sinusregel te gebruiken, is AC te berekenen.
Bereken de afstand van Amsterdam tot de krater Clavius in honderden km nauwkeurig.

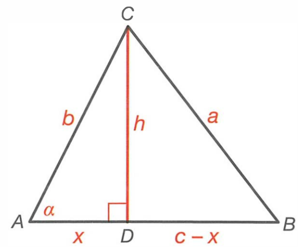
R 35 **a** Waarom kun je hoek A in figuur 4.40a niet met de sinusregel berekenen?
b Waarom kun je QR in figuur 4.40b niet met de sinusregel berekenen?



figuur 4.40

O 36 In figuur 4.41 zie je $\triangle ABC$ met de zijden a, b en c en de hoogtelijn CD. Er is $AD = x$ gesteld, dus $BD = c - x$.

a Toon aan dat $x^2 + h^2 = b^2$.
b Toon aan dat $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$.
c Licht toe dat uit a en b volgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$.
d Toon aan dat $x = b\cos(\alpha)$.
e Licht toe dat uit c en d volgt
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.



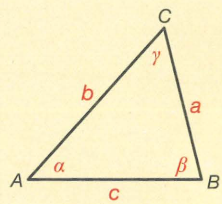
figuur 4.41

Theorie C De cosinusregel

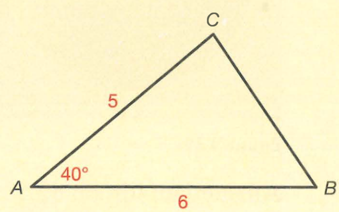
In opgave 36 heb je een van de drie versies van de **cosinusregel** bewezen. Het bewijs van de andere versies gaat net zo.

In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$



Je kunt met de cosinusregel een hoek van een driehoek berekenen als de drie zijden van de driehoek zijn gegeven. Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.
Ook kun je met de cosinusregel van een driehoek een zijde berekenen als de twee andere zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven. Zo krijg je in $\triangle ABC$ hiernaast
$BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(40°)$ en dit geeft $BC \approx 3{,}88$.

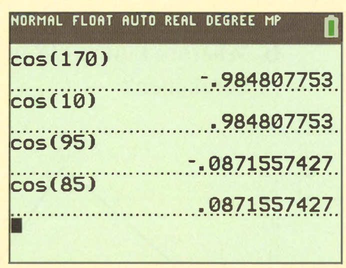


figuur 4.42

In hoofdstuk 7 zal je zien dat $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$.
Je gebruikt dit in opgave 37 bij het bewijs van de cosinusregel in stomphoekige driehoeken.

$\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$

Uit de regel $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ volgt bijvoorbeeld $\cos(170°) = -\cos(10°)$ en $\cos(95°) = -\cos(85°)$.
Zie het GR-scherm hiernaast.

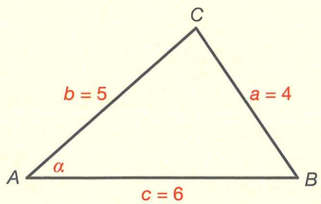


Omdat de cosinus van elke scherpe hoek positief is en van elke stompe hoek negatief, hoort bij iedere waarde van de cosinus van een hoek precies één hoek. De GR geeft dus altijd de hoek die je zoekt.
Zo krijg je bij $\cos(\alpha) = 0{,}6$ dat $\alpha \approx 126{,}9°$.

Voorbeeld

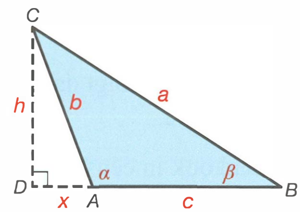
Gegeven is $\triangle ABC$ met $a = 4$, $b = 5$ en $c = 6$.
Bereken α.

Uitwerking



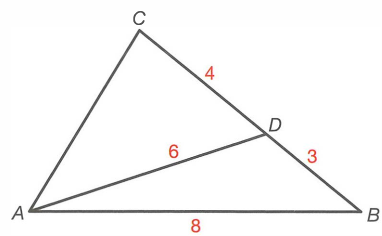
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha)$$
$$16 = 61 - 60\cos(\alpha)$$
$$60\cos(\alpha) = 45$$
$$\cos(\alpha) = \frac{45}{60}$$
$$\alpha \approx 41{,}4°$$

37 In figuur 4.43 is de stomphoekige driehoek ABC getekend.
- **a** Toon aan dat $x^2 + h^2 = b^2$ en $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$.
- **b** Toon aan dat uit a volgt dat $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.
- **c** Toon aan dat $x = b\cos(180° - \alpha)$.
- **d** Licht toe: omdat $\cos(180° - \alpha) = {-\cos(\alpha)}$, geldt de cosinusregel ook voor stomphoekige driehoeken.



figuur 4.43

T 38 [▶▶ 42] Van $\triangle ABC$ is $AB = 8$ en $BC = 7$. Het punt D ligt op BC zo, dat $BD = 3$. Verder is gegeven dat $AD = 6$. Zie figuur 4.44.
- **a** Bereken AC in drie decimalen nauwkeurig.
- **b** Bereken de oppervlakte van driehoek ABC in twee decimalen nauwkeurig.



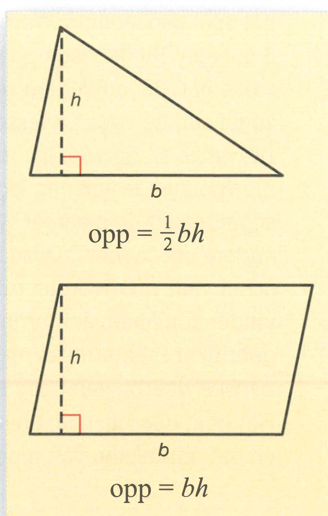
figuur 4.44

39 Van $\triangle ABC$ is $a = 5$, $b = 6$ en $c = 7$.
Bereken α, β en γ.

40 Gegeven is $\triangle DEF$ met $DE = 5$, $EF = 4$ en $DF = 7$.
Bereken $\angle D$, $\angle E$ en $\angle F$.

41 Van $\triangle ABC$ is $\alpha = 50°$, $b = 5$ en $c = 6$.
- **a** Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.
- **b** Bereken β.

A 42 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 10$, $AC = 7$ en $BC = 8$.
Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$ in één decimaal nauwkeurig.



A 43 Van parallellogram $ABCD$ is $AB = 10$. De lengte van diagonaal AC is 14 en de lengte van diagonaal BD is 9.

a Bereken BC in één decimaal nauwkeurig.

b Bereken de oppervlakte van $ABCD$ in één decimaal nauwkeurig.

D 44 In deze opgave wordt met de koers bedoeld de hoek ten opzichte van het noorden met de wijzers van de klok mee.
Harm voert de volgende loopopdrachten uit.

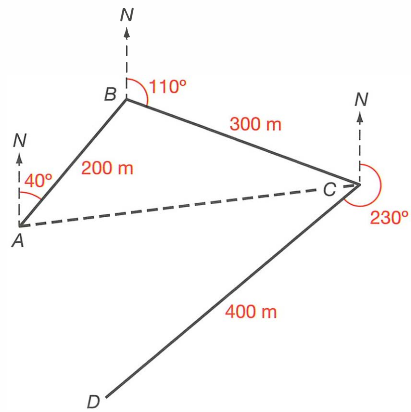
1 Loop vanaf punt A 200 meter met koers 40°. Je komt in punt B.

2 Loop vanaf punt B 300 meter met koers 110°. Je komt in punt C.

3 Loop vanaf punt C 400 meter met koers 230°. Je komt in punt D.

Zie figuur 4.45.
Uit de gegevens volgt dat $\angle ABC = 110°$.

a Licht dit toe.



figuur 4.45

Harm had ook in één keer van A naar C kunnen lopen.

b Bereken in meter nauwkeurig de afstand die hij dan had moeten lopen.

c Bereken in graden nauwkeurig de koers die hij dan had moeten lopen.

Harm had ook in één keer van A naar D kunnen lopen.

d Bereken de afstand in meter nauwkeurig en de koers in graden nauwkeurig die hij dan had moeten lopen.

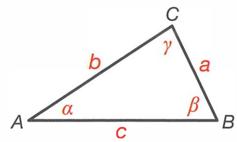
Informatief Geocaching

In Nederland beoefenen ongeveer 25 000 mensen actief het spel geocaching. Wereldwijd zijn dat er meer dan 6 miljoen. Bij geocaching wordt gebruik gemaakt van een GPS-ontvanger of mobiele telefoon om een zogenaamde *cache* (verstopte schat) te vinden.
De *cache* zit gewoonlijk in een kleine waterdichte doos die voorzien is van een logboek. Na het verstoppen van de schat maakt de plaatser via internet de locatie bekend aan andere geocachers. Deze kunnen na het vinden van de schat vaak voorwerpen ruilen of toevoegen. Ook laat de vinder zijn naam achter in het logboek. Er zijn *caches* waarbij de gebruiker rechtstreeks op de juiste locatie af kan gaan, maar er zijn ook *caches* waarbij eerst een soort speurtocht moet worden gelopen.
Het gaat daarbij, naast het vinden van de schat, ook veelal om de tocht en het ontdekken van mooie locaties in de natuur of in de steden.

Terugblik

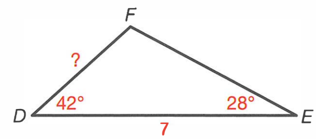
De sinusregel

In elke driehoek is $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$. Dit is de sinusregel.



Om de sinusregel te kunnen gebruiken moet in elk geval een zijde met de overstaande hoek zijn gegeven.

Om in de driehoek hiernaast DF te berekenen, bedenk je eerst dat $\angle F = 180° - 42° - 28° = 110°$.

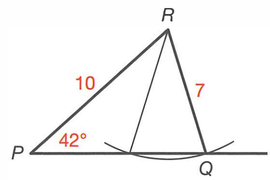


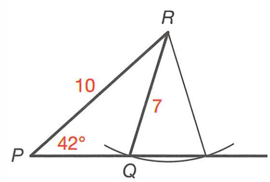
De sinusregel geeft $\dfrac{DF}{\sin(\angle E)} = \dfrac{DE}{\sin(\angle F)}$,

dus $\dfrac{DF}{\sin(28°)} = \dfrac{7}{\sin(110°)}$.

Zo krijg je $DF = \dfrac{7\sin(28°)}{\sin(110°)} \approx 3{,}50$.

Soms zijn bij de gegevens twee driehoeken mogelijk. Is van driehoek PQR gegeven dat $\angle P = 42°$, $PR = 10$ en $QR = 7$, dan kan $\angle Q$ scherp zijn, maar ook stomp.





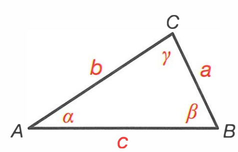
Uit $\dfrac{7}{\sin(42°)} = \dfrac{10}{\sin(\angle Q)}$ volgt $\sin(\angle Q) = \dfrac{10\sin(42°)}{7}$.

Dit geeft $\angle Q \approx 72{,}9°$, maar ook $\angle Q \approx 180° - 72{,}9° = 107{,}1°$.
Bij $\angle Q \approx 72{,}9°$ hoort $\angle R \approx 180° - 42° - 72{,}9° = 65{,}1°$
en bij $\angle Q \approx 107{,}1°$ hoort $\angle R \approx 180° - 42° - 107{,}1° = 30{,}9°$.

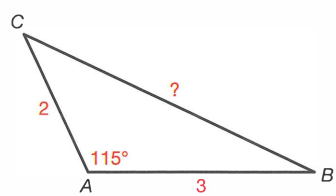
De cosinusregel

In elke driehoek is

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

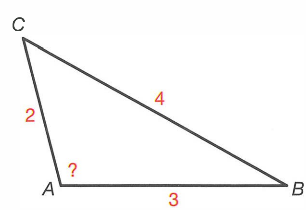


Dit is de cosinusregel.
Je kunt met de cosinusregel een zijde berekenen als de twee andere zijden zijn gegeven en de ingesloten hoek.
Zo is in de figuur hiernaast de zijde BC te berekenen.



Je krijgt $BC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(115°)$
$BC^2 = 18{,}07...$
$BC \approx 4{,}25$

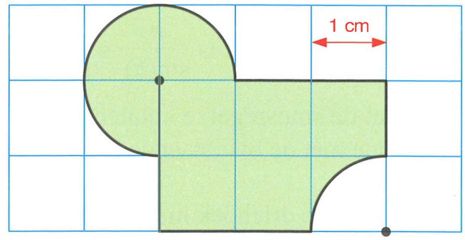
Ook kun je met de cosinusregel een hoek berekenen als de drie zijden zijn gegeven.
Zo is in de figuur hiernaast $\angle A$ te berekenen.



Je krijgt $4^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(\angle A)$
$16 = 9 + 4 - 12\cos(\angle A)$
$12\cos(\angle A) = -3$
$\cos(\angle A) = \dfrac{-3}{12}$ en dit geeft $\angle A \approx 104{,}5°$.

4.3 Lengten en oppervlakten

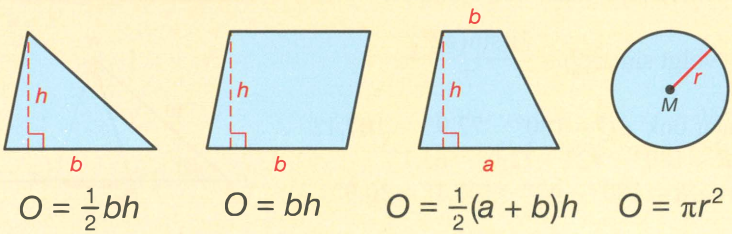
O 45 Bereken de oppervlakte van de figuur hiernaast. Rond af op mm^2.



figuur 4.46 De middelpunten van de cirkelbogen zijn aangegeven met stippen.

Theorie A Oppervlakte van vlakke figuren

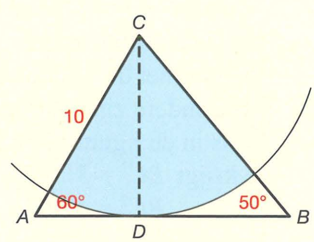
Bij het berekenen van de oppervlakte van een vlakke figuur, splits je de figuur soms op in basisfiguren. Ook komt het voor dat je de figuur kunt aanvullen tot een basisfiguur.
We herhalen de oppervlakteformules van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel.



figuur 4.47 Oppervlakteformules van de vier basisfiguren.

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = 60°$, $\angle B = 50°$ en $AC = 10$.
De cirkel met middelpunt C raakt zijde AB in D.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van het gebied dat binnen de cirkel en binnen de driehoek ligt.



figuur 4.48

Uitwerking
De straal van de cirkel is CD.

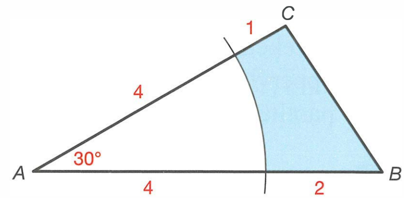
In $\triangle ACD$ is $\sin(60°) = \frac{CD}{10}$, dus
$CD = 10\sin(60°) = 8{,}66...$

$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 60° - 50° = 70°$

De oppervlakte van het gevraagde gebied is $\frac{70}{360} \cdot \pi \cdot 8{,}66...^2 \approx 45{,}81$.

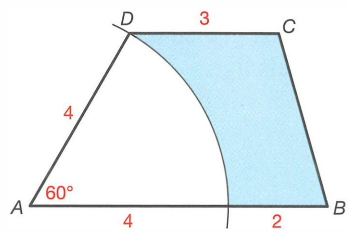
46 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van het gebied dat binnen de driehoek maar buiten de cirkel ligt.

47 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $AC = 5$ en $\angle A = 30°$.
Punt A is het middelpunt van de cirkel met straal 4.
Zie figuur 4.49.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat binnen de driehoek maar buiten de cirkel ligt.



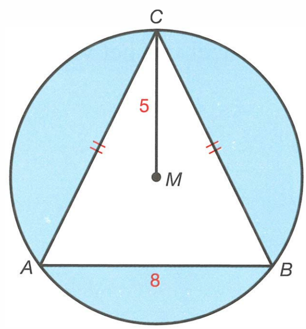
figuur 4.49

48 Van het trapezium $ABCD$ in figuur 4.50 is $AB = 6$, $AD = 4$, $CD = 3$ en $\angle A = 60°$. Punt A is het middelpunt van de cirkel met straal 4.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van het vlakdeel dat binnen het trapezium maar buiten de cirkel ligt.



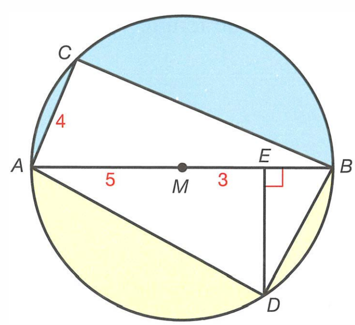
figuur 4.50

49 Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC met $AB = 8$ en $AC = BC$. De omgeschreven cirkel van de driehoek heeft straal 5. Zie figuur 4.51.
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat binnen de cirkel maar buiten de driehoek ligt.



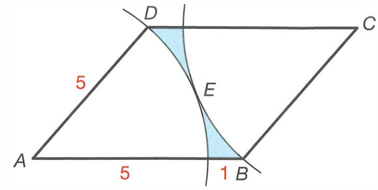
figuur 4.51

A 50 Gegeven is de cirkel met middelpunt M en straal 5.
AB is een middellijn en de punten C en D liggen op de cirkel.
$AC = 4$ en DE staat loodrecht op AB met $ME = 3$.
Zie figuur 4.52.
De oppervlakte van het gele gebied is groter dan de oppervlakte van het blauwe gebied.
Bereken exact het verschil tussen deze oppervlakten.



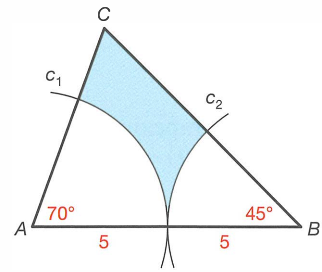
figuur 4.52

A 51 Gegeven is het parallellogram $ABCD$ met $AB = 6$ en $AD = 5$.
De cirkel met middelpunt A en straal 5 raakt de cirkel met middelpunt C en straal 5 in het punt E. Zie figuur 4.53.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van het vlakdeel dat binnen het parallellogram maar buiten de cirkels ligt.



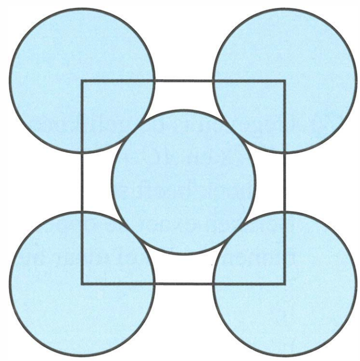
figuur 4.53

A 52 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 10$, $\angle A = 70°$ en $\angle B = 45°$. Cirkel c_1 heeft middelpunt A en straal 5. Cirkel c_2 heeft middelpunt B en straal 5. Zie figuur 4.54.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van het gebied dat binnen de driehoek maar buiten de cirkels ligt.

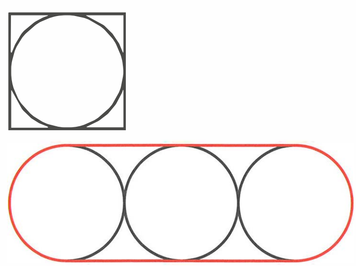


figuur 4.54

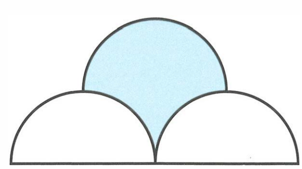
D 53 **a** Vijf even grote cirkels met straal r raken elkaar zoals in figuur 4.55 is getekend. De middelpunten van de buitenste cirkels zijn de hoekpunten van een vierkant.
Welk deel van het vierkant is blauw?


figuur 4.55

b De oppervlakte van het vierkant in figuur 4.56 is a en de oppervlakte van de cirkel is b.
Druk de lengte van de rode lijn uit in a en b.


figuur 4.56

c De bovenste halve cirkel in figuur 4.57 loopt tussen de bovenste punten van de twee onderste halve cirkels. Elke halve cirkel heeft een straal van 2 cm.
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van het blauwe gebied?

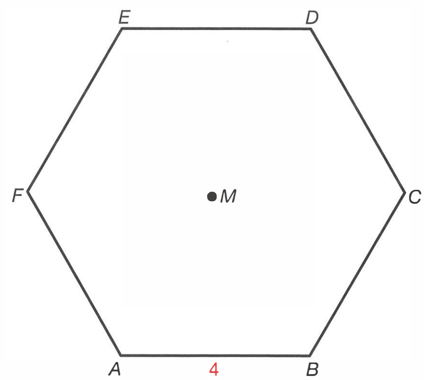

figuur 4.57

O 54 Gegeven is de regelmatige zeshoek met zijde 4 in figuur 4.58.
Om de oppervlakte van de zeshoek te berekenen bekijken we eerst $\triangle ABM$ apart.

a Licht toe dat $\angle AMB = 60°$.

b Teken $\triangle ABM$ en bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van deze driehoek.

c Bereken in één decimaal nauwkeurig de oppervlakte van de zeshoek.

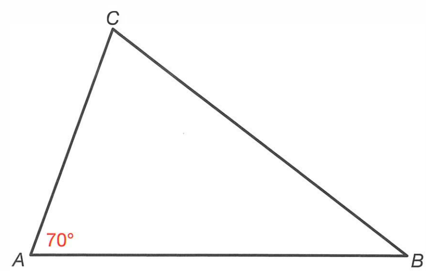


figuur 4.58 In een regelmatige zeshoek zijn alle zijden even lang en de hoeken even groot.

O 55 Gegeven is $\triangle ABC$ in figuur 4.59 met $\angle A = 70°$.

a Neem de driehoek over en teken de hoogtelijn CD.

b Druk de oppervlakte van $\triangle ABC$ uit in AB en AC.



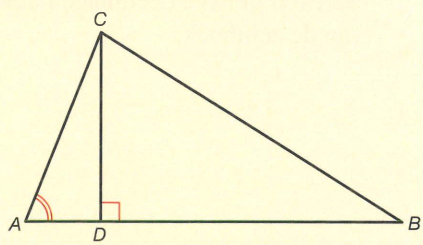
figuur 4.59

Theorie B Oppervlakte en goniometrische verhoudingen

In figuur 4.60 zie je $\triangle ABC$ met de hoogtelijn CD.
Er geldt $O(\triangle\ ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$.

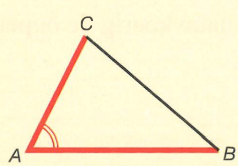
Verder is $\sin(\angle A) = \frac{CD}{AC}$, dus $CD = AC \cdot \sin(\angle A)$.

Hieruit volgt $O(\triangle\ ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$.
In woorden:
De oppervlakte van een driehoek is de helft van de ene zijde keer de andere zijde keer de sinus van de ingesloten hoek.



figuur 4.60

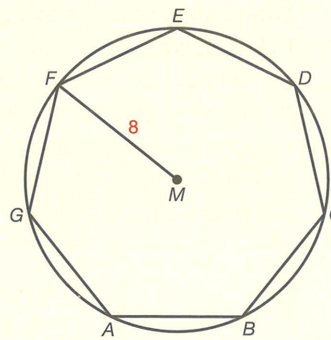
$$O(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$$



Deze formule is in het voorbeeld op de volgende bladzijde gebruikt. Hierin is een regelmatige zevenhoek gegeven waarvan de straal van de omgeschreven cirkel bekend is.

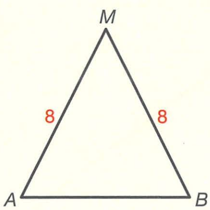
Voorbeeld

Gegeven is de regelmatige zevenhoek *ABCDEFG* met zijn omgeschreven cirkel. De straal van de omgeschreven cirkel is 8.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van de zevenhoek.

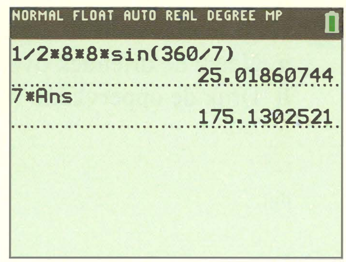


figuur 4.61

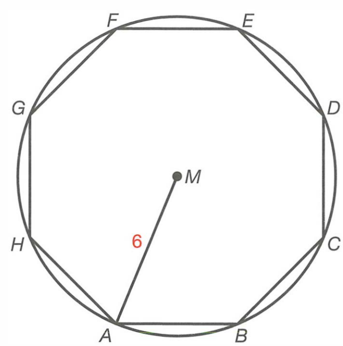
Uitwerking



$$O(\triangle ABM) = \tfrac{1}{2} \cdot AM \cdot BM \cdot \sin(\angle AMB)$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin\left(\frac{360°}{7}\right)$$
$$= 25{,}01\ldots$$
$$O(ABCDEFG) = 7 \cdot 25{,}01\ldots \approx 175{,}13$$

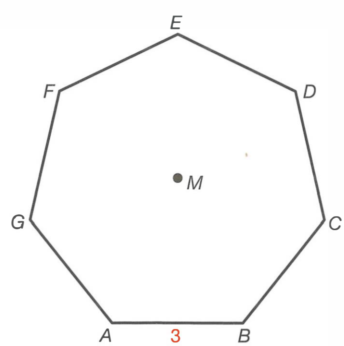


56 Gegeven is de regelmatige achthoek *ABCDEFGH* met zijn omgeschreven cirkel. Zie figuur 4.62.
De straal van de omgeschreven cirkel is 6.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van de achthoek.



figuur 4.62

57 Gegeven is de regelmatige zevenhoek *ABCDEFG* met zijde 3.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van de zevenhoek.



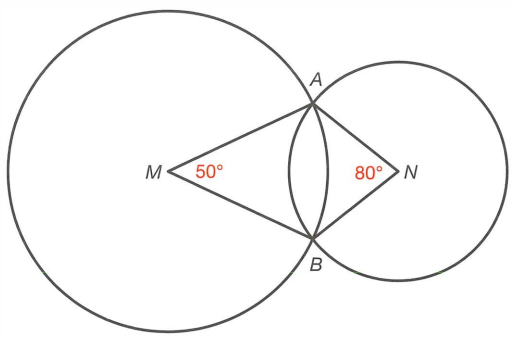
figuur 4.63

58 Het ministerie van Defensie van de Verenigde Staten van Amerika is gevestigd in het Pentagon te Arlington, vlakbij Washington D.C. De zijde van de buitenste regelmatige vijfhoek is 280 meter.
Bereken hoeveel ha de oppervlakte van het gebied is dat binnen deze vijfhoek ligt. Rond af op één decimaal.

figuur 4.64 Het Pentagon

A 59 De oppervlakte van een regelmatige negenhoek is 180.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van deze negenhoek.

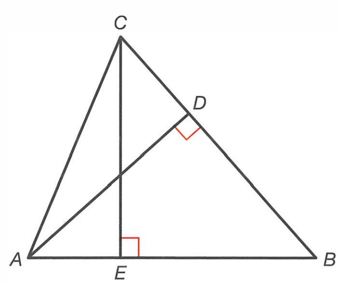
D 60 Twee cirkels met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B. Zie figuur 4.65. $\angle AMB = 50°$ en $\angle ANB = 80°$.
De oppervlakte van de cirkel met middelpunt N is 10.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van $\triangle ABM$.



figuur 4.65

O 61 Zie figuur 4.66 met driehoek ABC en de hoogtelijnen AD en CE.

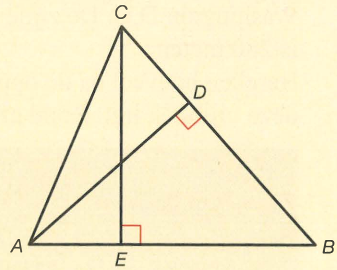
a Druk de oppervlakte van driehoek ABC uit in AB en CE.
b Druk de oppervlakte van driehoek ABC uit in BC en AD.
c Licht toe dat uit a en b volgt dat $AB \times CE = BC \times AD$.



figuur 4.66

Theorie C De zijde × hoogte-methode

Zie figuur 4.67. In opgave 61 heb je gezien dat
$AB \times CE = BC \times AD$.
We zeggen kortweg:
zijde × hoogte = zijde × hoogte.

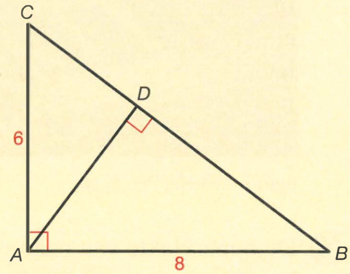


figuur 4.67

4

De zijde × hoogte-methode
Voor driehoeken geldt:
ene zijde × bijbehorende hoogte =
andere zijde × bijbehorende hoogte.

Je gebruikt de zijde × hoogte-methode om in figuur 4.68 de lengte van AD te berekenen. Bereken eerst BC met de stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$.
Je krijgt $BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$.
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft
$BC \times AD = AB \times AC$
$10 \times AD = 8 \times 6$
$AD = \dfrac{8 \times 6}{10} = 4{,}8$

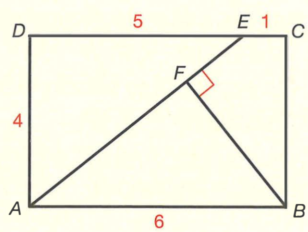


figuur 4.68

Voorbeeld

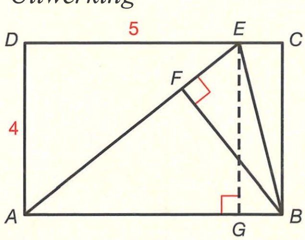
Zie figuur 4.69 met de rechthoek $ABCD$.
Bereken BF.

Aanpak
BF is in $\triangle ABE$ de hoogte bij zijde AE.
Teken dus $\triangle ABE$ en gebruik hierin de zijde × hoogte-methode.



figuur 4.69

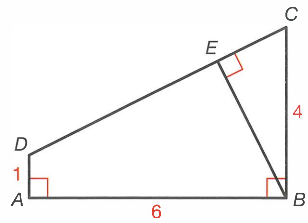
Uitwerking



figuur 4.70

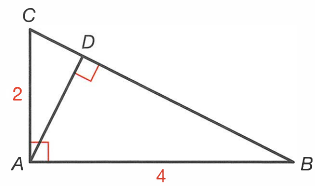
$AE = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABE$ geeft
$AE \times BF = AB \times EG$
$\sqrt{41} \cdot BF = 6 \cdot 4$
$BF = \dfrac{6 \cdot 4}{\sqrt{41}} = \dfrac{24}{\sqrt{41}} \cdot \dfrac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{24}{41}\sqrt{41}$

T 62 [▶▶66] Gegeven is het rechthoekig trapezium $ABCD$ in figuur 4.70.
$AB = 6$, $AD = 1$ en $BC = 4$.
Bereken BE.



figuur 4.70

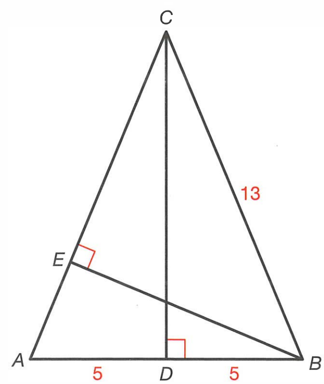
63 Zie figuur 4.71.
Bereken AD.



figuur 4.71

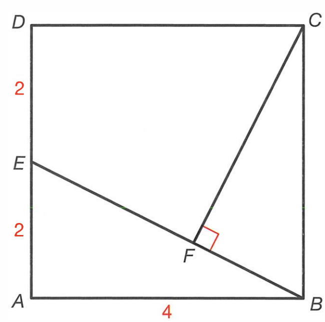
64 In figuur 4.72 is $\triangle ABC$ gelijkbenig met $AC = BC = 13$ en $AB = 10$.

a Bereken de lengte van de hoogtelijn CD.
b Bereken BE.



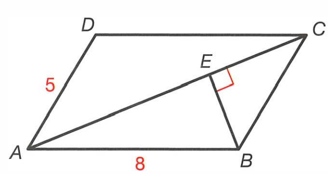
figuur 4.72

65 Zie figuur 4.73 met het vierkant $ABCD$.
Bereken CF.



figuur 4.73

A 66 Gegeven is het parallellogram $ABCD$ in figuur 4.74.
$AB = 8$, $AD = 5$ en de oppervlakte van het parallellogram is 32.
Bereken BE.



figuur 4.74

Terugblik

Oppervlakteformules

Bij oppervlakteberekeningen gebruik je de oppervlakteformules van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel.
Vaak kun je bij het berekenen van de oppervlakte een figuur opsplitsen in basisfiguren of aanvullen tot een basisfiguur.

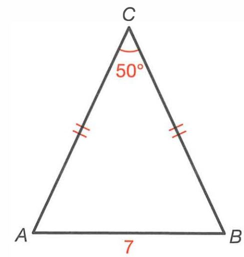
$O_{\text{driehoek}} = \frac{1}{2}bh$

$O_{\text{parallellogram}} = bh$

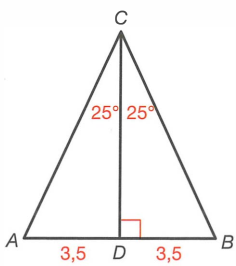
$O_{\text{trapezium}} = \frac{1}{2}(a + b)h$

$O_{\text{cirkel}} = \pi r^2$

Goniometrische verhoudingen



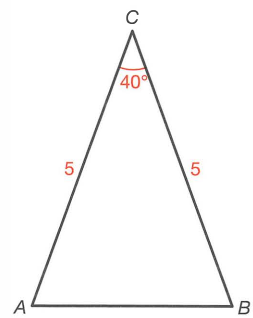
Om de oppervlakte van $\triangle ABC$ in de figuur hiernaast te berekenen, heb je goniometrie nodig. Gebruik de formule $O = \frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte}$.
Teken de hoogtelijn CD.



$$\tan(25°) = \frac{3{,}5}{CD}$$

$$CD = \frac{3{,}5}{\tan(25°)} = 7{,}50...$$

$$O(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7{,}50... \approx 26{,}3$$

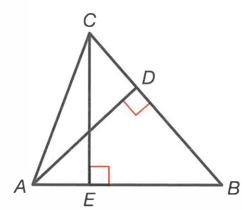


Van $\triangle ABC$ in de figuur hiernaast zijn twee zijden en de ingesloten hoek gegeven. Je kunt de oppervlakte berekenen met de formule

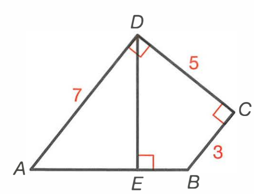
$O = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin(\angle C)$.

Je krijgt $O = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin(40°) \approx 8{,}03$.

De zijde × hoogte-methode

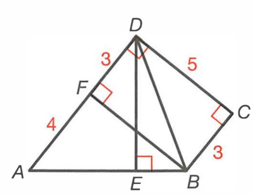


Met de zijde × hoogte-methode zijn lengten van lijnstukken te berekenen bij loodrechte stand.
In driehoek ABC hiernaast geeft de zijde × hoogte-methode $AB \times CE = BC \times AD$.
Kortweg: zijde × hoogte = zijde × hoogte.



Bij het berekenen van DE in de figuur hiernaast gebruik je de zijde × hoogte-methode.
Teken eerst BF loodrecht op AD en bereken AB in driehoek ABF.

$AF = 7 - 3 = 4$ en $BF = CD = 5$, dus $AB = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$.



De zijde × hoogte-methode in driehoek ABD geeft $AB \times DE = AD \times BF$.

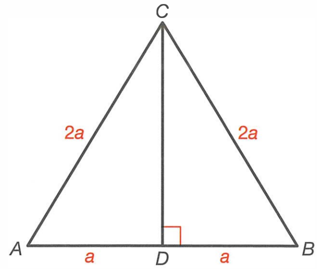
Invullen geeft $\sqrt{41} \cdot DE = 7 \cdot 5$, dus $DE = \frac{35}{\sqrt{41}} = \frac{35}{41}\sqrt{41}$.

4.4 Vergelijkingen in de meetkunde

O 67 Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde $2a$. Zie figuur 4.75.

a Toon aan dat $CD = a\sqrt{3}$.

b Gegeven is $CD = 7\sqrt{3}$.
Bereken AC.

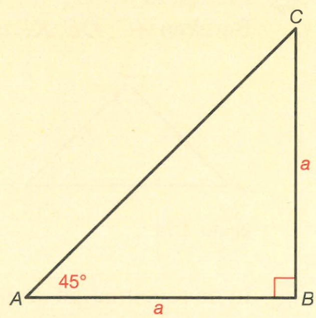


figuur 4.75

Theorie A Bijzondere rechthoekige driehoeken

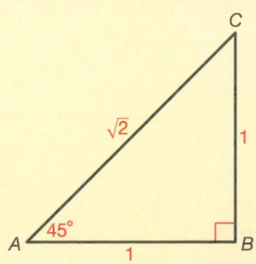
In opgave 67 heb je ontdekt dat de zijden van een halve gelijkzijdige driehoek de lengten a, $2a$ en $a\sqrt{3}$ hebben.
De verhouding van de zijden is dus $1 : 2 : \sqrt{3}$.

In figuur 4.76 is de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden a getekend.
In $\triangle ABC$ is $AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = a^2 + a^2$
$AC^2 = 2a^2$
Dus $AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.
De verhouding van de zijden in een gelijkbenige rechthoekige driehoek is dus $1 : 1 : \sqrt{2}$.

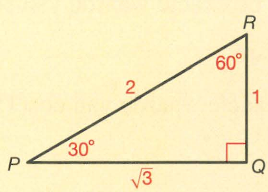


figuur 4.76

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.



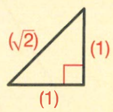
De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.



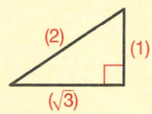
In figuur 4.77 is $AC = 12$.

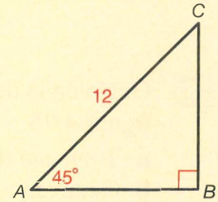
Dit geeft $AB = \dfrac{12}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

Van AB naar AC keer $\sqrt{2}$, dus van AC naar AB gedeeld door $\sqrt{2}$.



Van QR naar PQ keer $\sqrt{3}$, dus van PQ naar QR gedeeld door $\sqrt{3}$.



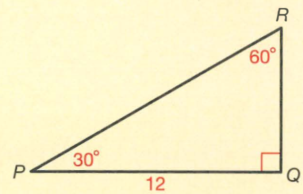


figuur 4.77

In figuur 4.78 is $PQ = 12$.

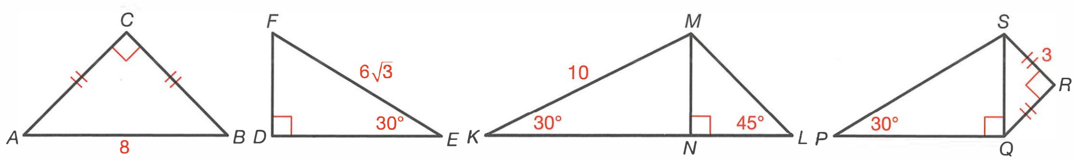
Dit geeft $QR = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = \dfrac{12}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ en

$PR = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.



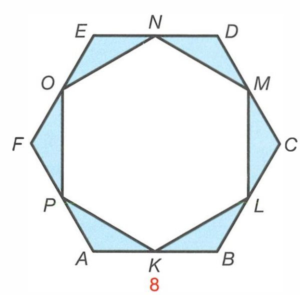
figuur 4.78

68 Zie figuur 4.79.
Bereken AC, DE, KL en PQ.



figuur 4.79

69 In de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde 8 wordt de regelmatige zeshoek $KLMNOP$ getekend. Hierbij zijn K, L, M, N, O en P middens van zijden. Zie figuur 4.80.
Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied



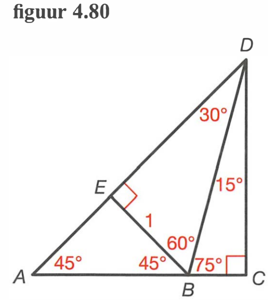
figuur 4.80

A 70 In figuur 4.81 is $BE = 1$.

a Bereken CD en BC.

b Toon aan dat de exacte waarde van $\sin(15°)$ gelijk is aan $-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$.

c Bereken de exacte waarde van $\cos(15°)$.



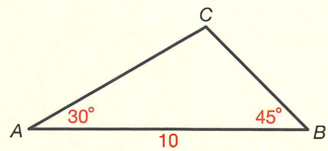
figuur 4.81

Theorie B Vergelijkingen bij meetkundige figuren

Sommige meetkundige problemen kun je aanpakken door een lijnstuk x te stellen, andere lijnstukken in x uit te drukken en hiermee een vergelijking op te stellen.

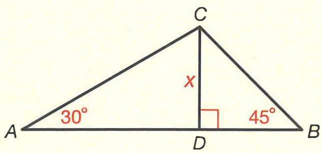
Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 10$, $\angle A = 30°$ en $\angle B = 45°$.
Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.



figuur 4.82

Uitwerking



Stel de hoogte $CD = x$, dan is $AD = x\sqrt{3}$ en $BD = x$.
Uit $AD + DB = AB$ volgt

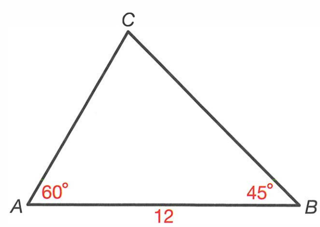
$x\sqrt{3} + x = 10$

$x(\sqrt{3} + 1) = 10$

$x = \dfrac{10}{1 + \sqrt{3}}$

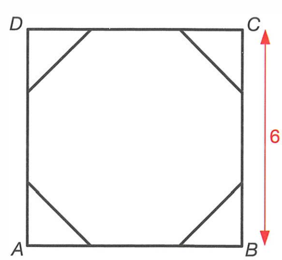
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \dfrac{10}{1 + \sqrt{3}} = \dfrac{50}{1 + \sqrt{3}}$

71 Gegeven is driehoek ABC met $AB = 12$, $\angle A = 60°$ en $\angle B = 45°$.
Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.



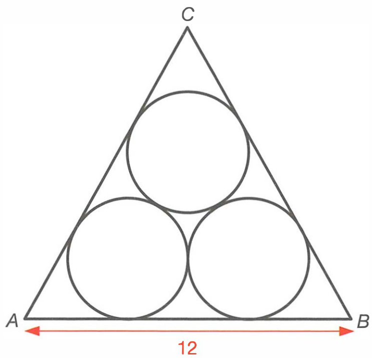
figuur 4.83

72 Van het vierkant $ABCD$ met zijde 6 worden bij de hoekpunten driehoeken weggelaten zodat een regelmatige achthoek ontstaat. Zie figuur 4.84.
Bereken exact de zijde van de achthoek.

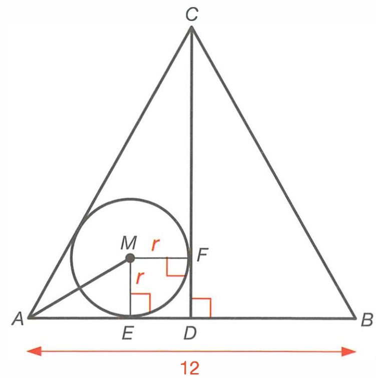


figuur 4.84

A 73 In een gelijkzijdige driehoek met zijde 12 passen precies drie even grote cirkels. Zie figuur 4.85.
In deze opgave ga je de straal van zo'n cirkel berekenen.
Met deze berekening is in figuur 4.86 een begin gemaakt door enkele hulplijnen te tekenen.
Bereken de exacte waarde van de straal.

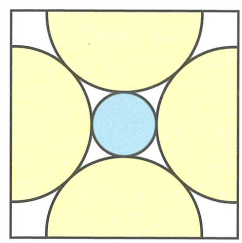


figuur 4.85



figuur 4.86

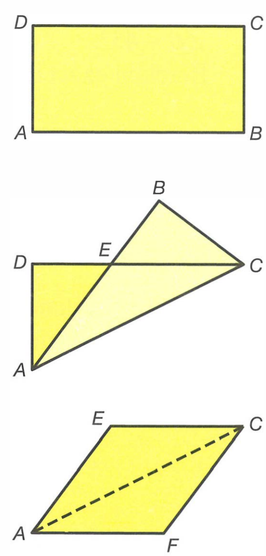
D 74 In de gelijkzijdige driehoek met de drie even grote cirkels van figuur 4.85 past binnen deze drie cirkels precies een kleine cirkel.
Bereken de exacte waarde van de straal van deze kleine cirkel.



figuur 4.87

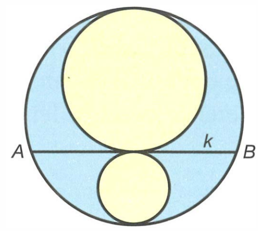
D 75 **a** De vier halve cirkels in figuur 4.87 raken elkaar. Ze hebben straal 1 en hun middelpunten zijn de middens van de zijden van het vierkant.
Bereken exact de straal van het cirkeltje dat elk van de halve cirkels raakt.

b Een rechthoekig vel papier *ABCD* van 12 bij 24 cm wordt om de diagonaal *AC* omgevouwen. De stukken *AED* en *ECB* die dan buiten het dubbel overlapte gebied uitsteken, worden afgesneden. Het stuk papier dat je overhoudt wordt uitgevouwen. Je krijgt dan ruit *AFCE*. Zie figuur 4.88.
Bereken de zijde van de ruit.



figuur 4.88

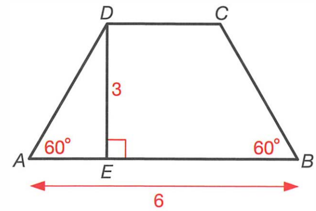
D 76 Binnen een cirkel bevinden zich twee kleinere cirkels: de cirkels raken elkaar en de drie middelpunten liggen op één lijn. Zie figuur 4.89. De oppervlakte van het blauwe gedeelte is 2π. De gemeenschappelijke raaklijn van de twee kleinere cirkels is k en deze lijn snijdt de grote cirkel in de punten A en B.
Bereken de lengte van het lijnstuk AB.



figuur 4.89

O 77 Gegeven is het gelijkbenig trapezium $ABCD$ in figuur 4.90.
$\angle A = \angle B = 60°$, $AB = 6$ en de hoogte $DE = 3$.

a Toon aan dat $CD = 6 - 2\sqrt{3}$.
b Bereken exact de oppervlakte van het trapezium.



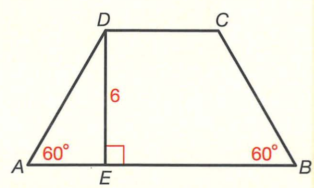
figuur 4.90

Theorie C Zijden berekenen bij gegeven oppervlakte

In opgave 77 is met de gegevens de oppervlakte van het trapezium te berekenen. In het voorbeeld zie je hoe je te werk gaat als je een zijde moet berekenen van een trapezium waarvan de oppervlakte is gegeven.

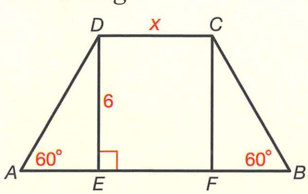
Voorbeeld

Gegeven is het gelijkbenige trapezium $ABCD$ met $\angle A = \angle B = 60°$ en hoogte $DE = 6$. De oppervlakte van het trapezium is 30.
Bereken de exacte lengte van CD.



figuur 4.91

Uitwerking



figuur 4.92

In $\triangle AED$ is $\angle A = 60°$ en $DE = 6$,

dus $AE = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

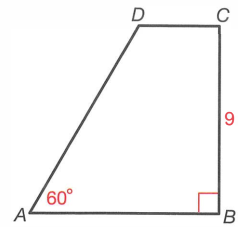
Stel $CD = x$, dan is
$AB = 2\sqrt{3} + x + 2\sqrt{3} = x + 4\sqrt{3}$.

$O(ABCD) = \frac{1}{2}\,(AB + CD) \cdot DE = \frac{1}{2}\,(x + 4\sqrt{3} + x) \cdot 6 = 3(2x + 4\sqrt{3}\,) = 6x + 12\sqrt{3}$

$O(ABCD) = 30$ geeft $6x + 12\sqrt{3} = 30$
$6x = 30 - 12\sqrt{3}$
$x = 5 - 2\sqrt{3}$

Dus $CD = 5 - 2\sqrt{3}$.

78 Gegeven is het rechthoekig trapezium in figuur 4.92.
$\angle A = 60°$ en $BC = 9$.
De oppervlakte van het trapezium is 54.
Bereken exact de lengte van CD.



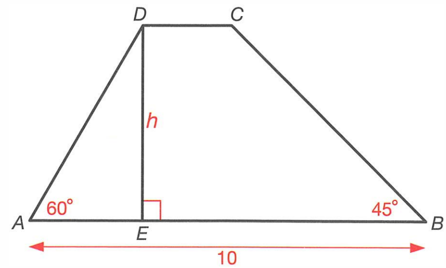
figuur 4.92

79 Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $AB = 10$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$ en hoogte h.

a Neem $h = 4$ en bereken exact de oppervlakte van het trapezium.

b Neem $CD = 2$ en bereken exact de oppervlakte van het trapezium.

c De oppervlakte van het trapezium is 25. Bereken CD in twee decimalen nauwkeurig.



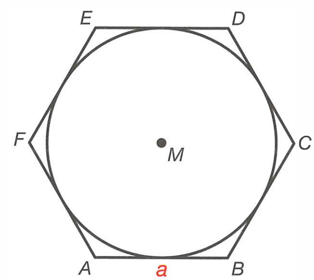
figuur 4.93

A 80 Gegeven is de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde a en zijn ingeschreven cirkel. De ingeschreven cirkel van een veelhoek is de cirkel die raakt aan alle zijden van de veelhoek. Zie figuur 4.94.

a Druk de oppervlakte van de zeshoek uit in a.

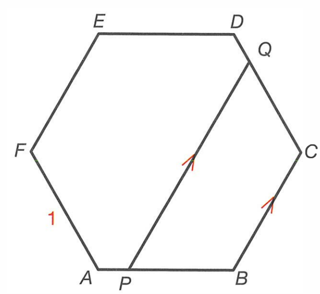
b Druk de oppervlakte van de ingeschreven cirkel uit in a.

c De totale oppervlakte van de vlakdelen die binnen de zeshoek, maar buiten de cirkel liggen is 10. Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 4.94

A 81 Gegeven is de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde 1. Het punt P ligt op zijde AB en het punt Q ligt op zijde CD zo, dat PQ // BC. Zie figuur 4.95.
Bereken exact de lengte van PQ in het geval $O(APQDEF) = 2 \cdot O(PBCQ)$.

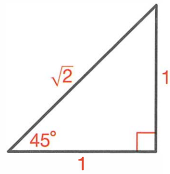


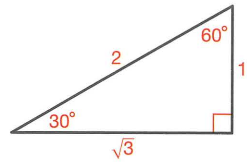
figuur 4.95

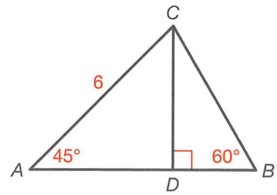
Terugblik

Bijzondere rechthoekige driehoeken

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.
De zijden van een rechthoekige driehoek met scherpe hoeken van 30° en 60° verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.
Je gebruikt deze verhoudingen om in de driehoek hiernaast de lengte van AB te berekenen.







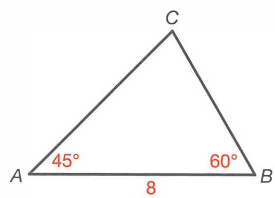
Je krijgt $AD = CD = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ en

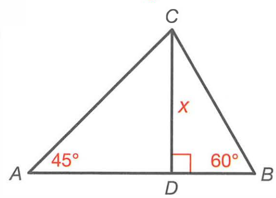
$$BD = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}.$$

Dus $AB = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

Vergelijkingen bij meetkundige figuren

Om exact de oppervlakte van $\triangle ABC$ in de figuur hiernaast te berekenen, teken je de hoogtelijn CD en stel je de hoogte $CD = x$.
Daarna druk je AD en BD uit in x en gebruik je $AD + BD = 8$ om een vergelijking op te stellen.





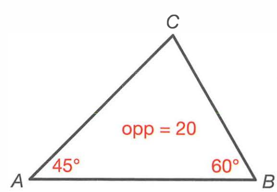
Je krijgt $AD = x$ en $BD = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}$, dus $x + \frac{1}{3}x\sqrt{3} = 8$

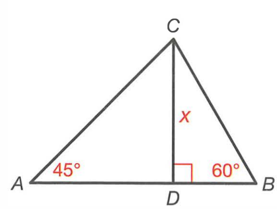
$$x(1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = 8$$
$$x = \frac{8}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{24}{3 + \sqrt{3}}$$

Dit geeft $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \dfrac{24}{3 + \sqrt{3}} = \dfrac{96}{3 + \sqrt{3}}$.

Zijden berekenen bij gegeven oppervlakte

De oppervlakte van de driehoek hiernaast is 20. Om exact de zijde BC te berekenen, teken je de hoogtelijn CD en stel je $CD = x$. Daarna druk je AD en BD uit in x en gebruik je $O(\triangle ABC) = 20$ om x te berekenen.





Je krijgt $AD = x$ en $BD = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}$, dus $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}x\sqrt{3}) \cdot x = 20$

$$\tfrac{1}{2}x^2(1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = 20$$
$$x^2(1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = 40$$
$$x^2 = \frac{40}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{120}{3 + \sqrt{3}}$$

Dus $x = \sqrt{\dfrac{120}{3 + \sqrt{3}}}$ en

$$BC = CD \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = x = \sqrt{\frac{120}{3 + \sqrt{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{120}{3\sqrt{3} + 3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{40}{1 + \sqrt{3}}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{10}{1 + \sqrt{3}}}$$

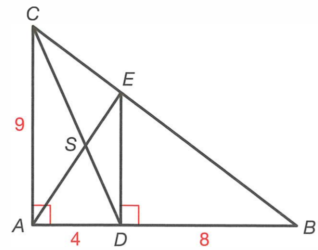
Diagnostische toetS

4.1 Goniometrische verhoudingen en gelijkvormigheid

1 Gegeven is driehoek ABC met $\angle A = 38°$, $\angle B = 90°$ en $AC = 20$.
Het punt D ligt op AB zo, dat $BD = 6$.
Bereken $\angle BDC$ en $\angle ACD$.

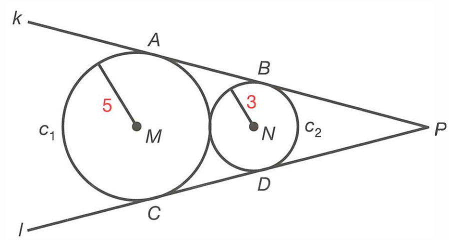
2 Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90°$, $AB = 12$ en $AC = 9$.
Het punt D ligt op AB zo, dat $AD = 4$. Het punt E ligt op BC zo, dat $\angle BDE = 90°$.
Het snijpunt van AE en CD is S. Zie figuur 4.96.

a Bereken BE en DE.
b Bereken AS.



figuur 4.96

3 Cirkel c_1 met middelpunt M en straal 5 raakt cirkel c_2 met middelpunt N en straal 3.
De lijn k door het punt P raakt c_1 in het punt A en c_2 in het punt B.
De lijn l door het punt P raakt c_1 in het punt C en c_2 in het punt D. Zie figuur 4.97.
Bereken exact de lengte van AP.



figuur 4.97

4.2 De sinusregel en de cosinusregel

4 Van $\triangle ABC$ is $\alpha = 40°$, $\beta = 55°$ en $a = 6$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig $O(\triangle ABC)$.

5 Van $\triangle ABC$ is $\alpha = 35°$ en $b = 5$.

a Neem $a = 3$ en bereken beide mogelijkheden van γ.
b Voor welke waarden van a is er maar één driehoek mogelijk? Rond in het antwoord af op twee decimalen.

6 Van $\triangle ABC$ is $PQ = 4$, $PR = 5$ en $QR = 6$.
Het punt M is het midden van QR.

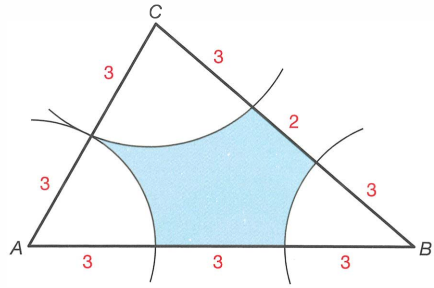
a Bereken $\angle Q$.
b Bereken PM in twee decimalen nauwkeurig.

7 Van het parallellogram $ABCD$ is $AB = 15$ en $BC = 8$.
De lengte van diagonaal BD is 10.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig $O(ABCD)$.
b Bereken in één decimaal nauwkeurig de lengte van diagonaal AC.

4.3 Lengten en oppervlakten

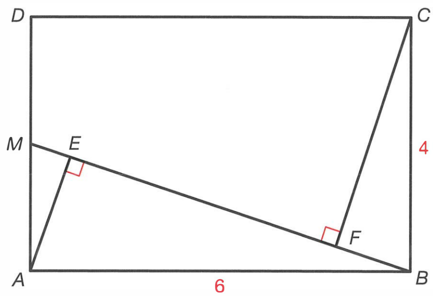
8 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 9$, $AC = 6$ en $BC = 8$. De punten A, B en C zijn middelpunten van cirkels met straal 3. Zie figuur 4.98.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van het vlakdeel dat binnen de driehoek maar buiten de cirkels ligt.



figuur 4.98

9 Van een regelmatige achthoek is de oppervlakte van de omgeschreven cirkel 25π.
Bereken in één decimaal nauwkeurig de omtrek en de oppervlakte van de achthoek.

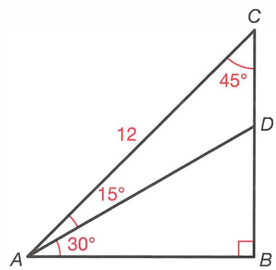
10 Zie de rechthoek $ABCD$ in figuur 4.99 met $AB = 6$ en $BC = 4$. M is het midden van AD en AE en CF staan loodrecht op BM.
Bereken exact AE en CF.



figuur 4.99

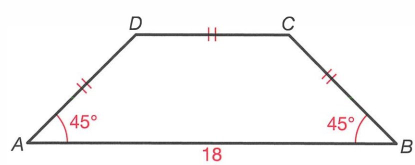
4.4 Vergelijkingen in de meetkunde

11 Van de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC is $\angle B = 90°$ en $AC = 12$.
Het punt D ligt op BC zo, dat $\angle BAD = 30°$. Zie figuur 4.100.
Bereken exact de oppervlakte van driehoek ACD.



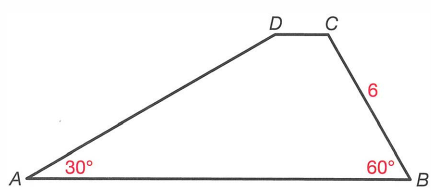
figuur 4.100

12 In het gelijkbenig trapezium $ABCD$ is $\angle A = \angle B = 45°$, $AB = 18$ en $AD = BC = CD$.
Zie figuur 4.101.
Bereken exact de lengte van AD.



figuur 4.101

13 Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ en $BC = 6$. De oppervlakte van het trapezium is 36. Zie figuur 4.102.
Bereken exact de lengte van AB.



figuur 4.102


We eat problems for breakfast.
Preferably unsolved ones...
Internationale Wiskunde Olympiade
Nederland 2011
IMO 2011

De Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen tot en met de vijfde klas havo/vwo die wel houden van wat wiskundige uitdaging. In januari of februari vindt de eerste ronde plaats op alle scholen die zich hebben aangemeld. Je krijgt dan 12 speelse en uitdagende opgaven voorgeschoteld waar je 2 uur de tijd voor krijgt. Voorbeelden van de opgaven van de afgelopen jaren vind je hierna. Het gaat bij de A-vragen om meerkeuzevragen en bij de B-vragen alleen maar om de eindantwoorden in exacte vorm, zoals $\frac{11}{81}$, $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi + 1$. Je mag geen rekenmachine of een lijst met formules gebruiken, alleen pen en papier, passer en geodriehoek.
Voor de opgaven kun je twee punten per A-vraag halen en vijf punten per B-vraag. Aan het eind van de vragen van elk jaar is in een tabel opgenomen welk percentage van de deelnemers uit klas 4 vwo de betreffende opgave goed had opgelost. Verder staat erbij hoeveel punten minimaal nodig waren om uitgenodigd te worden voor de volgende ronde.

Sinds 2010 is er een tweede ronde die in maart regionaal wordt georganiseerd. De beste 120 à 140 van de tweede ronde worden uitgenodigd voor de eindronde, die in september van het volgende schooljaar altijd op de Technische Universiteit Eindhoven plaatsvindt. Als je bij de eindronde hoog eindigt, krijg je een uitnodiging voor een trainingsprogramma dat parallel aan je schoolwerk loopt van november tot en met juni. De beste 6 leerlingen vormen het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Die is in 2016 in Hong Kong en in 2017 in Brazilië. Er doen zo'n 100 landen aan mee.

Je kunt aan je wiskundedocent laten weten dat het je wel leuk lijkt om mee te doen; hij of zij kan de school dan opgeven via de site www.wiskundeolympiade.nl of via de inschrijfformulieren die elke school in september krijgt opgestuurd via de SLO.

Het werk van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade wordt mogelijk gemaakt door financiële bijdragen en steun van:
Technische Universiteit Eindhoven: Faculteit Wiskunde en Informatica, Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap, Stichting DIAMANT, Nederlandse Onderwijs Commissie Wiskunde, CITO, ORTEC, Transtrend BV, All Options BV, The Derivatives Technology Foundation, Centraal Bureau voor de Statistiek, Stichting Compositio Mathematica, Pythagoras wiskundetijdschrift voor jongeren, Epsilon Uitgaven, Veen Magazines, Natuurwetenschap & Techniek, CANdiensten.

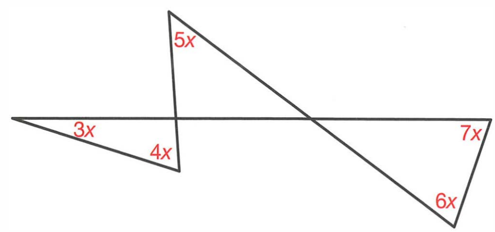
NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

2006

A-vragen

1 Aan het begin van een gokspelletje hadden Ali, Bente en Chris geld in de verhouding 11 : 8 : 5. Aan het einde van het spel was dezelfde hoeveelheid geld verdeeld in de verhouding 4 : 3 : 2.
Welke uitspraak is waar?
A Ali verloor, Bente verloor en Chris won
B Ali won, Bente verloor en Chris won
C Ali won, Bente verloor en Chris speelde quitte
D Ali verloor, Bente speelde quitte en Chris won
E alle antwoorden **A** t/m **D** zijn niet juist

2 In de figuur is een aantal hoeken in termen van x gegeven.
De waarde van x in graden is:
A 6 **C** 10 **E** 15
B 8 **D** 12



3 Als je de getallen 1 t/m 12 achter elkaar opschrijft krijg je het getal 123456789101112 dat uit 15 cijfers bestaat. Als je de getallen 1 t/m n achter elkaar opschrijft dan krijg je een getal dat uit 1788 cijfers bestaat.
Wat is de waarde van n?
A 533 **B** 632 **C** 645 **D** 1599 **E** 1689

4 Hoeveel gehele positieve getallen kleiner dan 1000 zijn er waarbij de som van de cijfers gelijk is aan 6?
A 7 **B** 16 **C** 27 **D** 28 **E** 35

5 In een magisch vierkant is de som van de drie getallen in elke rij, de som van de drie getallen in elke kolom en de som van de drie getallen in elk van de twee diagonalen steeds hetzelfde getal.
In het magische vierkant hiernaast zijn vier van de negen getallen gegeven. Wat is de waarde van N?
A 4 **C** 10 **E** 17
B 9 **D** 13

	N	
11		15
12		10

6 2143 en 3421 zijn twee voorbeelden van getallen die je kunt vormen door elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 precies één keer te gebruiken. Als je alle getallen die je kunt vormen door elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 precies één keer te gebruiken bij elkaar optelt, dan krijg je als antwoord:
A 5555 **B** 9999 **C** 11110 **D** 33330 **E** 66660

7 Wat is het kleinste positieve verschil tussen twee breuken met zowel in de teller als in de noemer een positief geheel getal kleiner dan of gelijk aan 10?

A $\frac{1}{100}$ **B** $\frac{1}{99}$ **C** $\frac{1}{90}$ **D** $\frac{1}{70}$ **E** $\frac{1}{10}$

8 Driehoek ABC is rechthoekig in C. Het punt P ligt op de zijde BC, het punt Q ligt op de zijde AC en het punt R ligt op de zijde AB zo, dat $BP = BR$ en $AQ = AR$.
Hoek PRQ is:

A 30° **B** 45° **C** 50° **D** 55° **E** 60°

B-vragen

1 Gegeven is een vierkant $ABCD$. Je begint in hoekpunt A. Bij iedere beurt mag je langs een zijde van een hoekpunt naar een ander hoekpunt lopen.
Hoeveel wandelingen van 10 beurten zijn er waarbij je na de 10 beurten weer in hoekpunt A terug bent? Tijdens een wandeling mag je onderweg A passeren.

2 Hoeveel getallen van vier cijfers zijn er met de volgende eigenschappen:
- het tweede cijfer is het gemiddelde van het eerste cijfer en het derde cijfer,
- het derde cijfer is het gemiddelde van het tweede cijfer en het vierde cijfer?

(Een getal begint niet met het cijfer 0.)

3 Binnen een vierkant $ABCD$ ligt een punt P.
E is het midden van de zijde CD.
Gegeven is: $AP = BP = EP = 10$.
Wat is de oppervlakte van vierkant $ABCD$?

4 $\overline{ab}$ is de notatie voor het getal dat je opschrijft met de cijfers a en b, waarbij $a \neq 0$.
Geef alle positieve gehele waarden van K waarvoor het volgende geldt:
- K is een positief geheel getal
- er bestaat een getal $\overline{ab}$ dat niet deelbaar is door 9 met $\overline{ab} = K \times (a + b)$.

NB: Voor foute waarden van K worden punten afgetrokken!

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage	56	64	62	45	51	81	38	48	14	13	21	13

De 121 leerlingen met een score van 25 of meer zijn uitgenodigd voor de eindronde.

2007

A-vragen

1 Het getal M bestaat uit 2007 enen achter elkaar geschreven, $M = 111...111$.
Wat is de som van de cijfers van het getal dat je krijgt als je M vermenigvuldigt met 2007?

A 2007 **B** 18036 **C** 18063 **D** 18084 **E** 4028049

2 In de volgende rijtjes staan telkens dezelfde vijf getallen.
Welk van de vijf rijtjes is juist geordend?

A $0{,}16 < \frac{1}{7} < \frac{13}{97} < \frac{17}{101} < \frac{5}{33}$

B $\frac{17}{101} < 0{,}16 < \frac{1}{7} < \frac{5}{33} < \frac{13}{97}$

C $\frac{1}{7} < 0{,}16 < \frac{5}{33} < \frac{17}{101} < \frac{13}{97}$

D $\frac{5}{33} < \frac{1}{7} < \frac{13}{97} < \frac{17}{101} < 0{,}16$

E $\frac{13}{97} < \frac{1}{7} < \frac{5}{33} < 0{,}16 < \frac{17}{101}$

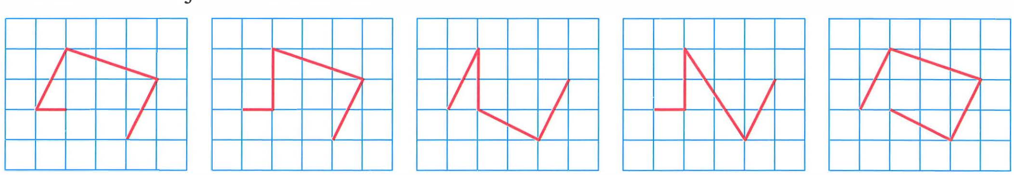
3 In de figuur staan negen roosterpunten.
Hoeveel driehoeken kun je tekenen met de hoekpunten in drie van deze negen punten?

A 76 **B** 84 **C** 92 **D** 496 **E** 504

4 Hoeveel paren (a, b) van positieve gehele getallen met $a + b < 100$ zijn er die voldoen aan de vergelijking $a + \frac{1}{b} = 13 \times \left(b + \frac{1}{a}\right)$?

A 5 **B** 7 **C** 9 **D** 13 **E** 28

5 Vijf roosterpunten zijn door vijf verschillende routes verbonden.
Welke van de vijf routes is het kortst?



A **B** **C** **D** **E**

6 Een rij getallen wordt als volgt opgebouwd:
Het eerste getal is 2. Het tweede getal is 2.
Elk volgend getal is het product van zijn twee voorgangers.
De rij wordt dus: 2, 2, 4, 8, 32, ...
Op welk cijfer eindigt het 2007^{e} getal in deze rij?

A 0 **B** 2 **C** 4 **D** 6 **E** 8

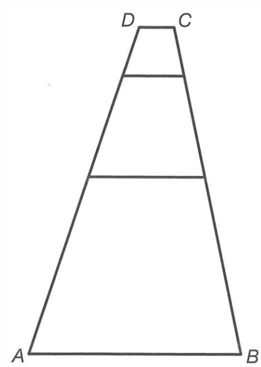
7 Heeft de vergelijking $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2007}$ een geheel getal als oplossing?
A ja, $n = 667$ **B** ja, $n = 669$ **C** ja, $n = 1003$ **D** ja, $n = 2006$ **E** nee

8 Negen stoelen staan in een rij achter een lange tafel. Zes leerlingen en drie leraren, de heer Aap, de heer Noot en mevrouw Mies, nemen plaats op deze stoelen. Eerst arriveren de drie leraren. Zij besluiten zo te gaan zitten dat elke leraar tussen twee leerlingen zit. Op hoeveel manieren kunnen de heer Aap, de heer Noot en mevrouw Mies hun stoelen kiezen?
A 12 **B** 36 **C** 60 **D** 84 **E** 630

B-vragen

1 Nummer één kaartje met '1', twee kaartjes met '2', drie kaartjes met '3', ..., vijftig kaartjes met '50'. Stop al deze $1 + 2 + 3 + ... + 50 = 1275$ kaartjes in een doos en schud ze goed door elkaar.
Hoeveel kaartjes moet je tenminste uit de doos pakken om er zeker van te zijn dat je minimaal 10 kaartjes met hetzelfde nummer hebt?

2 Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met zijden $AB = 16$, $BC = 21$, $CD = 2$ en $DA = 28$. Verder is AB evenwijdig met CD. Twee lijnen die evenwijdig zijn met AB en CD verdelen vierhoek $ABCD$ in drie gelijkvormige vierhoeken.
Bereken de omtrek van de kleinste van die drie vierhoeken.



3 Voor elk tweetal positieve gehele getallen a en b definiëren we een bewerking $a \otimes b$ met de volgende drie eigenschappen:

1 $a \otimes a = a + 2$

2 $a \otimes b = b \otimes a$

3 $\dfrac{a \otimes (a + b)}{a \otimes b} = \dfrac{a + b}{b}$

Bepaal $8 \otimes 5$.

4 Een vlag in de vorm van een gelijkzijdige driehoek is aan twee hoekpunten opgehangen aan de toppen van twee verticale palen. De ene paal heeft een lengte 4 en de andere paal een lengte 3. Verder is gegeven dat het derde hoekpunt van de vlag precies de grond raakt.
Bepaal de lengte van de zijde van de vlag.

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage	34	65	38	36	55	39	17	27	17	17	1	1

De 122 leerlingen met een score van 20 of meer zijn uitgenodigd voor de eindronde.

2008

A-vragen

1 Alex, Birgit, Cedric, Dion en Ersin schrijven allemaal hun naam op een lootje en stoppen die 5 lootjes in een grote hoed. Daarna trekken ze één voor één een van de lootjes zonder die weer terug te stoppen. Daarbij trekt Birgit het lootje van Alex, Cedric trekt Dions lootje en Dion trekt Ersins lootje. Verder trekt Ersin niet het lootje van Cedric.
Wiens lootje trekt Alex? Alex trekt het lootje van:

A Alex **B** Birgit **C** Cedric **D** Dion **E** Ersin

2 In een magisch vierkant zijn de drie rijsommen, de drie kolomsommen en de twee diagonaalsommen aan elkaar gelijk. (Een *rijsom* is de som van de getallen op een rij, etc.) Van het hier afgebeelde 3 × 3-magisch vierkant zijn drie getallen ingevuld.
Welk getal moet er staan op de plaats van het vraagteken?

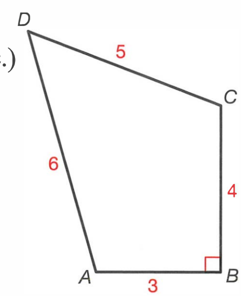
		7
?		
	10	3

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 9

3 Als je 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 uitrekent kom je uit op 720.
Hoeveel delers heeft het getal 720? (Een *deler* van een getal *n* is een positief geheel getal waardoor *n* deelbaar is. Voorbeelden: de delers van 6 zijn 1, 2, 3 en 6; de delers van 11 zijn 1 en 11.)

A 6 **B** 8 **C** 20 **D** 30 **E** 36

4 Van een vierhoek $ABCD$ is gegeven: $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 5$, $|DA| = 6$ en $\angle ABC = 90°$. ($|AB|$ staat voor de lengte van lijnstuk AB, etc.)
Hoe groot is de oppervlakte van vierhoek $ABCD$?

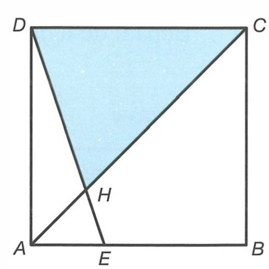


A 16
B 18
C $18\frac{1}{2}$
D 20
E $6 + 5\sqrt{11}$

5 Hoeveel getallen van vijf cijfers (zoals 12345 of 78000; het eerste cijfer nooit 0) zijn er die op een 4 eindigen en door 6 deelbaar zijn?

A 1500 **B** 2000 **C** 3000 **D** 7500 **E** 8998

6 Op de zijde AB van vierkant $ABCD$ met $|AB| = 3$ ligt het punt E zo, dat $|AE| = 1$ en $|EB| = 2$.
AC en DE snijden elkaar in het punt H.
Hoe groot is de oppervlakte van driehoek CDH?



A $\frac{9}{8}$ **B** 2 **C** $\frac{21}{8}$ **D** 3 **E** $\frac{27}{8}$

7 De 7 letterblokjes G E N E G E N worden door elkaar gehutseld. Dan krijg je bijvoorbeeld E E E N N G G of G E E N G E N.
Hoeveel verschillende “woorden” van lengte 7 zijn er in totaal te vormen?
(Als *woord* telt elke volgorde van de 7 letters.)
A 210 **B** 420 **C** 840 **D** 1260 **E** 5040

8 Hoeveel verschillende (reële) oplossingen heeft de vergelijking
$((x^2 - 2)^2 - 5)^2 = 1$?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

B-vragen

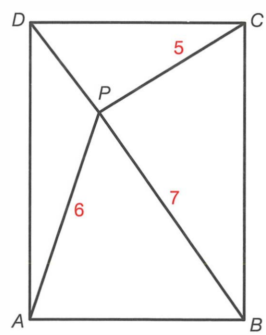
1 Zowel de rijen als de kolommen van een 8×8-schaakbord zijn genummerd van 1 t/m 8. Op elk veld van het schaakbord wordt een aantal graankorrels gelegd dat gelijk is aan het product van het rijnummer en het kolomnummer.
Hoeveel graankorrels liggen er in totaal op het schaakbord?

2 Van een 50-tal verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ is de som gelijk aan 2900.
Wat is het kleinst mogelijke aantal *even* getallen onder deze 50 getallen?

3 Voor een getal x geldt dat $x + \frac{1}{x} = 5$. We definiëren $n = x^3 + \frac{1}{x^3}$.
Het blijkt dat n een geheel getal is.

Bereken n. (Schrijf n in gewone decimale notatie.)

4 Binnen een rechthoek $ABCD$ bevindt zich een punt P met $|AP| = 6$, $|BP| = 7$ en $|CP| = 5$.
Hoe lang is lijnstuk DP?



opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage	77	68	46	35	34	50	23	13	41	9	1	1

De 44 leerlingen uit vwo 4 met een score van 22 of meer zijn uitgenodigd voor de eindronde.

Gemengde opgaven

1 Functies en grafieken

1 Gegeven zijn de punten $A(2, 2)$ en $B(7, 4)$.
De lijn k gaat door de punten A en B.
De lijn l: $y = ax + 11$ gaat door het punt B en de lijn m: $y = 2x + b$ gaat door het punt A.
De lijnen l en m snijden elkaar in het punt C.
De lijn m snijdt de x-as in het punt D en de lijn l snijdt de x-as in het punt E.
Het punt P is het midden van het lijnstuk DE.
De lijn n gaat door de punten C en P.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van k en n.

2 Het aantal sterfgevallen aan hart- en vaatziekten per 100 000 mensen in Nederland is al sinds de jaren 60 van de vorige eeuw aan het afnemen. Neem aan dat deze afname lineair verloopt. In 1985 was de sterfte aan hart- en vaatziekten in Nederland 485 per 100 000 inwoners en in 2010 was dit 200 per 100 000 inwoners.
Ook de sterfte door kanker gerekend per 100 000 inwoners neemt de laatste jaren af, maar lang niet zo sterk als de sterfte aan hart- en vaatziekten. In 1988 was de sterfte door kanker 253 per 100 000 inwoners en in 2010 was dat 220. Neem ook aan dat deze afname lineair verloopt.
Het aantal inwoners van Nederland neemt nog steeds toe. Neem aan dat deze toename sinds 1990 lineair verloopt. In dat jaar telde Nederland 15,0 miljoen inwoners. In 2010 was dat toegenomen tot 16,7 miljoen.

a Stel de formule op van het aantal sterfgevallen H aan hart- en vaatziekten per 100 000 inwoners als functie van de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.

b Stel de formule op van het aantal sterfgevallen K door kanker per 100 000 inwoners als functie van de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.

c Stel de formule op van het aantal inwoners N van Nederland in miljoenen als functie van de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.

d Bereken met behulp van de formules in welk jaar het aantal sterfgevallen per 100 000 inwoners aan hart- en vaatziekten gelijk was aan de sterfte door kanker.

e De formule van het totaal aantal sterfgevallen A in Nederland aan hart- en vaatziekten is van de vorm $A = at^2 + bt + c$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ in 1990.
Bereken a, b en c.

3 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5 - |1\frac{1}{2}x - 3|$ en $g(x) = x - 1 + |2x - 3|$.

a Teken de grafieken van f en g in één figuur.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

c De lijn $y = 3$ snijdt de grafieken van f en g van links naar rechts in de punten A, B, C en D.
Onderzoek algebraïsch welke van de lijnstukken AB, BC of CD de kleinste lengte heeft.

In de figuur hiernaast is de grafiek van de functie $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ geplot.
De grafiek van h bestaat uit stukken van drie verschillende parabolen.

d Geef van elk van deze parabolen de formule in de vorm $y = ax^2 + bx + c$ en geef van de drie parabolen het domein en het bereik van het gedeelte dat is geplot.

figuur G.1

4 Bereken exact de oplossingen.

a $7x^2 = 5x$

b $2x^2 + x = 3$

c $(x + 2)(x - 6) = 9$

d $(x - 3)^2 - (x + 1)^2 = x^2 - 1$

e $(2x - 3)^2 = 36$

f $4 - (x - 2)^2 = 7x - 3$

5 **a** De vergelijking $px^2 + 6x + 3p = 0$ heeft twee oplossingen.
Bereken p.

b Van de vergelijking $x^2 + px - 6p^2 = 0$ is $x = 6$ een oplossing.
Bereken p en de bijbehorende andere oplossing.

c De vergelijking $px^2 - 2px + 4 = 0$ heeft precies één oplossing.
Bereken p en de bijbehorende oplossing.

6 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

a Bereken de extreme waarden van f.

b Bereken B_f in het geval $D_f = [0, 3]$.

7 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 - 12x$. De functie heeft drie extreme waarden.

a Bereken de extreme waarden in twee decimalen nauwkeurig.

b De lijn $y = a$ met a geheel snijdt de grafiek van f in de punten A en B, waarbij $AB < 1\frac{1}{2}$.
Onderzoek welke waarden a kan aannemen.

8 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\frac{1}{2}$. De grafiek van f heeft top T, snijdt de x-as in de punten A en B en de y-as in het punt C.

a Teken de grafiek van f.
b Geef het bereik en de extreme waarde van f.
c Stel de formule van de lijn TC op.
d Bereken de oppervlakte van driehoek ABT.
e Bereken de exacte waarde van a waarvoor $B_f = [-4, 2]$ bij $D_f = [a, 5]$.

9 Gegeven is de functie $f(x) = |x^2 - x - 6|$.

a Teken de grafiek van f.
b Neem $D_f = [0, 4]$ en bereken B_f.
c Geef de kleinste waarde van a waarvoor de functie f met $D_f = [a, \rightarrow\rangle$ een inverse functie heeft en teken in één figuur voor deze waarde van a de grafieken van f en f^{inv}.
d Geef de grootste waarde van b waarvoor de functie f met $D_f = [2, b]$ een inverse functie heeft en teken in één figuur voor deze waarde van b de grafieken van f en f^{inv}.

10 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + 4$.
Bereken algebraïsch voor welke p

a de functie f_p een positief minimum heeft
b de top van de grafiek van f_p op de lijn k: $y = -5$ ligt
c de top van de grafiek van f_p op de lijn l: $y = -3x + 8$ ligt.

Er is een kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

d Stel de formule op van deze kromme.

11 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^2 + 4px + \dfrac{6}{p}$.

a Bereken de kleinste waarde van a waarvoor de functie f_{-1} met $D_{f_{-1}} = [a, \rightarrow\rangle$ een inverse functie heeft en teken in één figuur voor deze waarde van a de grafieken van f_{-1} en f_{-1}^{inv}.
b De grafieken van f_{-1} en f_{-1}^{inv} van vraag a snijden elkaar in het punt A.
Bereken exact de coördinaten van A.
c Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

12 Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}2x^2 - 2x + 2$ en $g(x) = 0{,}2x^2 - 3$.
Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $f(x) < g(x)$
b $f(x) > 0$
c $|g(x)| < 2$
d $f(x) \cdot g(x) > 0$

2 De afgeleide functie

13 Een mountainbiker rijdt in heuvelachtig gebied. De tijd-afstandformule is $s = \dfrac{500t^2}{t^2 + 400}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden met $0 \leq t \leq 50$.

a Bereken in km/uur de snelheid van de mountainbiker op $t = 15$ en op $t = 30$.

Na 50 seconden verandert de snelheid niet meer.

b Hoeveel meter heeft de mountainbiker na 1 minuut afgelegd?

14 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5x + 6}{\sqrt{2x + 9}}$.

a De lijn l raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = {^-4}$.
Stel de formule van l op.

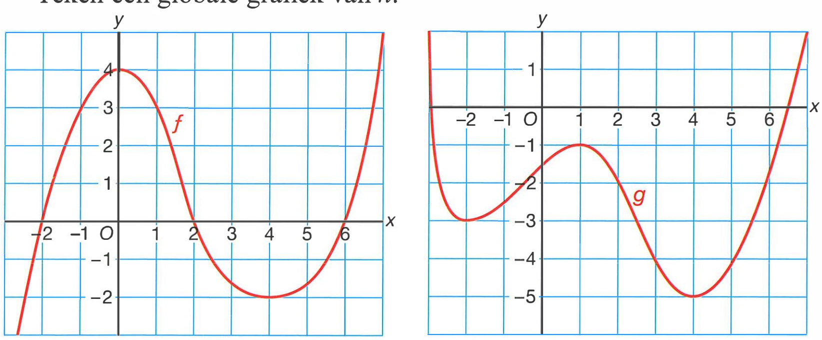
b De grafiek van f snijdt de y-as in het punt B.
Stel de formule op van de raaklijn k in B. Rond de richtingscoëfficiënt af op twee decimalen.

c De lijn m raakt de grafiek van f in het punt C met $x_C = 8$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x-coördinaat van het snijpunt van m met de x-as.

15 [▶ WERKBLAD] In figuur G.2 zie je de grafieken van de functies f en g.

a Schets de hellinggrafieken van f en g.

b De grafiek van f is de hellinggrafiek van de functie h.
Teken een globale grafiek van h.



figuur G.2

16 **a** Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$.
Bereken $f'(x)$ met behulp van een limiet.

b Gegeven is de functie $g(x) = x^3 - 4x$.
Bereken $g'(x)$ met behulp van een limiet.

17 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = -x(2x - 7)$

b $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1)$

c $f(x) = \dfrac{2x - 1}{5 - 2x}$

d $f(x) = 7 - \dfrac{x^2 + 8x}{16}$

e $f(x) = x(3x + 2)^2$

f $f(x) = 8 - (x - 1)^2$

g $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1} + x^4$

h $f(x) = 3x^2 - \dfrac{4x + 3}{2x - 1}$

18 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$ en $g(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 2x - 3}$.

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.

a Bereken $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

b Stel langs algebraïsche weg de formule op van k.

c De grafiek van g heeft een perforatie.
Onderzoek langs algebraïsche weg of deze perforatie op de lijn k ligt.

19 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 9)(x - 1)$.

a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
Stel met behulp van differentiëren de formule van k op.

b De grafiek van f snijdt de y-as in het punt B.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn m in B.

c Op de grafiek van f ligt het punt C met $x_C = -1$.
Onderzoek met behulp van differentiëren of de raaklijn in C horizontaal is.

20 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

a De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A.
De lijn k raakt de grafiek van f in A.
Stel langs algebraïsche weg de formule van k op.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van de punten van de grafiek waar de raaklijn horizontaal is.

c In de punten B en C op de grafiek van f zijn de raaklijnen evenwijdig met de lijn l: $y = 4x + 10$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van B en C.

21 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 + 2)(1 - x)$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.

a Stel langs algebraïsche weg de formule van k op.

b Op de grafiek van f ligt het punt B waarin de raaklijn evenwijdig is met k.
Bereken algebraïsch de x-coördinaat van B.

22 Een motor trekt op. Gedurende de eerste acht seconden is de afgelegde weg s in meter te benaderen door de formule $s = 0{,}06t^3 + 1{,}2t^2$. Na acht seconden verandert de snelheid niet meer.

a Bereken algebraïsch de snelheid na vier en na zes seconden.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 100 km/uur.

c Na hoeveel seconden heeft de motor 300 meter afgelegd?

23 Gegeven is de functie $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x+3}$.

a De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A.

b De grafiek van f snijdt de x-as in de punten B en C met $x_B = -2$ en $x_C = 1$. De lijnen l en m zijn de raaklijnen in B en C.
Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van l en m.

24 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

a Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in het punt A met $x_A = -2$.

b De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = -1$ en de lijn m raakt de grafiek van f in het punt C met $x_C = 3$.
Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijnen l en m evenwijdig zijn.

3 Vergelijkingen en herleidingen

25 Bereken exact de oplossingen.

a $17 - (2x - 1)^4 = 1$

b $x^6 - 6x^3 + 5 = 0$

c $10x^4 = 17x^2 + 657$

d $x^3 + 5x \geq 6x^2$

e $(2x^2 - 1)^2 = x^2$

f $(2x - 1)^4 - 5(2x - 1)^2 + 4 = 0$

g $\sqrt{2 - 2x} + 2x = 0$

h $x^3 - 3x\sqrt{x} - 108 = 0$

26 Bereken exact de oplossingen.

a $x^5 - 16x^3 + 28x = 0$

b $x^4 < x^2 + 12$

c $|x^4 - 7x^2| = 18$

d $\dfrac{2x + 4}{x} = \dfrac{12}{x + 1}$

e $6x^5 + 10x^2 \cdot \sqrt{x} - 464 = 0$

f $\sqrt{3x - 2} + 2 = x$

g $(2x - 3)(x^2 - 3) + 3 = 2x$

h $\dfrac{x^2 - 9}{2x + 3} = \dfrac{x^2 - 9}{x + 4}$

27 Herleid.

a $y = \dfrac{x^4 - x^2}{x - 1}$

b $y = \dfrac{15x}{x + 2} - 2x$

c $y = \dfrac{10 - \dfrac{2x}{x + 3}}{5 + \dfrac{2}{x + 3}}$

d $N = \dfrac{3t^3 + 3t^2 - 6t}{t^2 + 2t}$

e $K = \dfrac{2a}{a + 2}\left(\dfrac{a - 1}{2a} - \dfrac{a + 2}{a^2}\right)$

f $P = \dfrac{\dfrac{q^2}{q^2 + 1} - 2}{\dfrac{q}{q^2 + 1} - 2q}$

28 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 2x + 3y = 58 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$

b $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$

c $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}32y = 2 \\ 0{,}6x - 0{,}28y = 5 \end{cases}$

d $\begin{cases} (2x - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73 \\ x + 5y = 17 \end{cases}$

29 **a** Werk bij $(4x^2 - 1)^2 - (3x - 1)^3$ de haakjes weg.

b Deel uit bij $T = \dfrac{(2t - 1)(t + 2)}{2t^2}$.

c Werk bij $B = 12a - 6 \cdot \dfrac{\dfrac{a}{a^2 + 1} - 2}{5a}$ de breuk uit de teller weg.

d Gegeven zijn de formules $K = \dfrac{3y - 2}{2y - 1}$ en $y = \dfrac{4x}{x - 1}$.

Schrijf de formule van K in de vorm $K = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

e Maak b vrij uit $\dfrac{a + b}{b + 2} = \dfrac{3}{a}$.

f Gegeven is $\dfrac{3x + 2}{x - 1} = \dfrac{6y + 1}{y + 3}$.

Druk y uit in x en druk x uit in y.

30 De grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + 6$ gaat door de punten $(-4, 42)$ en $(2, 12)$.
Bereken a en b.

31 **a** Bereken exact voor welke p de vergelijking $px^3 + 2px^2 + x^2 + 2\frac{1}{4}x = 0$ drie oplossingen heeft.
b Bereken exact voor welke p de vergelijking $2px^4 - px^3 + 5x^3 + 2x^2 = 0$ precies één oplossing heeft.

32 Bereken exact de x-coördinaten van de punten op de grafiek van $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$ waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $-\frac{4}{5}$.

33 Gegeven zijn de functies $f(x) = (2x - 3)(x - 4)^2$ en $g(x) = x^2 - 8x + 16$ en de lijn $k: y = 2x - 3$.
a Bereken de extreme waarden van f. Rond zo nodig af op twee decimalen.
b Neem $D_f = [2, 5]$ en bereken B_f.

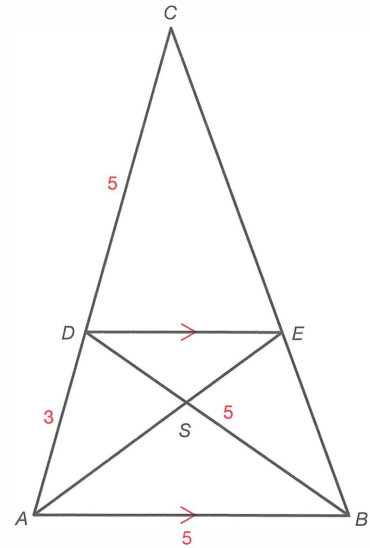
Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van
c de grafiek van f en de lijn k
d de grafiek van g en de lijn k
e de grafieken van f en g.

34 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$ en $g(x) = \dfrac{24}{x + 1}$.
Bereken exact de oplossingen.
a $f(x) = g(x)$
b $f(x) \cdot g(x) = -24$
c $4 \cdot f(x) - g(x) = 8$
d $1\frac{1}{2} \cdot f'(x) - g'(x) = 0$

35 **a** Het omsmelten van a cm^3 koper en b cm^3 zink levert 150 cm^3 messing. De soortelijke massa's van koper, zink en messing zijn achtereenvolgens 8,6 g/cm^3, 7,0 g/cm^3 en 7,9 g/cm^3.
Bereken a en b.
b Een scheikundige heeft 600 ml natriumoplossing nodig met een concentratie van 22%. Hij heeft de beschikking over een fles met een natriumoplossing van 15% en een fles met een natriumoplossing van 30%.
Hoeveel ml van ieder van deze oplossingen moet hij mengen om 600 ml natriumoplossing met een concentratie van 22% te krijgen?

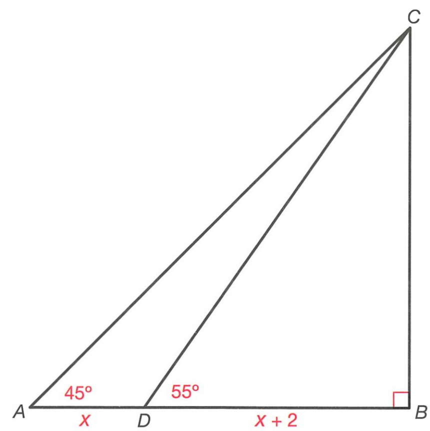
4 Meetkunde

36 In driehoek ABC in figuur G.3 is DE evenwijdig met AB en is S het snijpunt van AE en DB. Verder is $AB = 5$, $AD = 3$, $CD = 5$ en $BD = 5$. Bereken DS.



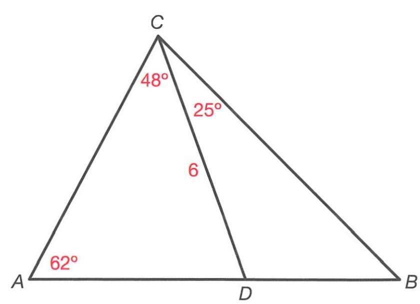
figuur G.3

37 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur G.4 met $\angle A = 45°$. Het punt D ligt op AB zo, dat $\angle BDC = 55°$.
Verder is $BD = AD + 2$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig AB en CD.



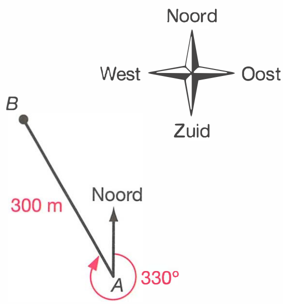
figuur G.4

38 Bereken in één decimaal nauwkeurig de omtrek van driehoek ABC in figuur G.5.

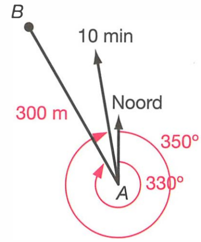


figuur G.5

39 Maaike wil van A naar B zeilen. De afstand van A naar B is 300 meter met een koers van 330°. Hierin is de koers de hoek ten opzichte van het noorden met de wijzers van de klok mee. Zie figuur G.6.



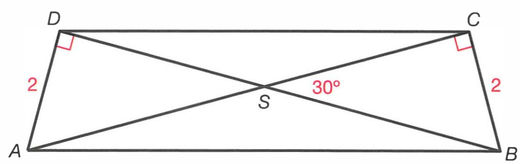
figuur G.6



figuur G.7

Na 1 minuut zeilen merkt Maaike dat ze van de koers is afgeweken. In plaats van met een koers van 330° te varen heeft ze met een koers van 350° gevaren. Zie figuur G.7.
Gedurende deze minuut heeft ze 100 meter afgelegd.
Maaike stelt haar koers bij en zeilt nu rechtstreeks naar B.
Bereken hoeveel meter Maaike extra heeft afgelegd.

40 Gegeven is het trapezium $ABCD$ met S het snijpunt van AC en BD. Verder is $AD = BC = 2$, $\angle ADB = \angle ACB = 90°$ en $\angle BSC = 30°$.
Zie figuur G.8.
Bereken exact AB en CD.

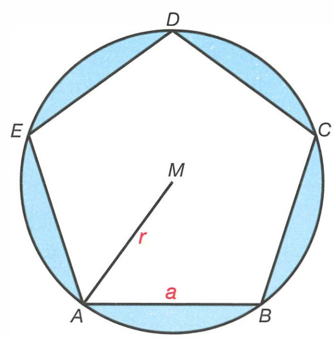


figuur G.8

41 In figuur G.9 zie je een regelmatige vijfhoek met zijn omgeschreven cirkel. De vijfhoek heeft zijde a en de straal van de cirkel is r.

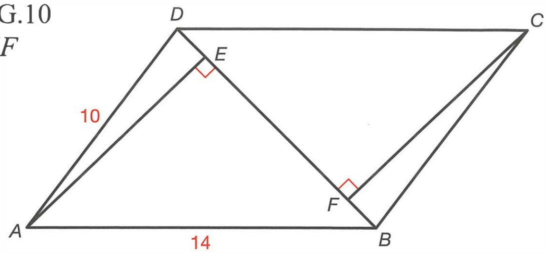
a Neem $r = 10$.
Bereken a in één decimaal nauwkeurig.

b Neem $a = 5$.
Bereken in één decimaal nauwkeurig de totale oppervlakte van de gekleurde vlakdelen.



figuur G.9

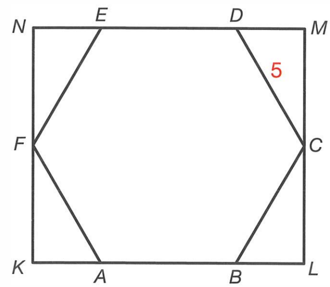
42 Gegeven is het parallellogram $ABCD$ in figuur G.10 met $AB = 14$ en $AD = 10$. Verder staan AE en CF loodrecht op de diagonaal BD.
De oppervlakte van het parallellogram is 112.
Bereken exact de lengte van het lijnstuk EF.



figuur G.10

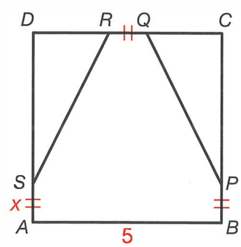
43 Van een ruit is de zijde 10 en de oppervlakte 60.
Bereken exact de lengten van de diagonalen van de ruit.

44 De regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde 5 past precies in de rechthoek $KLMN$. Zie figuur G.11.
Bereken exact de oppervlakte van $KLMN$.



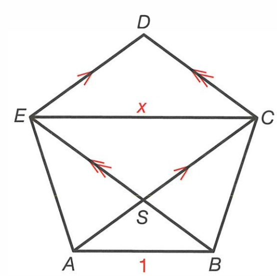
figuur G.11

45 In figuur G.12 is in het vierkant $ABCD$ met zijde 5 de symmetrische zeshoek $ABPQRS$ met $AS = BP = QR$ getekend. De oppervlakte van de zeshoek is 15.
Bereken exact de lengte van AS.



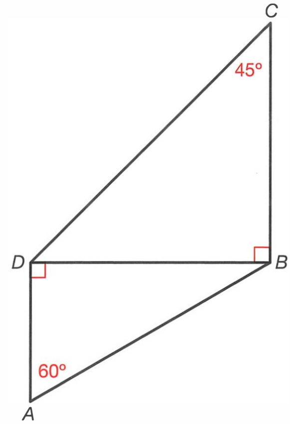
figuur G.12

46 In figuur G.13 is de regelmatige vijfhoek $ABCDE$ met zijde 1 getekend. De lengte van de diagonalen stellen we x.
De diagonalen AC en BE snijden elkaar in het punt S. Je mag ervan uitgaan dat diagonalen van een regelmatige vijfhoek evenwijdig zijn met zijden van de vijfhoek.
Bereken de exacte waarde van EC.



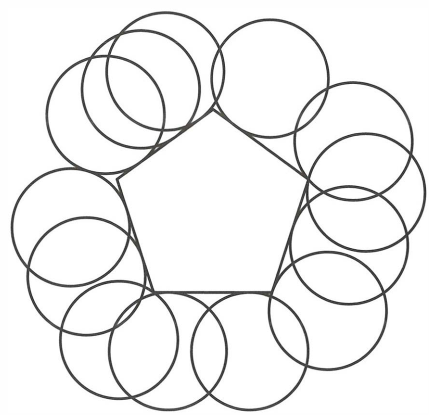
figuur G.13

47 Gegeven is de vierhoek $ABCD$ met $\angle A = 60°$ en $\angle C = 45°$. Verder is $\angle ADB = \angle CBD = 90°$, zie figuur G.14.
De oppervlakte van de vierhoek is $7\frac{1}{2}$.
Bereken exact BD en AB.



figuur G.14

48 Een cirkel met straal 2 rolt rond een regelmatige vijfhoek met zijde 4. Daarbij blijft de cirkel tegen de vijfhoek gedrukt tot hij weer in zijn uitgangspositie is aangeland.
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat tijdens deze omwenteling door de cirkel bestreken wordt.


figuur G.15

Overzicht GR-handleiding

Module

Berekeningen op het basisscherm ▪ Het basisscherm ▪ Eenvoudige berekeningen ▪ Mintekens ▪ Haakjes ▪ Tussenstappen ▪ De toets ANS ▪ Fouten verbeteren ▪ De toets ENTRY / REPLAY ▪ Breuken invoeren ▪ Decimaal getal omzetten in breuk ▪ Breuken vermenigvuldigen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 10
Formules, grafieken en tabellen ▪ Formules invoeren ▪ Grafieken plotten ▪ Het standaardscherm ▪ Formules uitzetten ▪ De trace-cursor ▪ Functiewaarden berekenen met de trace-cursor ▪ Functiewaarden berekenen op het basisscherm ▪ Tabellen maken ▪ Tabelinstelling veranderen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 39
Toppen en snijpunten ▪ Toppen van grafieken ▪ Snijpunten van grafieken ▪ Berekenen van nulpunten	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 39
Helling ▪ De richtingscoëfficiënt van een raaklijn	vwo B deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 60
Het gebruik van Ans en lettergeheugens ▪ De toets ANS ▪ Het gebruik van lettergeheugens	vwo B deel 1 hoofdstuk 4 bladzijde 141
Allerlei ▪ Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Trefwoordenregister

Verantwoording

Fotoresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam
Illustratieverwerving: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: OKS, Delhi (India)

Foto's
Hollandse Hoogte, Amsterdam: blz. 6–7, 94–95
Gerrit de Jong, Middelburg: blz. 15, 36, 37, 39, 40, 43, 57, 58, 67, 89, 90, 96, 122, 123, 142, 153, 156, 164, 187
Shutterstock: blz. 25, 55
Getty images: blz. 46–47
WFA, Den Haag: blz. 63, 76, 83, 104
Alamy/Imageselect, Wassenaar: blz. 136–137, 149, 158
Reuters/Jason Reed, Berlijn: blz. 165
Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, Arnhem: blz. 178, 179, 183

Colofon
Omslagontwerp: Lava, Amsterdam
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: OKS, Delhi (India)

FSC www.fsc.org MIX Papier van verantwoorde herkomst FSC® C118189

0 / 14

ISBN 978-90-01-84232-1